Séminaire de Théorie des Nombres .

- Besançon -

Année 1974-1975

SUR L'ARTICLE DE H.W. LEOPOLDT INTITULE

"Uber Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper [2] .

Bernard ORIAT

Faculté des Sciences.Mathématiques .

25030 BESANCON CEDEX

SUR L'ARTICLE DE H.W. LEOPOLDT INTITULE

|| Uber Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper [2] .

par Bernard ORIAT

Introduction

Le présent article n'a aucune prétention à quelque originalité que ce soit . Nous nous proposons d'énoncer et de démontrer les résultats de [2] qui nous ont paru les plus importants . Les autres seront cités sans démonstration ou plus simplement omis .

Nous supposerons connus les paragraphes I, III et IV de [3]. Nous conserverons d'ailleurs les notations de cet exposé et ne ferons à ce sujet aucun rappel .

Fixons quelques notations . Dans la suite , sauf mention contraire , $K/\mathbb{Q}$ sera une extension abélienne finie réelle , G sera son groupe de Galois et $\mathfrak{X}$ son groupe de caractères . On désignera par $\mathfrak{X}'$ l'ensemble des caractères de G irréductibles sur $\mathbb{Q}$. On notera E_K le groupe des unités de K , R_K le régulateur de K , h_K le nombre de classes d'idéaux de K .

Si M est un $\mathbb{Q}[G]$-module (noté multiplicativement) , il se décompose en produit direct $M = \prod_{\chi' \in \mathfrak{X}'} M^{e_{\chi'}}$, où $e_{\chi'}$ est l'idempotent de $\mathbb{Q}[G]$ associé à χ' . Le fil conducteur de l'article que nous nous proposons d'étudier est le suivant :

> Essayer d'obtenir des décompositions du même type (c'est-à-dire sous forme de produits de quantités indicées par les éléments de $\mathfrak{X}'$) pour les paramètres suivants : le régulateur de K et le nombre de classes d'idéaux de K .

Soit $\varkappa$ un caractère de K . Dans les paragraphes I et II , on introduira les groupes $E_\varkappa$ et $E_\varkappa^+$. Il s'agit de groupes d'unités abéliennes réelles ne dépendant que du caractère rationnel $\varkappa'$. (Nous noterons indifféremment $E_\varkappa$ ou $E_{\varkappa'}$, $E_\varkappa^+$ ou $E_{\varkappa'}^+$) . Les éléments de $E_\varkappa$ seront appelés des $\varkappa$-unités . En général ce ne sont pas des unités de K . Quant à $E_\varkappa^+$. il est défini comme l'intersection de $E_\varkappa$ avec le sous-corps $K_\varkappa$ de K . La proposition Ib donnera une majoration de $[E_\varkappa : E_\varkappa^+]$ et la proposition IIb montrera que $|E_\varkappa|$ et $|E_\varkappa^+|$ (groupes des valeurs absolues de $E_\varkappa$ et $E_\varkappa^+$) sont des $\mathbb{Z}[G]$-modules isomorphes , simples de caractère $\varkappa'$.

On introduira également deux sous-groupes de E_K : E^K et E^{K_+} . Le premier est tel que $|E^K|$ soit le noyau de $|E_K|$, c'est-à-dire le plus grand sous-module complet de $|E_K|$. (Les notions de modules simples et complets ont été introduites dans [3] § III) . L'autre vérifie $E^{K_+} \subset E^K$ et $|E^{K_+}|$ est aussi complet . On a les décompositions en produit direct :

$$|E^{K_+}| = \prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} |E^{K_+}|^{e_{\varkappa'}} \qquad \text{avec} \qquad |E^{K_+}|^{e_{\varkappa'}} = |E_{\varkappa'}^+| \qquad ;$$

$$|E^K| = \prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} |E^K|^{e_{\varkappa'}} \qquad \text{avec} \qquad |E^K|^{e_{\varkappa'}} = |E_{\varkappa'} \cap K| \quad .$$

Le groupe E^{K_+} et les groupes $E_\varkappa^+$ seront plus utilisés que E^K et $E_\varkappa$. Les groupes de $\varkappa$-unités $E_\varkappa$ n'interviennent d'ailleurs que par l'intermédiaire de E^K . Ils ne servent qu'à obtenir les majorations de $Q_K^+ = [E_K : E^{K_+}]$ données par les propositions IIc , IId et IIe .

Le paragraphe III traite des régulateurs . Soit H un sous-groupe de E_K , complet en tant que $\mathbb{Z}[G]$-module . On introduit des quantités $R_{\varkappa'}^K(H)$, appelées $\varkappa'$-régulateurs de H dans K . Le résultat essentiel de ce paragraphe est la proposition IIIf qui montre que le régulateur de H est le produit de $\prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} R_{\varkappa'}^K(H)$ par un coefficient ne dépendant que du groupe de Galois G .

Dans le paragraphe IV , on s'intéresse à la décomposition de h_K . On introduit des quantités $h_{\varkappa'}$ qu'on appelle $\varkappa'$-nombres de classes et qui ne dépendent que du caractère $\varkappa'$. La proposition IVc montre que le nombre de classes de K , h_K , est le produit de $\prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} h_{\varkappa'}$ par deux coefficients : l'un ne dépend que du groupe de Galois G et l'autre est égal à $Q_K^+ = [E_K : E^{K_+}]$. La démonstration de ce résultat utilise la décomposition de R_K obtenue dans le paragraphe précédent et la formule analytique donnant le nombre de classes (réelles) de K . On est conduit à définir des « unités cyclotomiques » de K et on obtient , à la proposition IV b une formule qui montre que l'indice du groupe des unités cyclotomiques de K dans le groupe des unités de K est le produit de h_K par un coefficient ne dépendant que du groupe de Galois G . Ce résultat est à rapprocher de ceux obtenus par Hasse et contenus dans [1] , mais n'en est pas, semble-t-il, conséquence ; non plus qu'inversement . Les unités cyclotomiques de Leopoldt ne sont d'ailleurs pas les mêmes que celles de Hasse .

I

Première définition des $\varkappa$ - unités .

1) Préliminaires . Soient $\varkappa$ un caractère résiduel et $K_\varkappa/\mathbb{Q}$ l'extension cyclique correspondante ([3] § IV) . Soit $\mathfrak{X}$ le groupe des caractères engendré par $\varkappa$, c'est-à-dire le groupe des caractères de $K_\varkappa$. Soit a un élément de $K_\varkappa$ non carré dans $K_\varkappa$. Considérons l'extension quadratique $K_\varkappa(\sqrt{a})/K_\varkappa$.

Lemme I a . Supposons que $\varkappa$ soit pair et $K_\varkappa(\sqrt{a})/\mathbb{Q}$ réelle et abélienne. Supposons que l'idéal de $K_\varkappa$ engendré par a soit le carré d'un idéal de $K_\varkappa$. Alors le corps $K_\varkappa(\sqrt{a})$ est composé de $K_\varkappa$ et d'un corps quadratique réel ; en d'autres termes , il existe un caractère quadratique ψ de conducteur f_ψ tel que $K_\varkappa(\sqrt{a}) = K_\varkappa(\sqrt{f_\psi})$.

démonstration

Montrons tout d'abord que l'extension $K_\varkappa(\sqrt{a})/\mathbb{Q}$ n'est pas cyclique . En effet , si il en était ainsi , désignons par τ un générateur de son groupe de Galois et par 2^n son degré . Nous aurions alors

$(\sqrt{a})^{\tau^n} = -\sqrt{a}$ d'où :

$((\sqrt{a})^{1+\tau+\dots+\tau^{n-1}})^\tau = -\sqrt{a}^{\,1+\tau+\dots+\tau^{n-1}}$ et $N_{K_\varkappa/\mathbb{Q}}(a)$ n'appartien -

drait pas à $\mathbb{Q}^2$. Or cette quantité doit engendrer le carré d'un idéal de $\mathbb{Z}$ et elle doit être positive puisque $K_\varkappa(\sqrt{a})$ est réel .
L'extension $K_\varkappa(\sqrt{a})/\mathbb{Q}$ doit donc être composée de $K_\varkappa$ et d'un corps quadratique réel . Désignons par ψ son caractère . Comme le conducteur d'un corps quadratique réel coïncide avec son discriminant, nous aurons donc $K_\varkappa(\sqrt{a}) = K_\varkappa(\sqrt{f_\psi})$.

Définition . Toute extension $K_\varkappa(\sqrt{a})/K_\varkappa$ vérifiant les hypothèses du lemme précédent sera appelée une ψ-extension .

Lemme Ib . Soient $K_\varkappa(\sqrt{f_\psi})/K_\varkappa$ une ψ-extension et L le plus grand sous-corps de $K_\varkappa$ tel que $[L:\mathbb{Q}]$ soit une puissance de 2 .
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- Il existe une unité α de $K_\varkappa$ telle que $K_\varkappa(\sqrt{f_\psi}) = K_\varkappa(\sqrt{\alpha})$.
- Il existe une unité η de L telle que $L(\sqrt{f_\psi}) = L(\sqrt{\eta})$.

démonstration

Posons $[K_\varkappa:\mathbb{Q}] = 2^n u$, avec u impair . Si la première condition est vérifiée , on aura $f_\psi = b^2\varepsilon$, avec b dans $K_\varkappa$. D'où :
$f_\psi^u = N_{K_\varkappa/L}(b)^2 N_{K_\varkappa/L}(\varepsilon)$ et $L(\sqrt{f_\psi}) = L\left(\sqrt{N_{K_\varkappa/L}(\varepsilon)}\right)$.

La réciproque est évidente .

Nous utiliserons également le résultat suivant concernant les déterminants de groupes :

Lemme Ic . Soit G un groupe abélien fini . Soit (u_σ) une suite d'indéterminées sur $\mathbb{Q}$ indexée par G . Posons $u = \sum_{\sigma\in G} u_\sigma \sigma$; c'est un élément de l'algèbre $\mathbb{Q}(u_\sigma)[G]$. Soit $\mathfrak{X}'$ l'ensemble des caractères de G irréductibles sur $\mathbb{Q}$. Soit $\mathring{u}$ l'application de $\mathbb{Q}(u_\sigma)[G]$ dans lui-même , définie par $\mathring{u}(z) = uz$ et soit $\mathring{u}_{\varkappa'}$ sa restriction à l'idéal $\mathbb{Q}(u_\sigma)[G]e_{\varkappa'}$.
Les déterminants de $\mathring{u}$ et $\mathring{u}_{\varkappa'}$ sont donnés par :

$$\mathrm{Det}\,\mathring{u}_{\varkappa'} = \prod_{\psi\in\varkappa'} \sum_{\sigma\in G} \psi(\sigma)\,u_\sigma .$$

$$\mathrm{Det}\,\mathring{u} = \prod_{\varkappa'\in\mathfrak{X}'} \mathrm{Det}\,\mathring{u}_{\varkappa'} .$$

démonstration

Nous avons $\mathbb{Q}(u_\sigma)[G] = \bigoplus_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} \mathbb{Q}(u_\sigma)[G]\, e_{\varkappa'}$. Le déterminant de $\mathring{u}$ est donc le produit des déterminants des restrictions $\mathring{u}_{\varkappa'}$ de $\mathring{u}$ à chacun des idéaux $\mathbb{Q}(u_\sigma)[G]\, e_{\varkappa'}$. Etendons $\mathring{u}_{\varkappa'}$ à $\mathbb{C}(u_\sigma)[G]\, e_{\varkappa'} = \bigoplus_{\psi \in \varkappa'} \mathbb{C}(u_\sigma)[G]\, e_\psi$. L'ensemble $\{e_\psi\}_{\psi \in \varkappa'}$ est une base de ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel et comme $\sigma e_\psi = \psi(\sigma) e_\psi$, nous aurons $\mathring{u}_{\varkappa'}(e_\psi) = u\, e_\psi = \left(\sum_{\sigma \in G} u_\sigma\, \psi(\sigma)\right) e_\psi$. D'où l'égalité :

$$\mathrm{Det}\, \mathring{u}_{\varkappa'} = \prod_{\psi \in \varkappa'} \left(\sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma)\, u_\sigma \right).$$

2) Définition des $\varkappa$-unités. On dira que ε est une unité réelle et abélienne si ε est une unité contenue dans une extension réelle et abélienne de $\mathbb{Q}$. Soit $\varkappa$ un caractère résiduel pair et $K_\varkappa$ le corps cyclique (réel) correspondant. On dira que ε est une $\varkappa$-unité si ε vérifie les 3 conditions :

a : ε est une unité réelle et abélienne.

b : ε^2 appartient à $K_\varkappa$.

c : $N_{K_\varkappa/L}(\varepsilon^2) = 1$ pour tout sous-corps strict L de $K_\varkappa$

Une $\varkappa$-unité sera dite propre si elle appartient à $K_\varkappa$ et impropre dans le cas contraire. On désignera par $E_\varkappa$ (resp. $E_\varkappa^+$) le groupe des $\varkappa$-unités (resp. $\varkappa$-unités propres).

Remarque. Les groupes d'unités définis ci-dessus ne dépendent en fait, que du caractère rationnel $\varkappa'$. Nous emploierons indifféremment l'une ou l'autre des notations $E_\varkappa$ ou $E_{\varkappa'}$, $E_\varkappa^+$ ou $E_{\varkappa'}^+$.
On prendra la même liberté avec d'autres quantités indexées par $\mathfrak{X}'$.

L'application $\varepsilon \to \varepsilon^2$ est une application de $E_\varkappa$ dans $E_\varkappa^+$ et cela prouve que l'indice $[E_\varkappa^+ : E_\varkappa]$, s'il est fini, est une puissance de 2.

Définissons $q_\varkappa$ en posant $[E_\varkappa^+ : E_\varkappa] = 2^{q_\varkappa}$. L'objet du paragraphe suivant est de montrer que $q_\varkappa$ vaut 0 ou 1.

3) Majoration de $q_\varkappa$.

Proposition I a . Soit $\varkappa$ un caractère pair , dont l'ordre $g_\varkappa$ est divi - sible par un nombre premier impair . On a alors $q_\varkappa = 0$. C'est-à-dire qu'il n'existe pas de $\varkappa$-unité impropre .

démonstration

Soit ε une $\varkappa$-unité . L'extension $K_\varkappa(\varepsilon)/K_\varkappa$ est une ψ-exten - sion . Reprenons les notations du lemme I b . Il existe une unité η de L telle que $\varepsilon^2 = b^2\eta$.
Comme L est différent de $K_\varkappa$ nous avons :

$$1 = N_{K_\varkappa/L}(\varepsilon^2) = N_{K_\varkappa/L}(b^2)\,\eta^u \quad \text{et} \quad K_\varkappa(\varepsilon) = K_\varkappa(\sqrt{\eta}) = K_\varkappa \ .$$

Cela prouve que ε appartient à $K_\varkappa$.

Lemme I d . Soit $\varkappa$ un caractère pair dont l'ordre $g_\varkappa$ est une puissance de 2 , c'est-à-dire $g_\varkappa = 2^n$. Soit σ un générateur de $\mathrm{Gal}(K_\varkappa/\mathbb{Q})$. Si une unité α de $K_\varkappa$ vérifie les quatre conditions :

a' : α est totalement positive .

b' : $\alpha^{1+\sigma^{2^{n-1}}} = 1$.

c' : $\alpha^{1-\sigma}$ appartient à $K_\varkappa^2$.

d' : α n'appartient pas à $K_\varkappa$,

alors $\sqrt{\alpha}$ est une $\varkappa$-unité impropre . Réciproquement si η est une $\varkappa$-unité impropre , alors $\alpha = \eta^2$ vérifie les quatre conditions ci-dessus.

démonstration

Soit α remplissant les conditions ci-dessus .
On déduit de a' et d' que $K_\varkappa(\sqrt{\alpha})/K_\varkappa$ est réelle de degré 2 .
On déduit de c' que $K_\varkappa(\sqrt{\varepsilon})/\mathbb{Q}$ est galoisienne . Soit G son groupe de Galois . Il possède un sous-groupe H d'ordre 2 distingué . Ce sous - groupe H est donc inclus dans le centre de G et comme G/H est cyclique, on en déduit que G est abélien . Enfin , la condition c se déduit de la condition b' . La réciproque n'est pas plus difficile .

Proposition Ib . Pour tout caractère $\varkappa$ pair , la quantité $q_\varkappa$ vaut 0 ou 1 .

démonstration

Compte-tenu de la proposition précédente , nous allons supposer que l'ordre $g_\varkappa$ de $\varkappa$ est égal à 2^n . Considérons $|E_\varkappa^+|$, ensemble des valeurs absolues des éléments de $E_\varkappa^+$ (ou si l'on préfère : $|E_\varkappa^+| = E_\varkappa^+ / \{\pm 1\}$) . Soit $G_\varkappa$ le groupe de Galois de $K_\varkappa/\mathbb{Q}$ et σ un générateur . Nous avons donc , pour tout ε de $E_\varkappa^+$, $\varepsilon^{1+\sigma^{2^{n-1}}} = 1$.

Le groupe $|E_\varkappa^+|$ est un $\mathbb{Z}[G]$ - module , libre de type fini en tant que $\mathbb{Z}$-module . Etendons l'anneau des scalaires $\mathbb{Z}[G]$ à $\mathbb{Q}[G]$. Nous obtenons alors $|E_\varkappa^+|^{\mathbb{Q}} = \mathcal{E}_\varkappa^+$. Si ψ' est un caractère rationnel de $G_\varkappa$ différent de $\varkappa'$, nous aurons $\sigma^{2^{n-1}} e_\psi = e_\psi$, d'où $\sigma^{2^{n-1}} e_{\psi'} = e_{\psi'}$ et $e_{\psi'} = \frac{1}{2}(1+\sigma^{2^{n-1}})\, e_{\psi'}$. D'où $|\varepsilon|^{e_{\psi'}} = 1$ pour toute $\varkappa$ - unité ε . Ceci montre que les composantes simples de $\mathcal{E}_\varkappa^+$ ont toutes pour caractère $\varkappa'$.
D'autre part , considérons le groupe des unités de $K_\varkappa$ noté $E_{K_\varkappa}$.
Nous savons que $\mathcal{E}_{K_\varkappa} = |E_{K_\varkappa}|^{\mathbb{Q}}$ a pour caractère la somme des caractères rationnels de $G_\varkappa$ différents de 1 ([3] Proposition III a) . On en déduit que $|E_\varkappa|$ est un $\mathbb{Z}[G_\varkappa]$-module simple de caractère $\varkappa'$. (Ce résultat est d'ailleurs toujours vrai , quel que soit la valeur de $g_\varkappa$. Ceci sera démontré dans le paragraphe suivant) .

Introduisons maintenant l'ensemble :
$E_\varkappa^{++} = \{\varepsilon\ ,\ \varepsilon \in E_\varkappa^+\ ;\ \varepsilon^{1-\sigma} \in K_\varkappa^2\}$. Nous avons les inclusions :
$E_\varkappa^+ \supset E_\varkappa^{++} \supset E_\varkappa^{+2} \supset E_\varkappa^{++(1-\sigma)}$ et $|E_\varkappa^{++}|$ est un $\mathbb{Z}[G_\varkappa]$-module simple de caractère $\varkappa'$. Considérons l'application de $|E_\varkappa^{++}|$ dans $|E_\varkappa^{++}|$ qui associe $|\varepsilon|^{1-\sigma}$ à $|\varepsilon|$. En appliquant le lemme Ic avec $G = G_\varkappa$ et $u = 1-\sigma$, nous constatons que :

$$[\,|E_\varkappa^{++}| : |E_\varkappa^{++}|^{1-\sigma}\,] = \det \mathring{u}_\varkappa = N_{\mathbb{Q}^{(g_\varkappa)}/\mathbb{Q}}(1-\varkappa(\sigma)) = 2 \ .$$

Nous en déduisons que $[E_\varkappa^{++} : E_\varkappa^{+2}] = 1$ ou 2 . Enfin, considérons l'application de $E_\varkappa$ dans $E_\varkappa^{++}$ qui associe ε^2 à ε .
Elle induit un isomorphisme de $E/E_\varkappa^+$ dans $E_\varkappa^{++}/E_\varkappa^{+2}$. En effet , si η

appartient à $E_{\varkappa}^{++}$, η vérifie les conditions a', b', c' et appartient à $K_{\varkappa}$. Donc η ne vérifie pas d' .

Remarque I a . On trouvera dans [2] le résultat suivant , qui donne aussi une majoration de $q_{\varkappa}$: Si $\varkappa$ est un caractère pair de conducteur une puissance d'un nombre premier , alors $q_{\varkappa} = 0$.

4) Existence de $\varkappa$-unités impropres .

Proposition I c . Soit $\varkappa$ un caractère quadratique pair . Si l'extension correspondante $\mathbf{Q}(\sqrt{f_{\varkappa}})/\mathbf{Q}$ possède une unité fondamentale de norme 1 , alors il existe une $\varkappa$-unité impropre . C'est-à-dire $q_{\varkappa} = 1$.

En effet , l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{f_{\varkappa}})$ vérifie les conditions du lemme I d .

Remarque I b . Leopoldt montre dans [2] un résultat plus fort . Pour tout n , il existe une infinité de caractères $\varkappa$ d'ordre 2^n tels que $q_{\varkappa} = 1$.

Remarque I c . Soit ε une $\varkappa$-unité impropre . L'extension $K_{\varkappa}(\varepsilon)/K_{\varkappa}$ peut être ramifiée ou non ramifiée .

II

Deuxième définition des $\varkappa$-unités . Propriétés de structure .

1) Définition du symbole $|\varepsilon|_{\varkappa'}$. Soit $K/\mathbf{Q}$ une extension abélienne finie réelle , G son groupe de Galois , g son degré , E_K le groupe des unités de K . On désigne par $|E_K|$ le groupe des valeurs absolues des éléments de E_K . Il s'agit d'un $\mathbf{Z}[G]$-module , le groupe G opérant par $|\alpha|^{\sigma} = |\alpha^{\sigma}|$. On désignera par $\mathcal{E}_K$ le $\mathbf{Q}[G]$-module déduit de $|E_K|$ par extension de l'anneau des scalaires à $\mathbf{Q}$. (Ce que l'on avait noté dans [3] § III : $|E_K|^{\mathbf{Q}}$) .

Si L est un sous-corps de K , alors $\mathcal{E}_L$ peut être considéré comme une partie de $\mathcal{E}_K$. Il s'agit alors d'un sous-$\mathbf{Q}[G]$-module de $\mathcal{E}_K$ et c'est l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}_K$ invariants par $\mathrm{Gal}(K/L)$.

Soit $\varkappa$ un caractère de K , c'est-à-dire un caractère complexe de G . Soit $e_{\varkappa'}$ l'idempotent de $\mathbb{Q}[G]$ correspondant au caractère rationnel $\varkappa'$ de G . On a donc $e_{\varkappa'} = \frac{1}{g} \sum_{\sigma \in G} \varkappa'(\sigma^{-1})\sigma$. Si α est un élément de $\mathcal{E}_K$, $\alpha^{e_{\varkappa'}}$ est aussi un élément de $\mathcal{E}_K$. Soit $K_1/\mathbb{Q}$ une extension abélienne réelle telle que K_1 contienne K . Introduisons comme précédemment G_1 , g_1 , $\mathcal{E}_{K_1}$. L'élément α appartient aussi à $\mathcal{E}_{K_1}$. Soit $\Pi : G_1 \to G$ l'homomorphisme de restriction . Il s'étend en un homomorphisme de $\mathbb{Q}[G_1]$ sur $\mathbb{Q}[G]$ au moyen duquel $\mathcal{E}_K$ devient un $\mathbb{Q}[G_1]$-module . Le caractère $\varkappa'$ peut aussi être considéré comme un caractère rationnel de G_1 (en le confondant avec $\varkappa' \circ \Pi$) . Il lui correspond alors un idempotent $e^1_{\varkappa'} = \frac{1}{g_1} \sum_{\sigma \in G_1} \varkappa'(\sigma^{-1})\sigma$. Nous avons : $\Pi(e^1_{\varkappa'}) = e_{\varkappa'}$ et $\alpha^{e_{\varkappa'}} = \alpha^{e^1_{\varkappa'}}$.

Nous avons donc montré , que bien qu'il existe une ambiguïté dans la notation $e_{\varkappa'}$ qui ne fait pas apparaître le groupe G sur lequel a lieu la « décomposition » $e_{\varkappa'} = \frac{1}{g} \sum_{\sigma \in G} \varkappa'(\sigma^{-1})\sigma$, par contre il n'y en a plus pour $\alpha^{e_{\varkappa'}}$ qui ne dépend plus que de $\varkappa'$. Nous poserons $\alpha_{\varkappa'} = \alpha^{e_{\varkappa'}}$ et nous appellerons cette quantité : $\varkappa'$-composante de α .

Soit ε une unité abélienne réelle et soit $\varkappa$ un caractère résiduel pair . Il existe une extension abélienne réelle $K/\mathbb{Q}$ telle que $\varkappa$ soit un caractère de K et telle que ε appartienne à K . La quantité $|\varepsilon|_{\varkappa'}$, que l'on appellera $\varkappa'$-composante de ε , ne dépend donc pas du choix de K . Ce n'est pas , en général , une unité réelle abélienne . Comme elle est invariante par $\mathrm{Gal}(K/K_\varkappa)$ c'est un élément de $\mathcal{E}_{K_\varkappa}$.

2) <u>Deuxième définition des $\varkappa'$-unités</u> . Soit $\varkappa$ un caractère résiduel pair et ε une unité réelle et abélienne .

<u>Proposition II a</u> . L'unité ε est une $\varkappa'$-unité si et seulement si

$$|\varepsilon|_{\varkappa'} = |\varepsilon| .$$

démonstration

Soit donc $K/\mathbb{Q}$ une extension abélienne réelle telle que $\varkappa$ soit un caractère de K et ε une unité de K. Soit G son groupe de Galois, g son degré. Soit $g_\varkappa$ l'ordre de $\varkappa$. Nous désignerons par σ un élément de G tel que $\varkappa(\sigma)$ engendre $\varkappa(G)$. Soit enfin $e_{\varkappa'}$ l'idempotent $e_{\varkappa'} = \frac{1}{g} \sum_{\tau \in G} \varkappa'(\tau^{-1})\tau$. Nous allons commencer par mettre $e_{\varkappa'}$ sous une autre forme. Si $\tau\tau'^{-1}$ appartient à $\operatorname{Ker} \varkappa$, nous avons $\varkappa(\tau) = \varkappa(\tau')$ et $\varkappa'(\tau) = \varkappa'(\tau')$. D'où :

$$e_{\varkappa'} = \frac{1}{g}\Big(\sum_{\tau \in \operatorname{Ker} \varkappa} \tau\Big)\Big(\sum_{0<k\leq g_\varkappa} \varkappa'(\sigma^{-k})\,\sigma^k\Big) .$$

Si $(k', g_\varkappa) = k$, on a $\varkappa'(\sigma^{-k'}) = \varkappa'(\sigma^{-k})$, d'où :

$$e_{\varkappa'} = \frac{1}{g}\Big(\sum_{\tau \in \operatorname{Ker} \varkappa} \tau\Big)\Big(\sum_{k \mid g_\varkappa} \varkappa'(\sigma^{-k}) \sum_{\substack{(k',g_\varkappa)=k \\ 0<k'\leq g_\varkappa}} \sigma^{k'}\Big) .$$

Posons pour tout k divisant $g_\varkappa$:

$$A(\sigma^k) = \sum_{\substack{(k',g_\varkappa)=k \\ 0<k'\leq g_\varkappa}} \sigma^{k'} \quad \text{et} \quad B(\sigma^k) = \sum_{\substack{k \mid u \\ 0<u\leq g_\varkappa}} \sigma^u .$$

On vérifie élémentairement que $B(\sigma^k) = \sum_{k \mid d \mid g_\varkappa} A(\sigma^d)$.

En inversant à l'aide de la fonction de Möbius, on obtient :

$$A(\sigma^k) = \sum_{k \mid d \mid g_\varkappa} \mu\Big(\frac{d}{k}\Big) B(\sigma^d) .$$

$$\text{D'où } e_{\varkappa'} = \frac{1}{g}\Big(\sum_{\tau \in \operatorname{Ker} \varkappa} \tau\Big)\Big(\sum_{k \mid g_\varkappa} \varkappa'(\sigma^{-k}) \sum_{k \mid d \mid g_\varkappa} \mu\Big(\frac{d}{k}\Big) B(\sigma^d)\Big)$$

$$= \frac{1}{g}\Big(\sum_{\tau \in \operatorname{Ker} \varkappa} \tau\Big)\Big(\sum_{d \mid g_\varkappa} \Big(\sum_{k \mid d} \varkappa'(\sigma^{-k})\,\mu\Big(\frac{d}{k}\Big)\Big) B(\sigma^d)\Big) .$$

En posant $C(d) = \frac{1}{g_\varkappa} \sum_{k \mid d} \varkappa'(\sigma^{-k})\,\mu\Big(\frac{d}{k}\Big)$, nous obtenons :

$$e_{\varkappa'} = \frac{g_\varkappa}{g}\Big(\sum_{\tau \in \operatorname{Ker} \varkappa} \tau\Big)\Big(\sum_{d \mid g_\varkappa} C(d)\, B(\sigma^d)\Big) .$$

Montrons maintenant que $C(g_\varkappa) = 1$. Soit ζ une racine primitive $g_\varkappa^{\text{ème}}$ de 1 . Nous avons :

$$\sum_{k \mid g_\varkappa} \varkappa'(\sigma^{-k})\,\mu\left(\frac{g_\varkappa}{k}\right) = \sum_{k \mid g_\varkappa} Tr_{\mathbb{Q}(g_\varkappa)/\mathbb{Q}}(\zeta^k)\,\mu\left(\frac{g_\varkappa}{k}\right)$$

$$= \sum_{d \mid g_\varkappa} \frac{\varphi(g_\varkappa)}{\varphi(d)}\, Tr_{\mathbb{Q}(d)/\mathbb{Q}}(\zeta^{g_\varkappa/d})\,\mu(d)$$

$$= \sum_{d \mid g_\varkappa} \varphi(g_\varkappa)/\varphi(d) = g_\varkappa$$

car $\qquad Tr_{\mathbb{Q}(d)/\mathbb{Q}}(\zeta^{g_\varkappa/d}) = \mu(d)$ et $\mu(d)^2 = 1$.

Supposons que ε soit une $\varkappa$-unité . D'après la condition b , ε^2 doit appartenir à $K_\varkappa$. On aura donc : $\varepsilon^{2\tau} = \varepsilon^2$ pour tout τ appartenant à Ker $\varkappa$, d'où :

$$\varepsilon^{2\sum_{\tau \in \operatorname{Ker}\varkappa} \tau} = \varepsilon^{2(g/g_\varkappa)} .$$

On en déduit les égalités :

$$\varepsilon^{2e_{\varkappa'}} = \varepsilon^{2(g_\varkappa/g)\left(\sum_{\tau \in \operatorname{Ker}\varkappa} \tau\right) \sum_{d \mid g_\varkappa} C(d)\, B(\sigma^d)}$$

$$= \varepsilon^{2\sum_{d \mid g_\varkappa} C(d)\, B(\sigma^d)} = \prod_{d \mid g_\varkappa} \left(\varepsilon^{2B(\sigma^d)}\right)^{C(d)} .$$

Or $\varepsilon^{2B(\sigma^d)} = N_{K_\varkappa/L_d}(\varepsilon^2)$; en désignant par L_d le sous-corps de $K_\varkappa$ de degré d sur $\mathbb{Q}$. Cette quantité est égale à 1 pour tout d différent de $g_\varkappa$, en vertu de la condition c .

Il reste donc $\qquad \varepsilon^{2e_{\varkappa'}} = \varepsilon^{2C(g_\varkappa)} = \varepsilon^2$ d'où $|\varepsilon|^{e_{\varkappa'}} = |\varepsilon|$.

<u>Réciproquement</u>, supposons que $|\varepsilon|_{\varkappa'} = |\varepsilon|$. Nous avons $\tau e_{\varkappa'} = e_{\varkappa'}$ pour tout τ de Ker $\varkappa$. Cela montre que ε^2 est invariant par tout élément de Ker $\varkappa$, donc appartient à $K_\varkappa$ (condition b) .

Soit un sous-corps de $K_\varkappa$. Il est de la forme K_ψ avec ψ caractère de G tel que $\mathrm{Ker}\,\psi \supset \mathrm{Ker}\,\varkappa$. Comme ε^2 est invariante par tout élément de $\mathrm{Ker}\,\varkappa$ et comme $\mathrm{Gal}(K_\varkappa/K_\psi)$ est isomorphe à $\mathrm{Ker}\,\psi\,/\,\mathrm{Ker}\,\varkappa$, nous avons donc :

$$N_{K_\varkappa/K_\psi}(\varepsilon^2) = \varepsilon^{2(1/|\mathrm{Ker}\,\varkappa|)\sum_{\tau\in\mathrm{Ker}\,\psi}\tau} .$$

Considérons la quantité $(1/|\mathrm{Ker}\,\varkappa|)\sum_{\tau\in\mathrm{Ker}\,\psi}\tau$. Il s'agit d'un idempotent de $\mathbb{Q}[G]$ et il est facile de voir que c'est la somme des idempotents $e_{\psi'_1}$ pour tous les caractères ψ'_1 rationnels irréductibles de G tels que $\mathrm{Ker}\,\psi_1 \supset \mathrm{Ker}\,\psi$. Si donc $K_\varkappa \neq K_\psi$, $e_{\varkappa'}$ n'apparaît donc pas dans cette somme et l'on aura :

$e_{\varkappa'}\sum_{\tau\in\mathrm{Ker}\,\psi}\tau = 0$. Ceci prouve que $N_{K_\varkappa/K_\psi}(\varepsilon^2) = 1$

(condition c) .

Remarque II . On trouvera dans [2] une troisième définition des $\varkappa$-unités qui s'énonce ainsi : Soit $\varkappa$ un caractère résiduel pair , $g_\varkappa$ son ordre , $\Phi_\varkappa$ le $g_\varkappa^{\text{ème}}$ polynome cyclotomique et σ un générateur de $\mathrm{Gal}(K_\varkappa/\mathbb{Q})$. Une unité ε est une $\varkappa$-unité si et seulement si elle vérifie les trois conditions :

- ε est une unité réelle et abélienne
- ε^2 appartient à $K_\varkappa$
- $\varepsilon^{2\Phi_\varkappa(\sigma)} = 1$.

3) Structure des groupes de $\varkappa$-unités . Soient $\varkappa$ un caractère résiduel pair différent de 1 , $g_\varkappa$ son ordre , $K_\varkappa/\mathbb{Q}$ l'extension cyclique réelle correspondante , $G_\varkappa$ son groupe de Galois . Les groupes des valeurs absolues des $\varkappa$-unités $|E_\varkappa|$ et $|E^+_\varkappa|$ sont des $\mathbb{Z}[G_\varkappa]$-modules .
La proposition suivante précise la structure de ces modules (la notion de module « simple » a été définie en [3] § III) .

Proposition IIb . Les $\mathbb{Z}[G_\varkappa]$-modules $|E_\varkappa|$ et $|E^+_\varkappa|$ sont isomorphes . Ce sont des $\mathbb{Z}[G_\varkappa]$-modules simples de caractères $\varkappa'$. En tant que $\mathbb{Z}$-modules , ils sont libres de rang $\varphi(g_\varkappa)$.

démonstration

Si $q_\varkappa = 0$, les deux groupes $E_\varkappa$ et $E^+_\varkappa$ coïncident . Supposons donc que $q_\varkappa = 1$. Reprenons les notations introduites dans la proposition I b et sa démonstration . L'application $|\varepsilon| \to \varepsilon^2$ est un isomorphisme de $|E_\varkappa|$ sur $|E^{++}_\varkappa|$. D'autre part , puisque $[E^{++}_\varkappa : E^{+2}_\varkappa] = 2$, on aura alors $E^{+2}_\varkappa = E^{++(1-\sigma)}_\varkappa$. L'application $|\varepsilon| \to \varepsilon^2$ est un isomorphisme de $|E^+_\varkappa|$ sur $|E^+_\varkappa|^2$. En résumé, on a les $G_\varkappa$-isomorphismes suivants :

$$|E_\varkappa| \cong |E^{++}_\varkappa| \cong |E^{++}_\varkappa|^{1-\sigma} = |E^+_\varkappa|^2 \cong |E^+_\varkappa| \quad .$$

Soit $E_{K_\varkappa}$ le groupe des unités du corps $K_\varkappa$. Soient $\mathcal{E}^+_\varkappa$ et $\mathcal{E}_{K_\varkappa}$ les $\mathbf{Q}[G_\varkappa]$-modules déduits de $|E^+_\varkappa|$ et $|E_{K_\varkappa}|$ par extension de l'anneau des scalaires de $\mathbf{Z}$ à $\mathbf{Q}$. Le module $\mathcal{E}^+_\varkappa$ est un sous-module de $\mathcal{E}_{K_\varkappa}$. Le caractère de ce $\mathbf{Z}[G_\varkappa]$-module est la somme des caractères de $G_\varkappa$ irréductibles sur $\mathbf{Q}$, différents de 1 ([3] Proposition III a) . On déduit de la proposition II a que le caractère de $\mathcal{E}^+_\varkappa$ est $\varkappa'$. Ce $\mathbf{Q}[G_\varkappa]$-module est donc isomorphe à l'idéal $\mathbf{Q}[G]\, e_{\varkappa'}$ de $\mathbf{Q}[G]$. Celui-ci est isomorphe à $\mathbf{Q}^{(g_\varkappa)}$ ([3] Proposition I a) . Le rang de $|E^+_\varkappa|$, en tant que $\mathbf{Z}$-module, est donc $\varphi(g_\varkappa)$.

4) Groupe des unités d'un corps abélien réel . Soit $K/\mathbf{Q}$ une extension abélienne finie réelle . Les notations G, g, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, E_K , $|E_K|$ ont toujours la même signification .

Définition de E^K et Q_K . Pour tout $\varkappa$ de $\mathfrak{X}$, on pose $E^K_\varkappa = E_K \cap E_\varkappa$. On désignera par E^K le produit $\prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} E^K_{\varkappa'}$ et par Q_K l'indice : $Q_K = [\, E_K : E^K \,]$ (Les notions de « noyau » et module « complet » employées ci-dessous ont été définies en [3] § III) .

Proposition II c . Le groupe $|E^K|$ est égal au produit direct $\prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} |E^K_{\varkappa'}|$. Le $\mathbf{Z}[G]$-module $|E^K|$ est le noyau de $|E_K|$, c'est-à-dire le plus grand sous-$\mathbf{Z}[G]$-module de $|E_K|$ complet . L'indice Q_K est fini et divise g^{g-1}.

démonstration

Si ε appartient à $E^K_{\varkappa'}$, nous aurons alors $|\varepsilon|^{e_{\varkappa'}} = |\varepsilon|$ et $|\varepsilon|^{e_{\psi'}} = 1$ si $\psi' \neq \varkappa'$ (Proposition II a) .
Ceci montre que le produit $\prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} |E^K_{\varkappa'}|$ est direct . Soit maintenant H un sous-module de $|E_K|$ complet . Nous aurons $H^{e_{\varkappa'}} \subset H \subset |E_K|$ et en vertu de la proposition II a , $H^{e_{\varkappa'}} \subset |E_{\varkappa}|$, d'où $H^{e_{\varkappa'}} \subset |E^K_{\varkappa'}|$. En faisant le produit sur les $\varkappa'$ de $\mathfrak{X}'$, nous obtiendrons $H \subset |E^K|$. Ceci montre que tout sous-$\mathbb{Z}[G]$-module complet de $|E_K|$ est contenu dans $|E^K|$. Montrons maintenant que $|E^K|$ est complet . On déduit de la proposition I b que $E^K_{\varkappa}$ est égal à $E_{\varkappa}$ ou $E^+_{\varkappa}$. Ceci montre , d'après la proposition II b, que $|E^K_{\varkappa}|$ est un $\mathbb{Z}[G_{\varkappa}]$-module simple , donc complet ([3] Proposition III c) . Il conserve ces propriétés en tant que $\mathbb{Z}[G]$-module . Finalement, $|E^K|$ sera donc un $\mathbb{Z}[G]$-module complet et c'est donc le noyau de $|E^K|$. Sa dimension sur $\mathbb{Z}$ est g-1 et nous avons vu dans la démonstration de la proposition III b de [3] que $|E_K|^g$ est inclus dans le noyau de $|E_K|$, c'est-à-dire dans $|E^K|$. On en déduit que Q_K divise g^{g-1} . Cette majoration sera améliorée par la proposition suivante .

Définition de l'ordre limite $\mathfrak{L}$ de $\mathbb{Q}[G]$. Nous appellerons ainsi la somme $\mathfrak{L} = \mathbb{Z}[G] + e_1 \mathbb{Z}[G]$, où e_1 désigne l'idempotent de $\mathbb{Q}[G]$ associé au caractère unité de G , c'est-à-dire $e_1 = \frac{1}{g} \sum_{\sigma \in G} \sigma$. C'est un ordre de $\mathbb{Q}[G]$ qui vérifie $\mathbb{Z}[G] \subset \mathfrak{L} \subset \mathcal{O}$. Son discriminant est g^{g-2} . On appellera indice limite et on notera Q_G l'indice $[\mathcal{O} : \mathfrak{L}]$.
Compte-tenu de la valeur du discriminant de $\mathcal{O}$ ([3] , § III) , on a

$$Q_G = \Big(g^{g-2} / \prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} d_{\varkappa'} \Big)^{1/2} ,$$

où $d_{\varkappa'}$ est le discriminant du corps cyclotomique $\mathbb{Q}^{(g_{\varkappa})}$.

Pour toute unité ε de K , on a $|\varepsilon|^{e_1} = 1$. On en déduit que $|E_K|$ est un $\mathfrak{L}$- module .

Leopoldt affirme , dans [2] :

Proposition II d . L'indice Q_K divise l'indice limite Q_G .

Définition de E^{K_+} et Q_K^+ . Nous poserons $E^{K_+} = \prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} E^+_{\varkappa'}$.

On a $E^{K_+} \subset E^K$. On désigne par Q_K^+ l'indice $Q_K^+ = [E_K : E^{K_+}]$.

Proposition II e . Le groupe $|E^{K_+}|$ est égal au produit direct $\prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} |E^+_{\varkappa'}|$. Le $\mathbb{Z}[G]$-module $|E^{K_+}|$ est complet et contenu dans le noyau $|E^K|$ de $|E_K|$. L'indice Q_K^+ est de la forme $Q_K^+ = 2^{q_K} Q_K$ avec $q_K \leq \sum_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} q_\varkappa$.

La démonstration ne fait pas intervenir d'autres arguments que ceux employés dans la démonstration de II c .

III

Régulateurs

1) Définitions des $\varkappa$-régulateurs d'unités . Soient, comme précédemment , $K/\mathbb{Q}$ une extension abélienne finie réelle , G son groupe de Galois, E_K le groupe de ses unités . On désigne toujours par $\mathcal{E}_K$ le $\mathbb{Q}[G]$-module déduit de $|E_K|$ par extension de l'anneau des scalaires de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$. Soit α un élément de $\mathcal{E}_K$ et soit $\varkappa$ un caractère de K différent de 1 . Nous poserons $R^K_\varkappa(\alpha) = \prod_{\psi \in \varkappa'} \left(\sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma^{-1}) \operatorname{Log} |\alpha^\sigma| \right)$ et nous appellerons cette quantité le $\varkappa$-régulateur de α dans K . Comme il ne dépend que de $\varkappa'$ et non de $\varkappa$, on le notera aussi $R^K_{\varkappa'}(\alpha)$.

Dans le cas particulier où K serait égal à $K_\varkappa$ nous parlerons seulement de $\varkappa$-régulateur et nous le noterons alors $R_\varkappa(\alpha)$. La proposition suivante relie ces deux notions :

Proposition III a . Le $\varkappa$-régulateur de α dans K dépend uniquement du $\varkappa$-régulateur de $\alpha_{\varkappa'}$ et du degré $[K:K_\varkappa]$. Plus précisément on a la formule $R^K_\varkappa(\alpha) = [K:K_\varkappa]^{\varphi(g_\varkappa)} R_\varkappa(\alpha_{\varkappa'})$.

démonstration

On désigne toujours par $\mathfrak{X}'$ l'ensemble des caractères de G irréductibles sur $\mathbb{Q}$. Nous avons $\alpha = \prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} \alpha_{\varkappa'}$ et on en déduit :

$$\sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma^{-1}) \operatorname{Log} |\alpha^{\sigma}| = \sum_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} \Big(\sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma^{-1}) \operatorname{Log} |\alpha^{\sigma}_{\varkappa'}| \Big)$$

$$= \sum_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} \Big(\sum_{\tau \in \operatorname{Ker} \varkappa} \Big(\sum_{\sigma \bmod \operatorname{Ker} \varkappa} \psi(\sigma^{-1}\tau^{-1}) \operatorname{Log} |\alpha^{\sigma\tau}_{\varkappa'}| \Big)\Big).$$

La dernière somme est effectuée suivant un système de représentants de G modulo Ker $\varkappa$. Puisque τ appartient à Ker $\varkappa$ nous avons $\tau e_{\varkappa'} = e_{\varkappa'}$ et $\alpha^{\sigma\tau}_{\varkappa'} = \alpha^{\sigma}_{\varkappa'}$ d'où l'égalité :

$$\sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma^{-1}) \operatorname{Log} |\alpha^{\sigma}| =$$

$$= \sum_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} \Big(\sum_{\tau \in \operatorname{Ker} \varkappa} \psi(\tau^{-1}) \Big) \Big(\sum_{\sigma \bmod \operatorname{Ker} \varkappa} \psi(\sigma^{-1}) \operatorname{Log} |\alpha^{\sigma}_{\varkappa'}| \Big) .$$

La quantité $\sum_{\tau \in \operatorname{Ker} \varkappa} \psi(\tau^{-1})$ est égale à 0 si Ker $\varkappa$ n'est pas inclus dans Ker ψ. Supposons donc que Ker $\varkappa$ soit inclus dans Ker ψ ; la somme contenue dans la dernière parenthèse peut se décomposer de la façon suivante :

$$\sum_{\tau \bmod \operatorname{Ker} \psi} \Big(\sum_{\sigma \equiv \tau\, (\operatorname{Ker} \varkappa)} \psi(\sigma^{-1}) \operatorname{Log} |\alpha^{\sigma}_{\varkappa'}| \Big) =$$

$$= \sum_{\tau \bmod \operatorname{Ker} \psi} \psi(\tau^{-1}) \sum_{\sigma \equiv \tau\, (\operatorname{Ker} \varkappa)} \operatorname{Log} |\alpha^{\sigma}_{\varkappa'}| .$$

La dernière somme peut s'écrire comme le logarithme du produit $\prod_{\sigma \equiv \tau\, (\operatorname{Ker} \varkappa)} \alpha^{\sigma}_{\varkappa'}$. Mais $\alpha_{\varkappa'}$ appartient à $\mathcal{E}_{K_\varkappa}$ et ce produit est égal à $\prod \alpha^{\sigma}_{\varkappa'}$, σ parcourant Gal$(K_\varkappa / k_\psi)$. Si $\varkappa' \neq \psi'$, alors Ker $\varkappa \neq$ Ker ψ et $K_\varkappa \neq K_\psi$. Par un calcul analogue à celui qui est développé dans la réciproque de la proposition II a, on montrerait que ce produit vaut 1.
Il reste donc :

$$\sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma^{-1}) \operatorname{Log} |\alpha^{\sigma}| = [K:K_{\psi}] \sum_{\sigma \bmod \operatorname{Ker} \psi} \psi(\sigma^{-1}) \operatorname{Log} |\alpha_{\psi}^{\sigma}|$$

$$= [K:K_{\psi}] \sum_{\sigma \in G_{\psi}} \psi(\sigma^{-1}) \operatorname{Log} |\alpha_{\psi}^{\sigma}| \quad ,$$

en désignant par G_{ψ} le groupe de Galois de $K_{\psi}/\mathbb{Q}$. En effectuant le produit sur les caractères Γ-conjugués de ψ , on obtient le résultat annoncé.

Remarque III a . Il est montré également dans [2] , que $R_{\varkappa}(\alpha_{\varkappa'})$ est nul si et seulement si $\alpha_{\varkappa'} = 1$.

2) $\varkappa$-régulateur d'un groupe d'unités . Soient $\varkappa$ un caractère résiduel pair , différent de 1 et ε un élément de $\mathcal{E}_{\varkappa}$.
Soit $\langle \varepsilon \rangle$ le groupe engendré par ε et ses conjugués . Si $G_{\varkappa}$ désigne le groupe de Galois de $K_{\varkappa}/\mathbb{Q}$, $\langle \varepsilon \rangle$ est donc le $\mathbb{Z}[G_{\varkappa}]$-module engendré par ε .

Remarque III b . Si ε est différent de 1 , alors $\langle \varepsilon \rangle$ est un $\mathbb{Z}[G_{\varkappa}]$-module simple de caractère $\varkappa'$. En tant que $\mathbb{Z}$-module , il est libre de rang $\varphi(g_{\varkappa})$. En particulier , si ε est une $\varkappa$-unité différente de ± 1 , l'indice $[E_{\varkappa} : \langle \varepsilon \rangle]$ est fini .

En effet , $\langle \varepsilon \rangle$ est un $\mathbb{Z}$-module sans torsion et de type fini , donc libre . Si l'on étend l'anneau des scalaires à $\mathbb{Q}$, nous obtenons $\langle \varepsilon \rangle^{\mathbb{Q}}$ qui est inclus dans $\mathcal{E}_{\varkappa}$. Or ce $\mathbb{Q}[G_{\varkappa}]$-module est simple (Proposition II b). Nous aurons donc $\langle \varepsilon \rangle^{\mathbb{Q}} = \mathcal{E}_{\varkappa}$.

Soit maintenant ε_1 un élément de $\langle \varepsilon \rangle$. (Il est entendu que ε et ε_1 sont différents de 1) . Il existe u dans $\mathbb{Z}[G_{\varkappa}]$ tel que $\varepsilon_1 = \varepsilon^u$. Rappelons que dans la démonstration de la proposition I a de [3] , nous avions étendu $\varkappa$ à $\mathbb{Q}[G]$. L'homomorphisme obtenu , que l'on note encore $\varkappa$, a pour noyau $\bigoplus_{\psi' \neq \varkappa'} \mathbb{Q}[G_{\varkappa}] e_{\psi'}$ et réalise un isomorphisme entre $\mathbb{Q}[G_{\varkappa}] e_{\varkappa'}$ et $\mathbb{Q}^{(g_{\varkappa})}$. Le symbole $\varkappa(u)$ représente donc un élément de $\mathbb{Q}^{(g_{\varkappa})}$. De plus , $\mathbb{Z}[G_{\varkappa}] e_{\varkappa'}$ correspond dans l'isomorphisme ci-dessus à l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}^{(g_{\varkappa})}$. Ceci montre que $\varkappa(u)$ est un entier de $\mathbb{Q}^{(g_{\varkappa})}$. Nous poserons :

$N_\varkappa(u) = N_{\mathbb{Q}^{(g_\varkappa)}/\mathbb{Q}}(\varkappa(u))$. (Si l'on remplace $\varkappa$ par un caractère Γ - conjugué , $\varkappa(u)$ est remplacé par un conjugué et $N_\varkappa(u)$ n'a pas changé. Cette quantité ne dépend donc que de $\varkappa'$ et peut donc être notée $N_{\varkappa'}(u)$). Nous avons :

$$\sum_{\sigma \in G_\varkappa} \varkappa(\sigma^{-1}) \operatorname{Log} |\varepsilon^{u\sigma}| = \varkappa(u) \sum_{\sigma \in G_\varkappa} \varkappa(\sigma^{-1}) \operatorname{Log} |\varepsilon^{\sigma}|$$

d'où l'on déduit $R_\varkappa(\varepsilon^u) = N_\varkappa(u)\, R_\varkappa(\varepsilon)$.

D'autre part l'indice $[\langle\varepsilon\rangle : \langle\varepsilon_1\rangle]$ est le déterminant de l'application $x \to x^u$ de $\mathcal{E}_\varkappa$ dans $\mathcal{E}_\varkappa$. Comme $\mathcal{E}_\varkappa$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[G_\varkappa]\, e_{\varkappa'}$, en tant que $\mathbb{Q}[G_\varkappa]$-module , l'indice considéré est égal au déterminant de l'endomorphisme : $y \to yu$ de $\mathbb{Q}[G_\varkappa]\, e_{\varkappa'}$. La matrice de cette application se diagonalise dans $\mathbb{C}$. Elle est semblable à la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \psi(u) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} ,$$

où ψ parcourt la Γ-classe de $\varkappa$. Le déterminant de cet endomorphisme est donc $N_\varkappa(u)$. Nous avons démontré :

<u>Proposition III b</u> . Soit $\varkappa$ un caractère pair . Soient ε un élément de $\mathcal{E}_\varkappa$ et $\langle\varepsilon\rangle$ le sous-groupe de $\mathcal{E}_\varkappa$ engendré par les conjugués de ε . Soit u un élément de $\mathbb{Z}[G_\varkappa]$; la quantité ε^u est donc un élément de $\langle\varepsilon\rangle$. Si ε et ε^u diffèrent de 1 , les groupes $\langle\varepsilon\rangle$ et $\langle\varepsilon^u\rangle$ sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de rang $\varphi(g_\varkappa)$ et nous avons les égalités :

$$[\langle\varepsilon\rangle : \langle\varepsilon^u\rangle] = R_\varkappa(\varepsilon^u) / R_\varkappa(\varepsilon) = N_\varkappa(u) ,$$

où $N_\varkappa(u)$ désigne la norme dans $\mathbb{Q}^{(g_\varkappa)}/\mathbb{Q}$ de $\varkappa(u)$.

Désignons par H un $\mathbb{Z}[G_\varkappa]$-module , de type fini en tant que $\mathbb{Z}$-module et contenu dans $\mathcal{E}_\varkappa$. Nous pouvons faire au sujet de H la même remarque que celle qui fut faite pour $\langle\varepsilon\rangle$: Si H n'est pas réduit à 1 , H est un $\mathbb{Z}[G_\varkappa]$-module simple . En tant que $\mathbb{Z}$-module il est donc libre de rang $\varphi(g_\varkappa)$. Il est entendu que désormais H est supposé différent de 1.

Si ε appartient à H et diffère de 1 , désignons par $\mathfrak{h}$ l'idéal de $\mathbb{Q}[G_\varkappa]\, e_{\varkappa'}$ dont l'inverse est défini par

$$\mathfrak{h}^{-1} = \{v \;;\; v \in \mathbb{Q}[G_\varkappa]\, e_{\varkappa'} ,\; \varepsilon^v \in H\} .$$

Désignons également par $N_\varkappa(\mathfrak{h})$ la quantité $N_{\mathbb{Q}(g_\varkappa)/\mathbb{Q}}(\varkappa(\mathfrak{h}))$.

Proposition III c . L'idéal $\mathfrak{h}$ ainsi défini est entier . Sa classe ne dépend pas du choix de ε dans H . Elle est égale à la classe principale si et seulement si H est engendré par les conjugués d'un de ses éléments (autrement dit si H est un $\mathbb{Z}[G_\varkappa]$-module monogène) . La quantité $R_\varkappa(\varepsilon)/N_\varkappa(\mathfrak{h})$ est indépendante du choix de ε dans H .

démonstration

$\mathbb{Z}[G_\varkappa]\, e_{\varkappa'}$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}[G_\varkappa]\, e_{\varkappa'}$. Puisque ε appartient à H , $\mathbb{Z}[G_\varkappa]\, e_{\varkappa'}$ est donc inclus dans $\mathfrak{h}^{-1}$; ceci montre que $\mathfrak{h}$ est entier . Soit ε_1 un autre élément de H , différent de 1 . Puisque $\mathcal{E}_\varkappa$ est un $\mathbb{Q}[G_\varkappa]$-module simple (Proposition IIb) il existe v dans $\mathbb{Q}[G_\varkappa]$ tel que $\varepsilon_1 = \varepsilon^v$. On peut supposer que v appartient à $\mathbb{Z}[G_\varkappa]$. (Si cela n'est pas , on peut toujours s'y ramener puisqu'il existe ε_2 tel que $\varepsilon_2 = \varepsilon^u = \varepsilon_1^{u_1}$ avec u et u_1 dans $\mathbb{Z}[G_\varkappa]$) . Soit $\mathfrak{h}_1$ l'idéal défini comme $\mathfrak{h}$ à partir de ε_1 . Nous avons $\mathfrak{h}_1 = u\,\mathfrak{h} = u\, e_{\varkappa'}\,\mathfrak{h}$. On en déduit que $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_1$ sont dans la même classe . D'autre part on déduit de la proposition IIIb l'égalité :

$$R_\varkappa(\varepsilon) / N_\varkappa(\mathfrak{h}) = R_\varkappa(\varepsilon_1) / N_\varkappa(\mathfrak{h}_1) \ .$$

Supposons que H soit engendré par les conjugués de ε . On a donc $H = \langle\varepsilon\rangle$. Remarquons que , puisque $\mathcal{E}_\varkappa$ est un $\mathbb{Q}[G_\varkappa]\, e_{\varkappa'}$-espace vectoriel , la condition $\varepsilon^v = \varepsilon^w$ avec v et w dans $\mathbb{Q}[G_\varkappa]\, e_{\varkappa'}$, implique $v = w$. Si donc v appartient à $\mathbb{Q}[G_\varkappa]\, e_{\varkappa'}$ et si ε^v appartient à $\langle\varepsilon\rangle$, alors on aura $\varepsilon^v = \varepsilon^{w e_{\varkappa'}}$ avec w dans $\mathbb{Z}[G_\varkappa]\, e_{\varkappa'}$. L'idéal $\mathfrak{h}$ sera donc égal à $\mathbb{Z}[G_\varkappa]\, e_{\varkappa'}$. Réciproquement , supposons que $\mathfrak{h}$ soit engendré par un élément de la forme $u\, e_{\varkappa'}$ avec u dans $\mathbb{Z}[G_\varkappa]$, on peut alors vérifier que H est engendré par les conjugués de $\varepsilon^{(u\, e_{\varkappa'})^{-1}}$.

Définition du $\varkappa$-régulateur de H . On posera $R_\varkappa(H) = R_\varkappa(\varepsilon)/N_\varkappa(\mathfrak{h})$ et on appellera cette quantité le $\varkappa$-régulateur de H . Pour un sous-groupe de $\mathcal{E}_\varkappa$ réduit à 1 on posera $R_\varkappa(1) = 0$.

Remarque III c . Si H est engendré par les conjugués de ε , on a alors $R_{\varkappa}(H) = R_{\varkappa}(\varepsilon)$.

En effet , nous avons vu au cours de la démonstration précédente , que , dans ce cas , l'idéal $\mathfrak{h}$ était égal à $\mathbb{Z}[G_{\varkappa}]e_{\varkappa'}$.

Proposition III d . Si H_1 est un sous-$\mathbb{Z}[G_{\varkappa}]$-module de H , on a alors :

$$[H:H_1] = R_{\varkappa}(H_1)/R_{\varkappa}(H) \quad .$$

démonstration

Soit ε un élément de H_1 différent de 1 . Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_1$ les idéaux de $\mathbb{Q}[G_{\varkappa}]e_{\varkappa'}$ définis par :

$$\mathfrak{h}^{-1} = \{u \ ; \ \varepsilon^u \in H\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}_1^{-1} = \{u \ ; \ \varepsilon^u \in H_1\} \quad .$$

Considérons l'application $u \to \varepsilon^u$ de $\mathfrak{h}^{-1}$ dans H . Comme H est un $\mathbb{Z}[G_{\varkappa}]$-module simple , cet homomorphisme est surjectif . Il applique $\mathfrak{h}_1^{-1}$ sur H_1. En factorisant nous obtenons $[H:H_1] = [\mathfrak{h}^{-1} : \mathfrak{h}_1^{-1}] = [\mathfrak{h}_1 : \mathfrak{h}]$. D'autre part , les idéaux $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_1$ sont entiers . Nous avons donc

$$[\mathfrak{h}_1 : \mathfrak{h}] = N_{\varkappa}(\mathfrak{h})/N_{\varkappa}(\mathfrak{h}_1) = R_{\varkappa}(H_1)/R_{\varkappa}(H) \quad .$$

Soit maintenant $K/\mathbb{Q}$ une extension abélienne finie réelle . Les notations G, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ ont toujours la même signification . Soit $\varkappa$ un caractère de K . Soit H un sous-groupe de $\mathcal{E}_K$, de type fini en tant que $\mathbb{Z}$-module .

Définition du $\varkappa$-régulateur de H dans K . Posons $H_{\varkappa'} = H^{e_{\varkappa'}}$; il est donc inclus dans $\mathcal{E}_{\varkappa}$. Supposons que $H_{\varkappa'} \neq 1$ et soit ε un élément de H tel que $\varepsilon_{\varkappa'} \neq 1$. Désignons par $\mathfrak{h}$ l'idéal de $\mathbb{Q}[G]e_{\varkappa'}$ ainsi défini :

$$\mathfrak{h}^{-1} = \{u \ ; \ u \in \mathbb{Q}[G]e_{\varkappa'} \ ; \ \varepsilon_{\varkappa'}^u \in H_{\varkappa'}\} \quad .$$

De même qu'à la proposition III c , le rapport $R_{\varkappa}^K(\varepsilon)/N_{\varkappa}(\mathfrak{h})$ est indépendant de ε ; nous l'appellerons le $\varkappa$-régulateur de H dans K et le noterons $R_{\varkappa}^K(H)$. Si $H_{\varkappa'} = 1$, on posera $R_{\varkappa}^K(H) = 0$.

Proposition III e . Le $\varkappa$-régulateur de H dans K est lié au $\varkappa$-régulateur de $H_{\varkappa'}$ par la formule :

$$R_{\varkappa}^K(H) = [K:K_{\varkappa}]^{\varphi(g_{\varkappa})} R_{\varkappa}(H_{\varkappa'}) \quad .$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition III a .

3) Décomposition du régulateur . Désignons toujours par $K/\mathbb{Q}$ une extension abélienne finie réelle , G son groupe de Galois , g son degré . Notons les éléments de G de la façon suivante : $G = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_g\}$. Soient d'autre part $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{g-1}$ des unités de K et H le sous-groupe engendré par celles-ci .
Le régulateur de H est la valeur absolue de l'un quelconque des mineurs d'ordre g-1 de la matrice $\left(\operatorname{Log} |\varepsilon_i^{\sigma_j}|\right)_{\substack{1 \le i \le g-1 \\ 1 \le j \le g}}$. On le notera $R_K(H)$.
Rappelons que : $R_K(H)$ est différent de 0 si et seulement si $|\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_{g-1}|$ sont linéairement indépendantes . Si H_1 est un sous-groupe de H et si tous deux sont engendrés par g-1 unités linéairement indépendantes, alors on a l'égalité :

$$[H : H_1] = R_K(H_1) / R_K(H) .$$

Supposons désormais que H est un sous-$\mathbb{Z}$-[G]-module de $|E_K|$, complet . Posons $H_{\varkappa'} = H^{e_{\varkappa'}}$ pour tout $\varkappa'$ de $\mathfrak{X}'$.
Puisque la norme d'une unité de K est ± 1 , la composante H_1 de H relative au caractère unité est réduite à 1 . Nous aurons donc

$$H = \prod_{\varkappa \in \mathfrak{X}', \varkappa' \neq 1} H_{\varkappa'} .$$

Proposition III f . Si H est un sous-$\mathbb{Z}[G]$-module de $|E_K|$ complet, son régulateur se décompose de la façon suivante :

$$g\, Q_G\, R_K(H) = \prod R^K_{\varkappa'}(H) ;$$

ce produit étant étendu aux caractères irréductibles rationnels $\varkappa'$ de G , différents du caractère unité .

démonstration

Si l'une des composantes $H_{\varkappa'}$ pour $\varkappa' \neq 1$ est réduite à 1 , alors H ne peut avoir pour rang g-1 . Les deux membres de l'égalité à démontrer sont donc nuls . Nous supposerons désormais que $H_{\varkappa'}$ est différent de 1 pour tout $\varkappa' \neq 1$.

Démontrons l'égalité d'abord dans le cas où il existe une unité ε de H telle que pour tout $\varkappa' \neq 1$, $H_{\varkappa'}$ soit engendré par les conjugués de $\varepsilon_{\varkappa'}$; c'est-à-dire $H_{\varkappa'} = \langle \varepsilon_{\varkappa'} \rangle$. Utilisons le lemme I c .

On peut remplacer la première ligne de la matrice de $\mathring{u}$ par la somme de toutes les lignes . Chaque terme de cette première ligne sera alors égal à $\sum_{\sigma \in G} u_\sigma = \operatorname{Det} \mathring{u}_1$. En simplifiant par cette quantité nous obtenons

$$\operatorname{Det} M = \prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}', \varkappa' \neq 1} \; \prod_{\psi \in \varkappa'} \; \sum_{\sigma \in G} \psi(u_\sigma) u_\sigma$$

où M désigne la matrice obtenue à partir de la matrice de $\mathring{u}$ en remplaçant chaque terme de la première ligne par 1 . Posons maintenant $u_\sigma = \operatorname{Log} |\varepsilon^\sigma|$ et développons M par rapport à la première ligne . On a alors :

$\det M = g\, R_K(H_o)$, où H_o désigne le sous-groupe de H engendré par les conjugués de ε . D'autre part on reconnaît dans $\prod_{\psi \in \varkappa'} \sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma) u_\sigma$ le $\varkappa'$-régulateur de ε dans K , c'est-àdire le $\varkappa'$-régulateur de H dans K (Remarque III c) . Nous avons donc

$$g\, R_K(H_o) = \prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}', \varkappa' \neq 1} R^K_{\varkappa'}(H) \quad .$$

Considérons maintenant l'application de $\mathfrak{O}$ dans H qui associe ε^u à u ($\mathfrak{O}$ est défini en [3] § III) .
Comme H est complet et que $H_{\varkappa'}$ est simple , il s'agit d'une application surjective . Elle a pour noyau $\mathbb{Z}\, e_1$; e_1 désignant l'idempotent de $\mathbb{Q}[G]$ associé au caractère unité . Sa restriction à l'ordre limite $\mathfrak{L}$ (introduit en II 4) a pour image H_o . Nous avons donc :

$$R_K(H_o)/R_K(H) = [H:H_o] = [\mathfrak{O}:\mathfrak{L}] = Q_G \quad .$$

On en déduit l'égalité cherchée :

$$g\, Q_G\, R_K(H) = \prod R^K_{\varkappa'}(H) \quad .$$

Il reste maintenant à supposer que H est un sous-$\mathbb{Z}[G]$-module complet quelconque de $|E_K|$. Soit ε un élément de H et soit I le sous-groupe de H engendré par les conjugués des $\varepsilon_{\varkappa'}$, $\varkappa'$ parcourant $\mathfrak{X}'$. Le $\mathbb{Z}[G]$-module I est complet et vérifie de plus l'hypothèse supplémentaire faite tout à l'heure sur H . Nous avons donc :

$$g\, Q_G\, R_K(I) = \prod R^K_{\varkappa'}(I) \quad .$$

D'autre part nous avons :

$$R_K(I) / R_K(H) = [H:I] = \prod [H_{\varkappa'} / I_{\varkappa'}] \; .$$

Il reste alors à utiliser la proposition III d pour voir que :

$$g\, Q_G\, R_K(H) = \prod R^K_{\varkappa'}(H) \; .$$

4) <u>Système d'équations associé à un groupe abélien</u> . Soient G un groupe abélien , $\mathfrak{X}$ le groupe de ses caractères complexes et $\mathfrak{X}'$ l'ensemble de ses caractères irréductibles sur $\mathbb{Q}$.
Pour tout sous-groupe S de $\mathfrak{X}$ et tout caractère $\varkappa'$ de $\mathfrak{X}'$ posons :

$$\delta_{S\varkappa'} = 0 \quad \text{si} \quad \varkappa \notin S$$
$$\qquad = 1 \quad \text{si} \quad \varkappa \in S \; .$$

Nous appellerons système d'équations associé au groupe G le système d'équations : $\quad \sum\limits_S \delta_{S\varkappa'}\, x_S = 0$, $\varkappa'$ parcourant $\mathfrak{X}'$.

Les sommes ci-dessus sont prises sur l'ensemble des sous-groupes S de $\mathfrak{X}$. Les inconnues x_S sont indexées par les sous-groupes de $\mathfrak{X}$ et il y a Card($\mathfrak{X}'$) équations .

<u>Proposition III g</u> . Les équations du système associé au groupe G sont indépendantes . La dimension de l'espace des solutions est égale au nombre de sous-groupes non cycliques de G . En particulier , le système associé au groupe G admet la solution triviale comme unique solution si et seulement si le groupe G est cyclique .

<u>démonstration</u>

Ecrivons le système associé à G sous la forme

$$\sum_S \delta_{S\varkappa'}\, x_S = \sum_S -\delta_{S\varkappa'}\, x_S \; ,$$

où la somme de gauche est étendue aux sous-groupes cycliques de $\mathfrak{X}$ et où celle de droite est étendue aux sous-groupes non cycliques de $\mathfrak{X}$. Ordonnons les sous-groupes cycliques de $\mathfrak{X}$ par une relation d'ordre total α telle que si $S \,\alpha\, S'$, alors $\mathrm{Card}(S) \leq \mathrm{Card}(S')$. Il y a une bijection triviale entre $\mathfrak{X}'$ et l'ensemble de ces sous-groupes cycliques . Ordonnons $\mathfrak{X}'$ à l'aide de la relation déduite de α par cette bijection , et écri -

vons la matrice $\left(\delta_{S\varkappa'}\right)_{\varkappa'\in\mathfrak{X}' \text{ et } S \text{ cyclique}}$, en respectant cet ordre sur les deux ensembles d'indices. On constate alors que cette matrice est triangulaire avec des termes diagonaux égaux à 1. Le système écrit sous la forme ci-dessus est donc un système de Krammer, d'inconnues principales x_S, S parcourant l'ensemble des sous-groupes cycliques de $\mathfrak{X}$. D'où le résultat annoncé.

Remarque III d. On trouvera dans [2] un calcul explicite des solutions.

5) Relations entre les régulateurs des sous-corps d'un corps abélien réel. On désigne toujours par $K/\mathbb{Q}$ une extension abélienne finie réelle. Les notations G, g, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ ont la même signification. Soient, de plus, L un sous-corps de K, G_L le groupe de Galois de l'extension $L/\mathbb{Q}$, g_L son degré, $\mathfrak{X}_L$ son groupe de caractères, $\mathfrak{X}'_L$ l'ensemble des caractères de G_L irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

Appliquons la proposition III f, au corps L et au $\mathbb{Z}[G_L]$-module complet E^{L_+} (défini au § II 4). Nous aurons donc :

$$g_L\, Q_{G_L}\, R_L(E^{L_+}) = \prod_{\varkappa'\in\mathfrak{X}'_L,\, \varkappa'\neq 1} R^L_{\varkappa'}(E^{L_+}) \quad .$$

Posons $R_{\varkappa'} = R_{\varkappa'}(E^+_{\varkappa'})$ et utilisons la proposition III e :

$$R^L_{\varkappa'}(E^{L_+}) = (g_L/g_\varkappa)^{\varphi(g_\varkappa)}\, R_{\varkappa'} \quad .$$

Posons encore : $$Q'_{G_L} = g_L\, Q_{G_L} \Big/ \prod_{\varkappa'\in\mathfrak{X}'_L,\, \varkappa'\neq 1} (g_L/g_\varkappa)^{\varphi(g_\varkappa)} \quad .$$

Nous en déduisons :

$$Q'_{G_L}\, R_L(E^{L_+}) = \prod_{\varkappa'\in\mathfrak{X}'_L,\, \varkappa'\neq 1} R_{\varkappa'} \quad .$$

Désignons par R_L le régulateur de L, c'est-à-dire : $R_L = R_L(E_L)$.
Nous pouvons remplacer $R_L(E^{L_+})$ par $Q^+_L\, R_L$. D'autre part introduisons les $\delta_{S\varkappa'}$ définis en III 4. L'égalité précédente peut alors s'écrire

$$Q'_{G_L}\, Q_L^+\, R_L = \prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} R_{\varkappa'}^{\delta_{\mathfrak{X}_L}\varkappa'}$$

(en posant $R_1 = 1$) .

Rappelons que l'application $L \to \mathfrak{X}_L$ réalise une bijection entre les sous-corps L de K et les sous-groupes de $\mathfrak{X}$ ([3] Proposition IV a) . Nous pouvons donc indexer les composantes d'une solution X du système d'équations associé à G par les sous-corps de K . Soit $X = (x_L)$ une telle solution . Nous avons donc :

$$\prod_{L \subset K} \left(Q'_{G_L}\, Q_L^+\, R_L \right)^{x_L} = 1 \ ,$$

ce produit étant étendu à tous les sous-corps de K .

Posons $\gamma(G,X) = \prod_{L \subset K} Q'^{\,x_L}_{G_L}$.

Pour calculer cette constante , nous utiliserons la valeur de l'indice limite Q_{G_L} donnée en II 4 . On a :

$$Q'_{G_L} = g_L^{(g_L+2)/2} \Big/ \prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'_L} (g_L/g_\varkappa)^{\varphi(g_\varkappa)}\, d_{\varkappa'}^{1/2} \ .$$

Lorsqu'on effectue le produit sur les sous-corps L de K , les produits $\prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'_L}$ écrits ci-dessus vont disparaître . Il reste :

$$\gamma(G,X) = \prod_{L \subset K} g_L^{\frac{g_L + 2}{2} x_L} \ .$$

Nous avons démontré :

<u>Proposition III h</u> . Soient $K/\mathbb{Q}$ une extension abélienne réelle , G son groupe de Galois . Soit $X = (x_L)$ une solution du système d'équations associé à G (indexée par les sous-corps L de K) . Il existe entre les régulateurs R_L des sous-corps L de K la relation :

$$\prod_{L \subset K} R_L^{x_L} = \gamma(G,X)^{-1} \prod_{L \subset K} (Q_L^+)^{-x_L} \ .$$

La constante $\gamma(G,X)$ ne dépend que de G et de la solution X . Les produits sont étendus à l'ensemble des sous-corps L de K .

IV

Nombres de classes et unités cyclotomiques .

1) $\varkappa$-unités cyclotomiques . On désigne par $\varkappa$ un caractère résiduel pair différent de 1 et par $f_\varkappa$ son conducteur . Le caractère $\varkappa$ peut donc être considéré comme un homomorphisme de $(\mathbb{Z}/f_\varkappa\mathbb{Z})^*$ dans $\mathbb{C}^*$. Nous noterons $\mathfrak{a}_\varkappa$ un demi-système de représentants modulo $f_\varkappa$ de $\operatorname{Ker}\varkappa$, c'est-à-dire que $\mathfrak{a}_\varkappa$ est un ensemble de nombres entiers tels que :

- $\operatorname{Ker}\varkappa$ est l'ensemble des classes modulo $f_\varkappa$ de $\mathfrak{a}_\varkappa \cup (-\mathfrak{a}_\varkappa)$.
- l'intersection $\mathfrak{a}_\varkappa \cap (-\mathfrak{a}_\varkappa)$ est vide .

Nous désignerons par $a_\varkappa$ le cardinal de $\mathfrak{a}_\varkappa$. Nous avons donc $a_\varkappa = \varphi(f_\varkappa)/2g_\varkappa$. Si m est un entier nous désignerons par ζ_m la racine primitive $m^{\text{ème}}$ de 1 : $e^{2i\pi/m}$.

Posons $$\theta_\varkappa = \prod_{n\in\mathfrak{a}_\varkappa} (\zeta_{2f_\varkappa}^n - \zeta_{2f_\varkappa}^{-n}) .$$

Il est clair que $\theta_\varkappa$ ne dépend pas , au signe près , de $\mathfrak{a}_\varkappa$.
De plus les notions introduites ci-dessus ne dépendent en fait que de $\varkappa'$.

Lemme IV a . La quantité $\theta_\varkappa^2$ appartient à $\operatorname{Ker}\varkappa$. Si le conducteur $f_\varkappa$ de $\varkappa$ est une puissance d'un nombre premier , alors $\theta_\varkappa^2$ engendre l'unique idéal premier ramifié de $K_\varkappa$. Sinon $\theta_\varkappa^2$ est une unité de $K_\varkappa$. Si $\theta'_\varkappa$ est un conjugué de $\theta_\varkappa$, alors $\theta_\varkappa/\theta'_\varkappa$ est une unité de $K_\varkappa$.

démonstration

C'est un exercice de trigonométrie élémentaire que de vérifier l'égalité :

$$-(1-\zeta_{f_\varkappa}^n)(1-\zeta_{f_\varkappa}^{-n}) = (\zeta_{2f_\varkappa}^n - \zeta_{2f_\varkappa}^{-n})^2 .$$ On en déduit :

$$\theta_\varkappa^2 = (-1)^{a_\varkappa} N_{\mathbb{Q}^{(f_\varkappa)}/K_\varkappa} (1-\zeta_{f_\varkappa}) .$$ Désignons par Φ_n le $n^{\text{ème}}$ polynome cyclotomique . Si p est premier , on a $\Phi_{p^\alpha}(1) = p$ et si n n'est pas premier , on a $\Phi_n(1) = 1$. On en déduit que $1-\zeta_{f_\varkappa}$ est un générateur de l'unique idéal premier ramifié de $\mathbb{Q}^{(f_\varkappa)}$ ou une unité de $\mathbb{Q}^{(f_\varkappa)}$ selon que $f_\varkappa$ soit une puissance d'un nombre premier ou non . La norme de $1-\zeta_{f_\varkappa}$

vérifiera donc une propriété analogue dans $K_\varkappa$. Dans les deux cas , $\theta_\varkappa/\theta'_\varkappa$ sera une unité . De plus , $K(\theta_\varkappa)/\mathbb{Q}$ est abélienne . On a donc $K_\varkappa(\theta_\varkappa) = K_\varkappa(\theta'_\varkappa)$ et on en déduit que $\theta_\varkappa/\theta'_\varkappa$ appartient à $K_\varkappa$.

Remarque IV a . Leopoldt montre aussi les résultats suivants :
Si il existe deux caractères $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$, pairs , différents de 1 , de conducteurs premiers entre eux et tels que $\varkappa = \varkappa_1\varkappa_2$, alors $\theta_\varkappa$ appartient à $K_\varkappa$. Si par contre le conducteur de $\varkappa$ est une puissance d'un nombre premier , alors $\theta_\varkappa$ n'appartient pas à $K_\varkappa$. Si enfin , $\varkappa$ ne vérifie ni l'une, ni l'autre des conditions énoncées ci-dessus , alors les deux éventualités peuvent se produire .

Remarque IV b . De plus , $\theta_\varkappa^2$ engendre $K_\varkappa$. La justification de cette propriété sera donnée plus loin (Remarque IV d) .

Soit $g_\varkappa$ l'ordre de $\varkappa$ et $G_\varkappa$ le groupe de Galois de $K_\varkappa/\mathbb{Q}$. Désignons par $\sigma_\varkappa$ un générateur de $G_\varkappa$ et $\overline{\sigma}_\varkappa$ un prolongement de $\sigma_\varkappa$ à $K_\varkappa(\theta_\varkappa)$. Nous poserons :

$$D_\varkappa = \prod_{\ell | g_\varkappa} (1 - \sigma_\varkappa^{g_\varkappa/\ell}) \quad \text{et} \quad \overline{D}_\varkappa = \prod_{\ell | g_\varkappa} (1 - \overline{\sigma}_\varkappa^{g_\varkappa/\ell}) ,$$

ces produits étant étendus aux nombres premiers divisant $g_\varkappa$.

Proposition IV a . La quantité $\gamma_\varkappa = \theta_\varkappa^{\overline{D}_\varkappa}$ est une $\varkappa$-unité propre .

démonstration

En vertu du lemme précédent , $\gamma_\varkappa$ est une unité de $K_\varkappa$.
D'autre part $\theta_\varkappa^2$ appartient à $K_\varkappa$.
Nous avons donc $\gamma_\varkappa^2 = \theta_\varkappa^{2\overline{D}_\varkappa} = \theta_\varkappa^{2D_\varkappa}$. Pour appliquer la proposition II a , il suffit donc de vérifier que $D_\varkappa e_{\varkappa'} = D_\varkappa$. Désignons par $\mathfrak{X}'$ l'ensemble des caractères irréductibles sur $\mathbb{Q}$ de $G_\varkappa$. Nous avons $1 = \sum_{\varkappa' \in \mathfrak{X}'} e_{\varkappa'}$ et il suffit de vérifier que $D_\varkappa e_\psi = 0$ pour tout caractère ψ de $G_\varkappa$ tel que $\psi' \neq \varkappa'$. Considérons $\varkappa$ et ψ comme des homomorphismes de $G_\varkappa$ dans $\mathbb{C}^*$. Le premier est injectif et la condition $\psi' \neq \varkappa'$ équivaut donc à $\operatorname{Ker}\psi \neq 1$. Si cette condition est vérifiée , il existera un nombre premier ℓ divisant $|\operatorname{Ker}\psi|$ et $\sigma_\varkappa^{g_\varkappa/\ell}$ appartiendra à $\operatorname{Ker}\psi$; d'où

$\sigma_{\varkappa}^{g_{\varkappa}/\ell} \, e_{\psi} = e_{\psi}$ et $D_{\varkappa} \, e_{\psi} = 0$.

Définition . Nous désignerons par $H_{\varkappa}$ le sous-groupe de $E_{\varkappa}^{+}$ engendré par -1 et les conjugués de $\gamma_{\varkappa}$. Nous appellerons ses éléments des $\varkappa$-unités cyclotomiques .

Remarque IV c . Posons $\tau = \sigma_{\varkappa}^{g_{\varkappa}/\ell}$. En utilisant l'identité $(1-\tau)(1+\tau+\ldots+\tau^{n-1}) = 1-\tau^{n}$, on vérifie que $H_{\varkappa}$ ne dépend pas du choix de $\sigma_{\varkappa}$. D'autre part , $H_{\varkappa}$ ne dépend que de la Γ-classe de $\varkappa$. Nous écrirons indifféremment $H_{\varkappa}$ ou $H_{\varkappa'}$.

2) Unités cyclotomiques de K et interprétation du nombre de classes de K . On conserve les notations habituelles : G , g , $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$.

Posons $\quad H_K = \prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}', \varkappa' \neq 1} H_{\varkappa'}$. Nous appellerons unités cyclotomiques de K les éléments de H_K . Nous avons $|H_K| = \prod_{\varkappa' \in \mathfrak{X}', \varkappa' \neq 1} |H_{\varkappa'}|$ et ce produit est direct . Comme $|E_{\varkappa}^{+}|$ est un $\mathbb{Z}[G]$-module simple (Proposition II b) , $|H_{\varkappa}|$ sera lui aussi simple ou réduit à 1 . (En fait , il n'est pas réduit à 1 . Remarque IV d) . Il s'en suit , ([3] Proposition III c) que $|H_K|$ est un $\mathbb{Z}[G]$-module complet . La $\varkappa'$-composante de H_K est $H_{\varkappa'}$, c'est-à-dire : $H_{\varkappa'} = H_K^{e_{\varkappa'}}$.

Proposition IV b . L'indice du groupe des unités cyclotomiques dans le groupe des unités de K est égal au produit du nombre de classes d'idéaux de K par l'indice limite de G .
C'est-à-dire : $h_K \, Q_G = [\, E_K : H_K \,]$.

démonstration

Nous utiliserons la formule analytique donnant le nombre de classes de K ([1] § II 16) .

$$h_K = \Big(\prod_{\varkappa \in \mathfrak{X}, \varkappa \neq 1} \; \sum_{\sigma \bmod \operatorname{Ker} \varkappa} \varkappa(\sigma^{-1}) \operatorname{Log} |\theta_{\varkappa}^{\sigma}| \Big) / R_K$$

la somme est étendue à un système de représentants de G mod. Ker $\varkappa$.