THEORIE DES NOMBRES

- Besançon -

Année 1976-77

ETUDE DU O-MODULE $O \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K$ POUR UNE EXTENSION $K/\mathbb{Q}$ ABELIENNE DE GROUPE G, AVEC O ORDRE MAXIMAL DE $\mathbb{Q}[G]$, O_K ANNEAU ENTIERS DE K.

Danièle CHATELAIN

Faculté des Sciences. Mathématiques

ERA. CNRS N°070654

25 030 BESANCON Cedex

Etude du O-module $O\otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K$ pour une extension $K/\mathbb{Q}$ abélienne de groupe G, avec O ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$, O_K anneau des entiers de K.

---

par Danièle CHATELAIN

Introduction.- Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne, O_K l'anneau des entiers de K, $G = \mathrm{gal}(K/\mathbb{Q})$. Pour étudier les propriétés entières et galoisiennes de O_K, il est naturel de le considérer comme module par rapport à un sous-anneau de $\mathbb{Q}[G]$ contenant G et entier sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire par rapport à un ordre de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}[G]$ contenant $\mathbb{Z}[G]$.

O_K a une structure naturelle de A-module pour tout anneau A contenu dans $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{Q}[G] \ / \ \lambda . O_K \subset O_K\}$. On montre que Λ est un ordre de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}[G]$ contenant $\mathbb{Z}[G]$. C'est par définition l'ordre associé à O_K. Pour les structures de $\mathbb{Z}[G]$ ou de Λ-module de O_K, on a les principaux résultats suivants :

$K/\mathbb{Q}$ modérément ramifiée $\Leftrightarrow$ O_K est $\mathbb{Z}[G]$ projectif $\Leftrightarrow$ $\Lambda = \mathbb{Z}[G]$ (cf [M], [J])

$K/\mathbb{Q}$ abélienne $\Rightarrow$ O_K est Λ-libre (cf [L])

Il est intéressant également, de considérer le O-module $O\otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K$ associé à O_K, lorsque O est un ordre maximal de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}[G]$, à cause des théorèmes de structures des modules de type fini sur un ordre maximal. Tout O-module de type fini M s'écrit $M = P \oplus T$, où P est un O-module projectif de type fini et T un sous O-module égal à la $\mathbb{Z}$-torsion ("O-torsion" par définition).

Ici on a : $O\otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K \simeq O.\, O_K \oplus T$

où T est un groupe fini dont l'ordre n'est divisible que par les idéaux premiers sauvagement ramifiés dans $K/\mathbb{Q}$ (cf. [C-1]) et $O.O_K$ est O-projectif.

On peut penser ("conjecture de Martinet") que l'image de $O\otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K$ dans le groupe de Grothendieck $G_o(O)$ des O-modules de type fini est l'élément neutre.

La conjecture est vraie lorsque K est modérément ramifiée (cf. [F]) et alors $T=0$, ou lorsque G est un p-groupe (cf. [C-2]) ou un groupe non abélien d'ordre $p.q$ (cf. [C-1]).

Dans le cas où G est abélien, $O.O_K$ est O-libre. On vérifie dans cet exposé que l'image de T dans $G_o(O)$ est également l'élément neutre : la conjecture est donc vraie pour les extensions abéliennes de $\mathbb{Q}$.

Remarque. Soient $O_{\bar{\chi}}$ les ordres maximaux des facteurs simples de $\mathbb{Q}[G]$. On a : $O\otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K = \bigoplus_{\bar{\chi}} (O_{\bar{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K)$ et $G_o(O) \simeq \bigoplus_{\bar{\chi}} G_o(O_{\bar{\chi}})$.
L'image de $O\otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K$ dans $G_o(O)$ est la somme des images de $O_{\bar{\chi}}\otimes O_K$ dans $G_o(O_{\bar{\chi}})$. On se ramène donc à l'étude des $O_{\bar{\chi}}$-modules $O_{\bar{\chi}}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K$.

I. Rappels sur la structure de O_K et les caractères de ramification lorsque $K/\mathbb{Q}$ est abélienne ([L]).

1°) Notations : Soit P l'ensemble des nombres premiers ramifiés dans K et soit $f = \prod_{p\in P} p^{r_p}$ le conducteur de K ($r_p \geq 1$).

Soit $G^1(p)$ le premier groupe de ramification de p dans K (pour $p \in P$) et $\Omega/\mathbb{Q}$ la sous extension modérément ramifiée maximale de $K/\mathbb{Q}$. On pose $H = \mathrm{gal}(K/\Omega)$. On a : $H = \prod_p G^1(p)$.

Pour $p\neq 2$, $G^1(p)$ est cyclique d'ordre p^{r_p-1}.

Pour $p=2$, $G^1(2)$ a deux structures possibles ce qui conduit à distinguer deux types de corps abéliens.

Si $G^2(2)$ est le deuxième groupe de ramification (en notation supérieure), $G^2(2)$ est toujours cyclique, d'ordre 2^{r_2-2} si f est pair, (et d'ordre 1 si f est impair).

Définition du type des corps abéliens.

On dit que K est de type I si f est multiple de 4 et si $G^1(2) \neq G^2(2)$. Alors le corps des genres de K contient $\mathbb{Q}(i)$ et $G^1(2) = \langle \sigma_0 \rangle$. $G^2(2)$ est de type $(2, 2^{r_2-2})$. Le groupe H est non cyclique sauf si $r_2 = 2$.

On dit que K est de type II si $G^1(2) = G^2(2)$. Alors le corps des genres de K ne contient pas $\mathbb{Q}(i)$. Si f est pair, il est alors multiple de 8 et $G^1(2) = G^2(2)$ est cyclique d'ordre 2^{r_2-2}. Le groupe H est cyclique.

Remarque.

Soit χ un caractère complexe irréductible de $G = \mathrm{gal}(K/\mathbb{Q})$. Soit K_χ le corps fixe de $\mathrm{Ker}\,\chi$. L'extension $K_\chi/\mathbb{Q}$ étant cyclique, le corps K_χ est toujours de type II sauf dans le cas où la 2-composante $F_\chi^{(2)}$ du conducteur f_χ de χ vaut 4.

2. Caractères rationnels irréductibles de G et ordre maximal O.

Soit χ un caractère complexe irréductible de G. La somme des caractères conjugués de χ est un caractère rationnel irréductible de G, noté $\bar{\chi}$. On dira que $\bar{\chi}$ est au-dessus de χ ou que χ est sous $\bar{\chi}$. On a $\mathrm{Ker}\,\bar{\chi} = \ker \chi$. Si $K_{\bar{\chi}}$ est le corps fixe de $\mathrm{Ker}\,\bar{\chi}$, on pose $g_{\bar{\chi}} = [K_{\bar{\chi}} : \mathbb{Q}]$. On note $1_{\bar{\chi}}$ l'idempotent de $\mathbb{Q}[G]$ associé à $\bar{\chi}$ ($1_{\bar{\chi}} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \bar{\chi}(\sigma^{-1})\sigma$)

G étant abélien, il y a un seul ordre maximal de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}[G]$ qui est

$O = \bigoplus_{\overline{\chi}} \mathbb{Z}[G]1_{\overline{\chi}}$. On pose $O_{\overline{\chi}} = \mathbb{Z}[G]\,1_{\overline{\chi}}$; c'est l'ordre maximal du facteur simple $\mathbb{Q}[G]1_{\overline{\chi}}$.

A chaque caractère complexe χ sous $\overline{\chi}$, on peut associer l'isomorphisme φ_χ de $\mathbb{Q}[G]\,1_{\overline{\chi}}$ dans $\mathbb{Q}^{(g_{\overline{\chi}})}$ défini par

$$\varphi_\chi\Big(\sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma \sigma\Big) = \sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma\, \chi(\sigma)$$

(qui vérifie $\varphi_\chi(1_{\overline{\chi}}) = 1$).

Par l'un quelconque de ces isomorphismes $O_{\overline{\chi}}$ est isomorphe à l'anneau de Dedekind $\mathbb{Z}^{(g_{\overline{\chi}})}$ et le groupe de Grothendieck $G_o(O_{\overline{\chi}})$ est isomorphe au groupe des classes d'idéaux de $\mathbb{Z}^{(g_{\overline{\chi}})}$.

3. Caractères de ramification et ordre Λ associé à O_K.

On a $\Lambda = \bigoplus_{\Phi} \mathbb{Z}[G]\,1_\Phi$, où 1_Φ est l'idempotent de $\mathbb{Q}[G]$ associé au caractère de ramification Φ de K. Rappelons comment ces caractères sont définis.

Classes de caractères semblables. On dit que 2 caractères (complexes irréductibles) χ et χ' de G sont semblables si leurs conducteurs ont même facteurs multiples.

Soient Ω_χ et $\Omega_{\chi'}$ les sous extensions modérées maximales de K_χ et de $K_{\chi'}$, il est équivalent de dire que les extensions K_χ/Ω_χ et $K_{\chi'}/\Omega_{\chi'}$ sont isomorphes et que K_χ et $K_{\chi'}$ sont de même type.

Définition des caractères de ramification.

Un caractère de ramification Φ de K est la somme des caractères d'une même classe de caractères semblables.

Il est clair que deux caractères conjugués sont semblables et donc que Φ est somme de caractères rationnels $\overline{\chi}$ de G (on dira que Φ est au dessus de $\overline{\chi}$ ou que $\overline{\chi}$ est sous Φ).

Détermination des caractères de ramification par leurs noyaux et idempotents associés.

Proposition.- On note K_Φ le corps fixe du noyau $\mathrm{Ker}\,\Phi$ de Φ.

(i) On suppose K de type I. On pose $H^* = G^2(2) \times \prod_{p \neq 2} G^1(p)$ et on note Ω^* le corps fixe de H^* (H^* est cyclique). On distingue deux sortes de caractères de ramification :

a) Les caractères de ramification définis à partir des caractères χ tels que $8 \not| f_\chi$ sont dits de 1ère espèce . Ce sont les caractères induits par les caractères rationnels irréductibles ψ de H dont le noyau contient $G^2(2)$. On a $\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathrm{Ker}\,\psi$, $1_\Phi = 1_\psi$ et $K_\Phi / \Omega \approx K_\chi / \Omega_\chi$.

Si $f_\chi^{(2)} = 4$, K_Φ est compris entre le corps fixe de $G^2(2)$ et Ω^*.

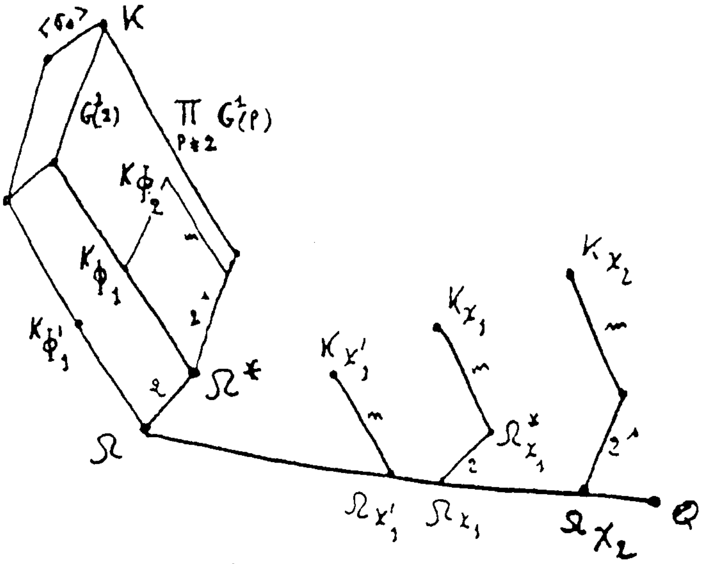
Si $f_\chi^{(2)} = 1$, K_Φ est compris entre le corps fixe de $G^1(2)$ et Ω.

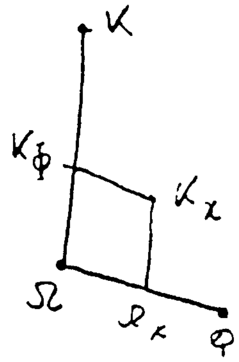
b) Les caractères de ramification définis à partir des caractères χ tels que $8 / f_\chi$ sont dits de 2ème espèce. Ce sont les caractères induits par les caractères rationnels irréductibles ψ de H^* dont le noyau ne contient pas $G^2(2)$. On a $\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathrm{Ker}\,\psi$, $1_\Phi = 1_\psi$ et $K_\Phi / \Omega^* \approx K_\chi / \Omega_\chi$.

(ii) On suppose K de type II. Les caractères de ramification Φ de G sont induits par les caractères rationnels irréductibles ψ de H. On a $\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathrm{Ker}\,\psi$, $1_\Phi = 1_\psi$ et $K_\Phi / \Omega \approx K_\chi / \Omega_\chi$.

.../...

K <u>de type</u> I K <u>de type</u> II





$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1 = \sum\limits_{\chi_1 \in cl\, \chi_1} \\ \Phi'_1 = \sum \chi'_1\end{array}\right\}\ \text{1ère espèce} \qquad \Phi_2 = \sum_{\chi_2 \in cl\, \chi_2} \chi_2 \ :\ \text{2ème espèce}$$

4. <u>Hauptsatz de Leopoldt:</u>

(i) L'ordre Λ associé à O_K est $\Lambda = \bigoplus_{\Phi} \mathbb{Z}[\sigma]\, 1_\Phi$, où Φ décrit l'ensemble des caractères de ramification de K.

(ii) On pose pour tout caractère de ramification Φ de K ,

$$T_{K,\Phi} = \frac{1}{[K_\Phi : \Omega]} \left(\sum_{\chi \in \Phi} \mu\left(\frac{f_\Phi}{f_\chi}\right) \chi\left(\frac{f_\Phi}{f_\chi}\right) \mathcal{Z}(\chi) \right)$$

où χ est le caractère résiduel de K, identifié au caractère χ de G, $\mathcal{Z}(\chi)$ est la somme de Gauss normée primitive relative à χ , f_Φ le conducteur de K_Φ (égal au PPCM des conducteurs f_χ des caractères χ dont Φ est la somme), μ la fonction de Möbius.

$T_{K,\Phi}$ est un entier de K_Φ , corps fixe de Ker Φ .

On pose $T_K = \sum_{\Phi} T_{K,\Phi}$

T_K est un entier de K tel que $O_K = \Lambda . T_K$

et on a $T_K . 1_{\Phi} = T_{K,\Phi} \in K_{\Phi}$ et $O_K = \bigoplus_{\Phi} \mathbb{Z}[G] T_{K,\Phi}$

Remarque.

O_K est somme directe des $\mathbb{Z}[G]$ modules monogènes $\mathbb{Z}[G]T_{K,\Phi}$ qui ont la propriété d'être indécomposables.

Expression d'une $\mathbb{Z}$ base de $\mathbb{Z}[G] . T_{K,\Phi}$

Soit Φ un caractère de ramification de G, on note :

$$\Omega_{\Phi} = \begin{cases} \Omega^* & \text{si } K \text{ est de type I et } \Phi \text{ de 2ème espèce} \\ \Omega & \text{sinon} \end{cases}$$

et $h_{\Phi} = [K_{\Phi} : \Omega_{\Phi}]$

On note s_{Φ} un élément de gal (K / Ω_{Φ}) dont la restriction à K_{Φ} engendre gal $(K_{\Phi} / \Omega_{\Phi})$ et T un système de représentants dans G de gal (Ω_{Φ} / Ω).

Alors $\mathbb{Z}[G]T_{K,\Phi}$ admet pour $\mathbb{Z}$-base

$$\{ T_{K,\Phi}^{t.s_{\Phi}^{i}} \ ; \ t \in T \ , \ 0 \leq i < \varphi(h_{\Phi}) \}$$

II. Décomposition du $\mathbb{Z}^{(g_{\overline{X}})}$-module $O_{\overline{X}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K$

Méthode.

D'après le théorème de Leopoldt on a

$$O_{\overline{X}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K = \bigoplus_{\Phi} O_{\overline{X}} \otimes \mathbb{Z}[G] T_{K,\Phi}$$

Le module $O_{\overline{X}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G]T_{K,\Phi}$ est $\mathbb{Z}[G]$ monogène, engendré par $1_{\overline{X}} \otimes T_{K,\Phi}$.

Soit χ un caractère complexe de G sous $\bar{\chi}$ et ψ_χ l'homomorphisme de $\mathbb{Z}[G]$ sur $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$ associé ; ($\psi_\chi(\Sigma\lambda_\sigma \sigma) = \sum_{\sigma\in G} \lambda_\sigma \chi(\sigma)$, sa restriction φ_χ à $O_{\bar{\chi}}$ est un isomorphisme).

On a les isomorphismes :

$$O_{\bar{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G].T_{K,\Phi} \approx \frac{\mathbb{Z}[G]}{\mathrm{Ker}\psi_\chi} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G].T_{K,\Phi} \approx \frac{\mathbb{Z}[G]}{\mathrm{Ker}\psi_\chi + I_\Phi} \approx \frac{\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}}{\psi_\chi(I_\Phi)}$$

avec $I_\Phi = \{\lambda \in \mathbb{Z}[G] \ / \ \lambda . T_{K,\Phi} = 0\}$

Ces isomorphismes concernent les structures de modules sur $\mathbb{Z}[G]$, ou sur $O_{\bar{\chi}} \approx \mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$.

On va donc calculer I_Φ et $J_{\chi,\Phi} = \psi_\chi(I_\Phi)$ et vérifier que ce dernier idéal est un idéal principal de $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$, (indépendant du choix de χ sous $\bar{\chi}$).

<u>Lemme</u> 1.

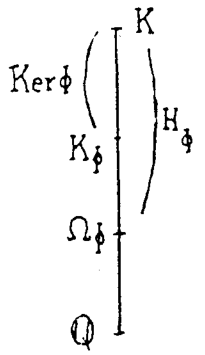
Les notations sont celles du §I.4 .

(i) L'annulateur I_Φ de $T_{K,\Phi}$ dans $\mathbb{Z}[G]$ est l'idéal de $\mathbb{Z}[G]$ engendré par les éléments $\zeta-1$ pour $\zeta \in \mathrm{Ker}\,\Phi$ et par l'élément $P_{h_\Phi}(s_\Phi)$ (où $P_{h_\Phi}(X)$ est le h_Φ ième polynôme cyclotomique de $\mathbb{Q}[X]$).

(ii) L'image $J_{\chi,\Phi}$ de I_Φ par l'homomorphisme ψ_χ de $\mathbb{Z}[G]$ dans $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$, associé au caractère χ sous $\bar{\chi}$, est la somme de l'idéal J_1 de $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$ engendré par les éléments $\chi(\zeta)-1$ pour $\zeta \in \mathrm{Ker}\,\Phi$, et de l'idéal J_2 engendré par l'élément $P_{h_\Phi}(\chi(s_\Phi))$.

.../...

Démonstration.



Rappelons que Φ est le caractère de G induit par un caractère rationnel irréductible ψ de $H_\Phi = \mathrm{gal}(K/\Omega_\Phi)$ (avec $\Omega_\Phi = \Omega$ ou Ω^* selon l'espèce de Φ) et que $1_\Phi = 1_\psi$, $\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathrm{Ker}\,\psi$.

Si s_Φ est un élément de H_Φ dont la restriction à K_Φ engendre $\mathrm{gal}(K_\Phi/\Omega_\Phi)$, l'élément $1_\Phi s_\Phi$ <u>est une racine primitive $n^{\text{ième}}$</u> de 1 dans le corps $\mathbb{Q}[H_\Phi]1_\Phi$, (isomorphe à $\mathbb{Q}^{(n)}$, avec $n = h_\Phi = [K_\Phi : \Omega_\Phi]$) (propriétés élémentaires des caractères rationnels irréductibles).

Soit P_n le $n^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique (de $\mathbb{Q}[X]$). On a : $P_n(1_\Phi s_\Phi) = 0$ et pour tout $j \in [\varphi(n), n[$, il existe un unique polynôme $P_{n,j}(X) = \sum_{k=0}^{\varphi(n)-1} \lambda_{kj} X^k$, de degré inférieur ou égal à $\varphi(n)-1$, tel que :

$$(1)\quad (1_\Phi s_\Phi)^j = P_{n,j}(1_\Phi s_\Phi) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{kj}(1_\Phi s_\Phi)^k$$

Soit T un système de représentants dans G de $\mathrm{gal}(\Omega_\Phi/\mathbb{Q})$. On calcule $I_\Phi = \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]} T_{k,\Phi}$ en écrivant que l'on a :

$$G = \bigcup_{\substack{t\in T\\ 0\le j<n}} t\,s_\Phi^j \,.\, \mathrm{Ker}\,\Phi$$

et que les éléments $\{T_{K,\Phi}^{\,t.s_\Phi^k}\ ;\ t\in T,\ 0\le k<\varphi(n)\}$ sont $\mathbb{Z}$ indépendants.

Soit $\lambda \in \mathbb{Z}[G]$ tel que $\lambda . T_{K,\Phi} = 0$.

λ s'écrit de manière unique :

$$(2)\quad \lambda = \sum_{\substack{t\in T\\ 0\le j<n\\ \tau\in \mathrm{Ker}\,\Phi}} a_{t.s_\Phi^j.\tau}\ t.s_\Phi^j.\tau \quad \text{avec } a_{t.s_\Phi^j.\tau} \in \mathbb{Z}.$$

En tenant compte du fait que $T_{K,\Phi} \in K_\Phi$, corps fixe de Ker_Φ on a :

$$(3)\quad \lambda \cdot T_{K,\Phi} = \sum_{\substack{t\in T\\ 0\leq j<n\\ \zeta\in \mathrm{Ker}\,\Phi}} a_{t.s_\Phi^j.\zeta}\ t\, s_\Phi^j\, T_{K,\Phi} .$$

On a $\quad T_{K,\Phi} = 1_\Phi T_K = 1_\Phi T_{K,\Phi}$, donc $s_\Phi^j\ T_{K,\Phi} = (1_\Phi s_\Phi)^j\ T_{K,\Phi}$.

En remplaçant dans la somme (3) les termes correspondant à $\varphi(n)\leq j<n$ par leur expression déduite de la relation (1), il vient :

$$\lambda \cdot T_{K,\Phi} = \sum_{\begin{cases} t\in T\\ 0\leq k<n\\ \zeta\in \mathrm{Ker}\,\Phi\end{cases}} \left(a_{t.s_\Phi^k.\zeta} + \sum_{j=\varphi(n)}^{n-1} \lambda_{kj}\ a_{t.s_\Phi^j.\zeta}\right) t.\, s_\Phi^k \cdot T_{K,\Phi} = 0 \ .$$

D'après l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Z}$ des éléments

$\{t\cdot s_\Phi^k \cdot T_{K,\Phi}\ ;\ t\in T\ ;\ 0\leq k<\varphi(n)\}$ on a :

$$\forall t\in T,\ \forall k\in [0,\varphi(n)[,\ \sum_{\zeta\in \mathrm{Ker}\,\Phi} \left(a_{t.s_\Phi^k.\zeta} + \sum_{j=\varphi(n)}^{n-1} \lambda_{kj}\cdot a_{t.s_\Phi^j.\zeta}\right) = 0$$

Soit

$$\forall t\in T,\ \forall k\in [0,\varphi(n)[,\ a_{t.s_\Phi^k} = - \sum_{\zeta\in \mathrm{Ker}\,\Phi -1} a_{t.s_\Phi^k.\zeta} - \sum_{\begin{cases}\zeta\in \mathrm{Ker}\,\Phi\\ j=[\varphi(n),n[\end{cases}} \lambda_{kj}\cdot a_{t.s_\Phi^j.\zeta}$$

En reportant dans la relation (2), on trouve que λ est nécessairement de la forme :

$$\lambda = \sum_{\begin{cases} t\in T\\ k\in [0,\varphi(n)[\\ \zeta\in \mathrm{Ker}\,\Phi -1\end{cases}} a_{t.s_\Phi^k.\zeta}\,(\zeta-1).t.s_\Phi^k + \sum_{\begin{cases} t\in T\\ \zeta\in \mathrm{Ker}\,\Phi\\ \varphi(n)\leq j<n\end{cases}} a_{t.s_\Phi^j.\zeta}\left(t.s_\Phi^j.\zeta - \sum_{0\leq k<\varphi(n)} \lambda_{kj}\, t.s_\Phi^k\right)$$

Le polynôme $P_{nj}(X) - X^j$ s'annule pour $X = 1_\Phi . s_\Phi$, donc est multiple de $P_n(X)$: $P_{n,j}(X) = X^j + Q_j(X) . P_n(X)$

D'où : $$s_\Phi^j \cdot \zeta - \sum_{0\leq k<\varphi(n)} \lambda_{kj} . s_\Phi^k = s_\Phi^j\, \zeta - P_{nj}(s_\Phi) = s_\Phi^j(\zeta -1) - Q_j(s_\Phi)\, P_n(s_\Phi)$$

On en déduit que λ appartient à l'idéal de $\mathbb{Z}[G]$ engendré par les éléments $\zeta - 1$ (pour $\zeta \in \operatorname{Ker}\Phi$) et $P_n(s_\Phi)$.

Inversement, $(\zeta - 1)T_{K,\Phi} = 0$ pour $\zeta \in \operatorname{Ker}\Phi$

$$P_n(s_\Phi)T_{K,\Phi} = P_n(1_\Phi\, s_\Phi)\,T_{K,\Phi} = 0$$

On a donc bien :

$$I_\Phi = \operatorname{Ann}_{\mathbb{Z}[G]} T_{K,\Phi} = (\zeta - 1, P_n(s_\Phi); \zeta \in \operatorname{Ker}\Phi)$$

D'où $\quad J_{\chi,\Phi} = \psi_\chi(I_\Phi) = (\chi(\zeta) - 1, P_n(\chi(s_\Phi)); \zeta \in \operatorname{Ker}\Phi)$

$$J_{\chi,\Phi} = J_1 + J_2 \text{ avec } J_1 = (\chi(\zeta) - 1; \zeta \in \operatorname{Ker}\Phi)\,\mathbb{Z}^{(g_\chi)}$$

$$J_2 = P_{h_\Phi}(\chi(s_\Phi)).\mathbb{Z}^{(g_\chi)}$$

Le lemme suivant permet alors de calculer J_1 et J_2, en généralisant les résultats classiques suivants :

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, ζ_m désigne un élément de $\mathbb{C}$ qui est racine primitive $m^{\text{ième}}$ de 1 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ P_n est le $n^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique de $\mathbb{Q}[X]$.

.Si m est primaire c'est-à-dire $m = p^s$ avec p premier, $s \geq 1$, $\zeta_m - 1$ engendre l'idéal premier de $\mathbb{Z}^{(m)}$ au dessus de p.

.Si m est non primaire, et $m \neq 1$, $\zeta_m - 1$ est une unité de $\mathbb{Z}^{(m)}$ (et pour $m = 1$ $\zeta_m - 1 = 0$).

.$P_n(1) = 1$ si n est non primaire et $n \neq 1$

.$P_1(1) = 0$

.si $n = p^s$ ($s \geq 1$ p premier) $P_n(1) = p$.

Lemme 2.

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, la notation ζ_m désignera un élément de $\mathbb{C}$ qui est racine primitive $m^{\text{ième}}$ de 1. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X)$ le $n^{\text{ième}}$ polynôme cyclotomique de $\mathbb{Q}[X]$.

(i) $P_n(\zeta_m)=0$ si et seulement si $n = m$.

(ii) si $n \neq m$, $P_n(\zeta_m)$ est une unité de $\mathbb{Z}^{(m)}$ sauf dans les cas suivants :

(a) $m = p^s.n$ (p premier, $s \geq 1$) et alors :

$$P_n(\zeta_m).\mathbb{Z}^{(m)} = (\zeta_{p^{s+1}} - 1)^{p-1}.\mathbb{Z}^{(m)} \quad \text{si } p / n$$

$$= (\zeta_{p^s} - 1).\mathbb{Z}^{(m)} \quad \text{si } p \not| n$$

(b) $n = p^s.m$ (p premier, $s \geq 1$) et alors :

$$P_n(\zeta_m).\mathbb{Z}^{(m)} = (p).\mathbb{Z}^{(m)}$$

<u>Démonstration</u>.

(i) évident

(ii) on pose $\begin{cases} m = m'\alpha \\ n = n'\alpha \end{cases}$ avec $(m',n') = 1$ et on a nécessairement $n' \neq m'$

Le polynôme $P_n(X)$ divise $X^n - 1$ et $P_{n'}(X^m)$ (on compare les racines).

Donc $P_n(\zeta_m)$ divise $\zeta_m^n - 1 = \zeta_{m'} - 1$, et $P_{n'}(1)$.

En tenant compte de $n' \neq m'$, $(n',m') = 1$ et des valeurs de $\zeta_{m'} - 1$ et $P_{n'}(1)$ rappelées précédemment, il est clair que les seuls cas où $P_n(\zeta_m)$ n'est pas une unité de $\mathbb{Z}^{(m)}$ sont :

$$\begin{cases} m' = p^s \\ m' = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m' = 1 \\ n' = p^t \end{cases}$$

<u>1er cas</u> : $m' = p^s$ et $n' = 1$, soit $m = p^s n$ ($s \geq 1$ p premier)

On a : $P_n(X) = \prod_{k/n} (X^{n/k} - 1)^{\mu(k)}$ (μ fonction de Möbius)

d'où : $P_n(\zeta_m) = \prod_{k/n} (\zeta_{p^s n}^{n/k} - 1)^{\mu(k)}$ et tous les termes écrits ont bien un sens car $\zeta_{p^s n}^{n/k} - 1 = \zeta_{p^s k} - 1 \neq 0$ car $s \geq 1$.

Dans cette expression de $P_n(\zeta_m)$, les seuls termes qui ne sont pas des unités correspondent à $k = 1$ ou $k = p$; ce dernier cas ne se produit que si p/n.

Donc si $p \nmid n$: $P_n(\zeta_m).\mathbb{Z}^{(m)} = (\zeta_{p^s} - 1).\mathbb{Z}^{(m)}$

$$\text{si } p/n \ : \ P_n(\zeta_m).\mathbb{Z}^{(m)} = \left(\frac{\zeta_{p^s} - 1}{\zeta_{p^{s+1}} - 1}\right).\mathbb{Z}^{(m)} = (\zeta_{p^{s+1}} - 1)^{p-1}.\mathbb{Z}^{(m)}$$

<u>2ième cas</u> : $m' = 1$ et $n' = p^t$; soit $n = p^t.m$ ($t \geq 1$, p premier)

Posons $m = p^s.\alpha$ ($s \geq 0$, $(\alpha, p) = 1$).

$P_n(X)$ divise $P_{p.\alpha}(X^{p^{s+t-1}})$ (on compare les racines).

Mais ces polynômes sont unitaires et ont même degré :

$$\varphi(n) = \varphi(p^{s+t}).\varphi(\alpha) = p^{s+t-1}.\varphi(p).\varphi(\alpha)$$

Ils sont donc égaux et $P_n(\zeta_m) = P_{p.\alpha}(\zeta_{p^s.\alpha}^{p^{s+t-1}}) = P_{p.\alpha}(\zeta_\alpha)$

(on a posé $\zeta_\alpha = \zeta_{p^s.\alpha}^{p^{s+t-1}}$ ...)

$$\text{Or } P_{p.\alpha}(X) = \prod_{k/p.\alpha} (X^{p\alpha/k} - 1)^{\mu(k)} = P_p(X^\alpha) \prod_{\substack{k/\alpha \\ k \neq 1}} (X^{p\alpha/k} - 1)^{\mu(k)}$$

D'où $P_n(\zeta_m) = P_p(1). \prod_{\substack{k/\alpha \\ k \neq 1}} (\zeta_\alpha^{p.\alpha/k} - 1)^{\mu(k)}$: expression qui a un sens car $(\zeta_\alpha^{p.\alpha/k} - 1)$ est non nul pour $k \neq 1$ et $(k, p) = 1$.

<u>Calcul de</u> $J_{\chi,\Phi}$.

On a $J_{\chi,\Phi} = J_1 + J_2$ avec J_1 idéal de $\mathbb{Z}^{(g_{\overline{\chi}})}$ engendré par les éléments $\chi(\mathcal{T}) - 1$ pour $\mathcal{T} \in \operatorname{Ker} \Phi$ et $J_2 = \left(P_{h_\Phi}(\chi(s_\Phi))\right)$ (h_Φ et s_Φ sont définis au § I.4).

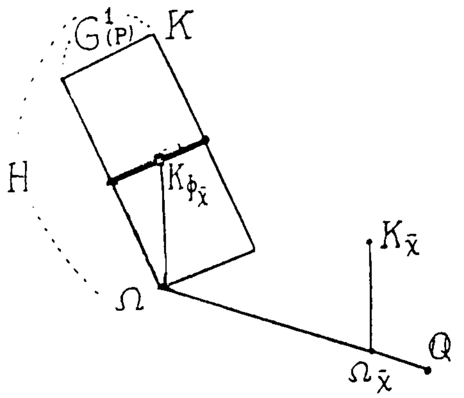
Soit $\Omega_{\overline{\chi}}$ la sous extension modérée maximale de $K_{\overline{\chi}}/\Omega$ (où

$K_{\bar{\chi}}$ est le corps fixe du caractère $\bar{\chi}$). On pose $m = [K_{\bar{\chi}} : \Omega_{\bar{\chi}}]$ et $m = p^{s_p} m_p$ pour p premier divisant m, avec $(m_p, p) = 1$.

On note $\Phi_{\bar{\chi}}$ le caractère de ramification de K au dessus de $\bar{\chi}$. Pour le calcul de $J_{\chi,\Phi}$, on envisage différents cas.

<u>1er cas</u> : K <u>est de type</u> II, <u>ou de type</u> I <u>avec</u> $f^{(2)} = 4$.

Dans ce cas on a toujours $\Omega_\Phi = \Omega$ et $H_\Phi = H$ est cyclique (si K est de type I, il n'a que des caractères de 1ère espèce).



Le trait appuyé correspond aux positions de K_Φ relatives aux caractères Φ tels que $J_{\chi,\Phi} \neq (1)$ et $J_{\chi,\Phi} \subset (p)$.

Soit σ un générateur de H, on peut prendre $s_\Phi = \sigma$ et on a $\operatorname{Ker} \Phi = \langle \sigma^{h_\Phi} \rangle$ $(h_\Phi = [K_\Phi : \Omega])$. <u>Si</u> $[K_{\bar{\chi}} : \Omega_{\bar{\chi}}] = m$, <u>on a</u> $\chi(\sigma) = \zeta_m$ (ζ_m racine primitive $m^{\text{ième}}$ de 1). On a alors :

$J_1 = (\chi(\sigma)^{h_\Phi} - 1) \subset J_2 = (P_{h_\Phi}(\chi(\sigma)))$

D'où $J_{\chi,\Phi} = (P_{h_\Phi}(\zeta_m))$

Soit $\Phi_{\bar{\chi}}$ le caractère de ramification de K au dessus de $\bar{\chi}$. On a $[K_{\Phi_{\bar{\chi}}} : \Omega] = m$. On déduit alors du lemme 2 que les <u>caractères de ramification de</u> K <u>correspondent à un idéal</u> $J_{\chi,\Phi} \neq (1)$ <u>sont les suivants</u> :

(a) Φ tel que $K_\Phi \underset{\neq}{\subset} K_{\Phi_{\bar{\chi}}}$ et $[K_{\Phi_{\bar{\chi}}} : K_\Phi] = p^t$ avec p/m (t varie dans $[1\ s_p]$).

si $1 \leq t < s_p$, $J_{\chi,\Phi} = (\zeta_{p^{t+1}} - 1)^{p-1} \cdot \mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$

si $t = s_p$, $J_{\chi,\Phi} = (\zeta_{p^{s_p}} - 1) . \mathbb{Z}^{(g_\chi)}$

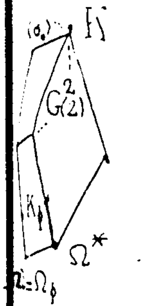
Le produit de ces idéaux est égal à $\prod\limits_{p/m} (\zeta_{p^{s_p}} - 1)^{p^{s_p - 1}} = \prod\limits_{p/m} (\zeta_p - 1)$

(b) $\Phi = \Phi_{\bar{\chi}}$: $J_{\chi,\Phi_{\bar{\chi}}} = (0)$

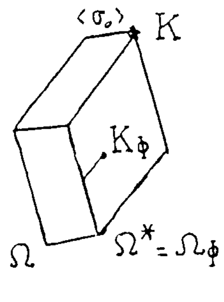
(c) Φ tel que $K_\Phi \underset{\neq}{\supset} K_{\Phi_{\bar{\chi}}}$ et $[K_\Phi : K_{\Phi_{\bar{\chi}}}] = p^t$ avec p sauvagement ramifié dans K ($t \geq 1$ et $t \leq r_p - s_p - \varepsilon_p$ avec $\varepsilon_p = 1$, sauf si $p = 2$ et K de type II, où $\varepsilon_2 = 2$) alors $J_{\chi,\Phi} = p . \mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$.

<u>Le produit de ces idéaux est égal à</u> $[K : K_{\Phi_{\bar{\chi}}}]$.

<u>2ième cas</u> : K <u>est de type</u> I <u>avec</u> $8 / F$.



Φ de 1ère espèce



Φ de 2ème espèce

On pose $H^* = G^2(2) . \prod\limits_{p \neq 2} G'(p) = \langle \sigma \rangle$

on a $H = \langle \sigma_o \rangle . \langle \sigma \rangle$ avec $\sigma_o^2 = 1$.

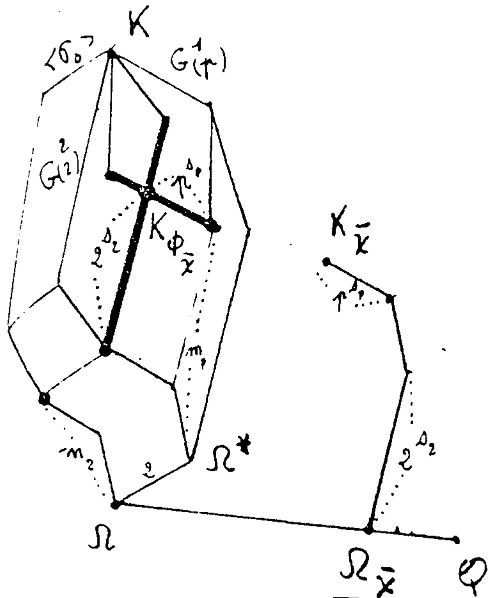
On distingue 3 cas pour les caractères de ramification Φ de K :

(i) Φ de 1ère espèce et $[K_\Phi : \Omega] = h_\Phi$ impair ($\Omega_\Phi = \Omega$ et $H_\Phi = H$), on a alors $\mathrm{Ker}\, \Phi = \langle \sigma_o \rangle \langle \sigma^{h_\Phi} \rangle$ on peut prendre $s_{\Phi} = \sigma$.

(ii) Φ de 1ère espèce et $[K_\Phi : \Omega] = h_\Phi$ pair ($\Omega_\Phi = \Omega, H_\Phi = H$) on pose $h_\Phi = 2h'_\Phi$ (h'_Φ impair) on a $\mathrm{Ker}\, \Phi = \langle \sigma^{h'_\Phi} \rangle$, $s_\Phi = \sigma_o \sigma$.

(iii) Φ de 2ième espèce alors $\Omega_\Phi = \Omega^*$ et $H_\Phi = H^*$ est cyclique, on a $[K_\Phi : \Omega^*] = h_\Phi$ toujours pair, $\mathrm{Ker}\, \Phi = \langle \sigma^{h_\Phi} \rangle$, $s_\Phi = \sigma$; pour Φ de 2ième espèce on quelque soit χ, $J_{\chi,\Phi} = \left(P_{h_\Phi}(\chi(\sigma))\right)$.

Pour achever le calcul de $J_{\chi,\Phi}$ il faut distinguer plusieurs sous-cas selon le type de K_χ et la parité de f_χ. (voir diagrammes).



• Si $8/f_\chi$ (K_χ est de type II) on a $\chi(\sigma_0)=1$ $\chi(\sigma)=\zeta_m$ avec $m=[K_{\bar\chi} : \Omega_{\bar\chi}]$ pair.

Le caractère $\Phi_{\bar\chi}$ de ramification de K au dessus de χ est de 2ième espèce et tel que

$$h_{\Phi_{\bar\chi}} = [K_{\Phi_{\bar\chi}} : \Omega^*] = m \quad ([K_{\Phi_{\bar\chi}} : \Omega] = 2m).$$

— Positions de K_Φ telles que $J_{\chi,\Phi} \neq (1)$ et $J_{\chi,\Phi}$ divise (p) ou (2).

(i) pour Φ de 1ère espèce avec h_Φ impair, on a

$$J_1 = (\zeta_m^{h_\Phi} - 1) \subset J_2 = (P_{h_\Phi}(\zeta_m))$$

donc $J_{\chi,\Phi} = (P_{h_\Phi}(\zeta_m))$. L'idéal $J_{\chi,\Phi}$ est différent de (1) pour $h_\Phi = [K_\Phi : \Omega] = m_2$ avec m_2 tel que $m = 2^{s_2} m_2$ $(2 \nmid m_2)$.

On a alors $J_{\chi,\Phi} = (\zeta_{2^{s_2}} - 1)$ et $K_\Phi \subsetneq K_{\Phi_{\bar\chi}}$ avec $[K_{\Phi_{\bar\chi}} : K_\Phi] = 2^{s_2+1}$

(ii) pour Φ de 1ère espèce avec h_Φ pair ($h_\Phi = 2h'_\Phi$) on a

$$J_1 = (\zeta_m^{h'_\Phi} - 1) \;,\; J_2 = (P_{2h'_\Phi}(\zeta_m))$$

Donc $J_2 \supset (\zeta_m^{h'_\Phi} + 1)$ et $J_1 + J_2 \supset (2)$. Pour avoir $J_{\chi,\Phi} \neq (1)$ il faut que l'on ait $h_\Phi = 2m_2$ et alors $J_{\chi,\Phi} = J_1 = J_2 = (\zeta_{2^{s_2}} - 1)$ et $K_\Phi \subset K_{\Phi_{\bar\chi}}$ avec $[K_{\Phi_{\bar\chi}} : K_\Phi] = 2^{s_2}$.

(iii) pour Φ de 2ième espèce on a $J_{\chi,\Phi} = (P_{h_\Phi}(\zeta_m))$ avec

$h_\Phi = [\, K_\Phi : \Omega^* \,]$. Les caractères de <u>2ième espèce tels que</u> $J_{\chi,\Phi} \neq (1)$ <u>sont les suivants</u> :

(a) Φ tel que $K_\Phi \underset{\neq}{\subset} K_{\Phi_{\bar\chi}}$ et $[\, K_{\Phi_{\bar\chi}} : K_\Phi \,] = p^t$ avec p/m et t variant dans $[\, 1 , s_p - \delta_p \,]$ ($\delta_p = 0$ si p impair, $\delta_2 = 1$)

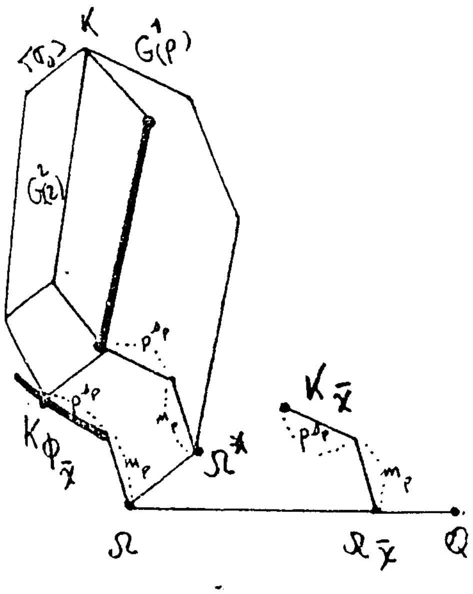
si $1 \leq t < s_p$, $J_{\chi,\Phi} = (\zeta_{p^{t+1}} - 1)^{p-1}$

si $t = s_p$, $J_{\chi,\Phi} = (\zeta_{p^{s_p}} - 1)$

(b) $\Phi = \Phi_{\bar\chi}$: $J_{\chi,\Phi_{\bar\chi}} = (0)$

(c) Φ tel que $K_\Phi \underset{\neq}{\supset} K_{\Phi_{\bar\chi}}$ et $[\, K_\Phi : K_{\Phi_{\bar\chi}} \,] = p^t$ avec p sauvagement ramifié dans K et t variant dans $[\, 1 , r_p - s_p - \epsilon_p \,]$ ($\epsilon_p = 1$ si p impair et $\epsilon_2 = 2$). Alors $J_{\chi,\Phi} = (p)$.

Le produit des idéaux $J_{\chi,\Phi}$ (Φ de 1° ou 2° espèce) tels que $K_\Phi \underset{\neq}{\subset} K_{\Phi_\chi}$ est égal à $\left((\zeta_{2^{s_2}} - 1) \cdot \prod_{p^2 / f_\chi} \zeta - 1 \right)$. Le produit des idéaux $J_{\chi,\Phi}$ tels que $K_\Phi \underset{\neq}{\supset} K_{\Phi_\chi}$ est égal à $[\, K : K_{\Phi_{\bar\chi}} \,]$.



• <u>Si $2 \not| f_\chi$</u> (K_χ est de type I) on a $\chi(\sigma_0) = 1$, $\chi(\sigma) = \zeta_m$ avec $m = [\, K_\chi : \Omega_\chi \,]$ impair.

Le caractère de ramification $\Phi_{\bar\chi}$ de K au dessus de χ est de 1ère espèce avec $[K_{\Phi_{\bar\chi}} : \Omega] = h_{\Phi_{\bar\chi}} = m$.

— Positions de K_Φ tel que $J_{\chi,\Phi} \neq 1$ et $J_{\chi,\Phi}$ divise (p) ou (2).

(i) <u>pour</u> Φ <u>de 1ère espèce avec</u> h_Φ <u>impair</u>, on a :

$$J_1 \subset J_2 = J_{\chi,\Phi} = \left(P_{h_\Phi}(\zeta_m)\right)$$

<u>Les caractères de 1ère espèce avec</u> h_Φ <u>impair tels que</u> $J_{\chi,\Phi} \neq (1)$ <u>sont les suivants</u> :

(a) Φ tel que $K_\Phi \underset{\neq}{\subset} K_{\Phi_{\bar\chi}}$ et $[K_{\Phi_{\bar\chi}} : K_\Phi] = p^t$ avec p/m et t variant dans $[1 \quad s_p]$ (p nécessairement impair)

$1 \leq t < s_p$: $J_{\chi,\Phi} = (\zeta_{p^{t+1}} - 1)^{p-1}$

$t = s_p$: $J_{\chi,\Phi} = (\zeta_{p^{s_p}} - 1)$

(b) $\Phi = \Phi_{\bar\chi}$, $J_{\chi,\Phi_{\bar\chi}} = (0)$

(c) Φ tel que $K_\Phi \underset{\neq}{\supset} K_{\Phi_{\bar\chi}}$ et $[K_\Phi : K_{\Phi_{\bar\chi}}] = p^t$ avec p impair sauvagement ramifié dans K et $t \in [1 \quad r_p - s_p - 1]$ alors $J_{\chi,\Phi} = (p)$.

(ii) <u>pour</u> Φ <u>de 1ère espèce</u>, h_Φ <u>pair</u> ($h_\Phi = 2h'_\Phi$) on a :

$$J_1 = (\zeta_m^{h'_\Phi} - 1) \text{ et } J_2 = (P_{2h'_\Phi}(\zeta_m))$$

d'où $J_{\chi,\Phi} \supset (2)$. <u>Pour avoir</u> $J_{\chi,\Phi} \neq (1)$ <u>il faut</u> $h_\Phi = 2m$ (alors $K_\Phi \supset K_{\Phi_{\bar\chi}}$ <u>avec</u> $[K_\Phi : K_{\Phi_{\bar\chi}}] = 2$) <u>et</u> $J_{\chi,\Phi} = (2)$.

(iii) <u>pour</u> Φ <u>de 2ième espèce</u>, on a :

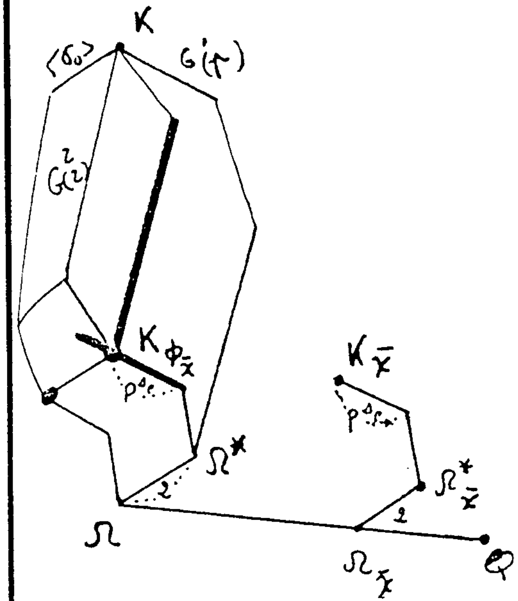
$$J_{\chi,\Phi} = \left(P_{h_\Phi}(\zeta_m)\right) \quad \text{avec } h_\Phi \text{ pair .}$$

<u>Les caractères de 2ième espèce tels que</u> $J_{\chi,\Phi} \neq (1)$ <u>sont tels que</u> $h_\Phi = 2^t m$ ou $K_\Phi \supset K_{\Phi_{\bar\chi}}$ avec $[K_\Phi : K_{\Phi_{\bar\chi}}] = 2^{t+1}$ et $t \in [1 \quad r_2 - 2]$ <u>on a alors</u> $J_{\chi,\Phi} = (2)$.

Le produit des idéaux $J_{\chi,\Phi}$ tels que $K_\Phi \underset{\neq}{\subset} K_{\Phi_{\bar\chi}}$ (Φ nécessairement de 1ère espèce avec h_Φ impair) est $\prod_{p/m} (\zeta_p - 1)$. Le produit des idéaux $J_{\chi,\Phi}$

tels que $K_{\Phi} \underset{\neq}{\supset} K_{\Phi_{\bar{\chi}}}$ (Φ de 1ère ou de 2ième espèce) est encore égal à

$[K : K_{\Phi_{\bar{\chi}}}]$.



• Si $F_{\chi}^{(2)} = 4$, on a :

$\chi(\sigma_o) = -1$, $\chi(\sigma) = m_2$ avec m_2 impair tel que $[K_{\chi} : \Omega_{\chi}] = 2m_2 = m$.

Le caractère de ramification $\Phi_{\bar{\chi}}$ de K au dessus de χ est de 1ère espèce avec $[K_{\Phi_{\bar{\chi}}} : \Omega] = 2m_2 = m$.

— Positions de K_{Φ} telles que $J_{\chi,\Phi} \neq 1$ et divise (p) ou (2).

(i) pour Φ de 1ère espèce et h_{Φ} impair, on a :

$$J_1 = \left(\chi(\sigma)^{h_{\Phi}} - 1 ,\ \chi(\sigma_o) - 1\right)$$

soit $J_1 = (\zeta_{m_2}^{h_{\Phi}} - 1, 2)$ et $J_2 = (P_{h_{\Phi}}(\zeta_{m_2})) \supset (\zeta_{m_2}^{h_{\Phi}} - 1)$

h_{Φ} et m_2 étant impairs, le seul cas où $J_{\chi,\Phi}$ χ différent de (1) est $h_{\Phi} = m_2$ et alors $J_{\chi,\Phi} = J_1 = (2)$ ($\neq J_2$ qui est nul), on a dans ce cas $K_{\Phi} \underset{\neq}{\subset} K_{\Phi_{\bar{\chi}}}$ (avec $[K_{\Phi_{\bar{\chi}}} : K_{\Phi}] = 2$).

(ii) pour Φ de 1ère espèce avec $h_{\Phi} = 2h'_{\Phi}$ on a :

$$J_1 = (\zeta_m^{h'_{\Phi}} - 1) \quad J_2 = (P_{2h'_{\Phi}}(-\zeta_{m_2})) = (P_{2h'_{\Phi}}(\zeta_{2m_2})) \supset (\zeta_{m_2}^{h'_{\Phi}} - 1)$$

donc $J_{\chi,\Phi} = (P_{h_{\Phi}}(\zeta_m))$. Les caractères de 1ère espèce avec h_{Φ} pair tel que $J_{\chi,\Phi} \neq (1)$ sont les suivants :

(a) Φ tel que $K_{\Phi} \underset{\neq}{\subset} K_{\Phi_{\bar{\chi}}}$ et $[K_{\Phi_{\bar{\chi}}} : K_{\Phi}] = p^t$ avec p / m_2

et $t \in [1, P_p]$

si $1 \leq t < s_p$, $J_{\chi,\Phi} = (\zeta_{p^{t+1}} - 1)^{p-1}$

$t = s_p$, $J_{\chi,\Phi} = (\zeta_{p^{s_p}} - 1)$

(b) $\Phi = \Phi_{\overline{\chi}}$ $J_{\chi_{\Phi_{\overline{\chi}}}} = (0)$

(c) Φ tel que $K_\Phi \underset{\neq}{\supset} K_{\Phi_{\overline{\chi}}}$ et $[K_\Phi : K_{\Phi_{\overline{\chi}}}] = p^t$ avec p impair sauvagement ramifié dans K et $t \in [1, r_p - 1 - s_p]$ alors $J_{\chi,\Phi} = (p)$.

(iii) <u>pour</u> Φ <u>de 2ième espèce</u> , on a $J_{\chi,\Phi} = (P_{h_\Phi}(\zeta_{m_2}))$ avec h_Φ pair et m_2 impair. <u>Les caractères de 2ième espèce tels que</u> $J_{\chi,\Phi} \neq (1)$ <u>sont tels que</u> $h_\Phi = 2^t m_2$ <u>avec</u> $t \in [1, r_2 - 2]$ <u>d'où</u> $K_\Phi \underset{\neq}{\supset} K_{\Phi_{\overline{\chi}}}$ <u>avec</u> $[K_\Phi : K_{\Phi_{\overline{\chi}}}] = 2^t$ et $J_{\chi,\Phi} = (2)$.

Le produit des idéaux $J_{\chi,\Phi}$ tels que $K_\Phi \underset{\neq}{\subset} K_{\Phi_{\overline{\chi}}}$ (Φ est de 1ère espèce) est $\prod_{p/m} (\zeta_p - 1)$ et le produit des idéaux $J_{\chi,\Phi}$ tels que $K_\Phi \underset{\neq}{\supset} K_{\Phi_{\overline{\chi}}}$ (Φ de 1° ou 2° espèce) est $[K : K_{\Phi_{\overline{\chi}}}]$.

On peut maintenant énoncer :

<u>Proposition.</u>

(i) L'image de $O_{\overline{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K$ dans le groupe de Grothendieck des $\mathbb{Z}^{(g_{\overline{\chi}})}$ modules de type fini, est l'élément neutre.

(ii) Soit $\Phi_{\overline{\chi}}$ le caractère de ramification de K au dessus de $\overline{\chi}$, soit $K_{\Phi_{\overline{\chi}}}$ le corps fixe de $\mathrm{Ker}\, \Phi_{\overline{\chi}}$; on peut écrire :

$$O_{\overline{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K = O_{\overline{\chi}} \cdot O_K \oplus \mathcal{T}_{\overline{\chi}} \oplus \mathcal{T}_{K/K_{\Phi_{\overline{\chi}}}} \quad , \text{ avec :}$$

(a) $$\mathcal{T}_{\bar{\chi}} = \bigoplus_{\substack{\Phi \text{ tel que} \\ \operatorname{Ker}\Phi \underset{\neq}{\supset} \operatorname{Ker}\Phi_{\bar{\chi}}}} O_{\bar{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G].T_{K,\Phi}$$

Le $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$-module $\mathcal{T}_{\bar{\chi}}$ peut s'interpréter comme la torsion de $O_{\bar{\chi}} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathrm{gal}(K_{\Phi_{\bar{\chi}}}/\mathbb{Q})]} O_{K_{\Phi_{\bar{\chi}}}}$ (où $O_{K_{\Phi_{\bar{\chi}}}}$ est l'anneau des entiers de $K_{\Phi_{\bar{\chi}}}$).

(b) $$\mathcal{T}_{K/K_{\Phi_{\bar{\chi}}}} = \bigoplus_{\substack{\Phi \text{ tel que} \\ \operatorname{Ker}\Phi \underset{\neq}{\subset} \operatorname{Ker}\Phi_{\bar{\chi}}}} O_{\bar{\chi}} \otimes \mathbb{Z}[G].T_{K,\Phi}$$

L'idéal de $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$ canoniquement associé (par les suites de Jordan Holder) au module de torsion $\mathcal{T}_{K/K_{\Phi_{\bar{\chi}}}}$ est :

$$I_{K/K_{\Phi_{\bar{\chi}}}} = [K : K_{\Phi_{\bar{\chi}}}]\, \mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$$

(c) $$O_{\bar{\chi}}.\, O_K = O_{\bar{\chi}}.\, T_{K,\Phi_{\bar{\chi}}}$$

Si χ est l'un des caractères complexes de G au dessous de $\bar{\chi}$, 1_χ, l'idempotent de $\mathbb{C}[G]$ et $\tau(\chi)$ la somme de Gauss primitive normée associés, l'application $\sigma \to \dfrac{|G|.1_\chi.\sigma}{\tau(\chi)}$ est un $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$ homomorphisme injectif de $O_{\bar{\chi}}.\, O_K$ dans $\mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$ dont l'image est l'idéal $[K : K_{\Phi_{\bar{\chi}}}].\, \mathbb{Z}^{(g_{\bar{\chi}})}$.

D é m o n s t r a t i o n .

Les points a et b résultent de la discussion qui précède

(c) Pour $\sigma \in K$, les éléments $y_K(\chi/\sigma) = \dfrac{|G|\, 1_\chi \sigma}{\tau(\chi)}$.

sont les χ-coordonnées définies par Léopoldt ([L]). Les résultats énoncés dans la partie 2.c de la proposition sont une conséquence immédiate des propriétés des χ-coordonnées (et on a $y_K(\chi, T_{K,\Phi_{\bar{\chi}}}) = [K : K_{\Phi_{\bar{\chi}}}].\, \varepsilon$, avec ε unité de $\mathbb{Z}^{(g_{\bar\chi})}$).

Le fait que les images canoniques dans $\mathbb{Z}^{(g_{\bar\chi})}$ de $O_{\bar\chi}.O_K$ et de la partie $\mathcal{T}_{K/K_{\Phi_{\bar\chi}}}$ de la torsion de $O_{\bar\chi} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K$ se correspondent est à rapprocher du résultat analogue concernant les extensions non abéliennes de degré p.q, pour le caractère $\bar\chi$ correspondant au facteur simple $\mathbb{Q}^{(q)}$ de $\mathbb{Q}[G]$ (voir [C-1]).

Remarques.

Le fait que $O_{\bar\chi} \otimes_{\mathbb{Z}[\mathrm{gal}\, K_{\Phi_{\bar\chi}}/\mathbb{Q}]} O_{K_{\Phi_{\bar\chi}}}$ soit facteur direct de $O_{\bar\chi} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K$ apparait ici comme une conséquence du calcul des idéaux $J_{\chi,\Phi}$ mais peut se démontrer directement.

- L'extension $K_{\Phi_{\bar\chi}}$ est telle que $(K_{\Phi_{\bar\chi}}/K_{\bar\chi})$ soit la sous extension modérée maxiamle de $K/K_{\bar\chi}$, sauf dans le cas où K est de type I avec $8/f_\chi$, auquel cas $K_{\Phi_{\bar\chi}}/K_{\bar\chi}$ est non modérée en 2. Dans le premier cas l'idéal $J_{\bar\chi}$ associé au module de torsion $\mathcal{T}_{\bar\chi}$ est $I_{\bar\chi} = \prod_{p^2/f_\chi} (\zeta_p - 1)$. Dans le deuxième cas, on a $I_{\bar\chi} = (\zeta_{2^{s_2}} - 1) . \prod_{p^2/f_\chi} (\zeta_p - 1)$ (avec s_2 tel que $f_\chi^{(2)} = 2^{s_2+2}$, $s_2 \geq 1$).

BIBLIOGRAPHIE

[C-1] Cougnard J. Séminaire de Besançon (octobre 76).

[C-2] Cougnard J. Propriétés galoisiennes des anneaux d'entiers des p-extensions. Composition mathematika. Vol 33, fasc. 3 (1976), p. 303-336.

[F] Fröhlich A. Arithmetic and Galois module structure for tame extensions. J. de Crelle. Vol 286/287, (1976), p. 380-440.

[J] Jacobinski H. Uber die Hauptordnung eines Körpers als Gruppenmodul. J. reine angew. Math. 213 (1963), p. 151-149.

[L] Léopoldt H.W Uber die Hauptordnung des ganzen Elementen eines abelschen Zahlkörpers. J. de Crelle 201 (1959), p. 119-149.

[M] Martinet J. Sur l'arithmétique des extensions galoisiennes à groupe de Galois diédral d'ordre 2p. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 19 (1969), p. 1-80.