THEORIE DES NOMBRES

- Besançon -

Année 1976-77

EXEMPLE D'ANNULATEUR NON PRINCIPAL D'UN GROUPE DE χ-CLASSES RELATIVES

Georges GRAS

Faculté des Sciences. Mathématiques

ERA.CNRS N° 070654

25030 Besançon Cedex

Exemple d'annulateur non principal

d'un groupe de χ-classes relatives

---

par Georges GRAS

Introduction.- Nous utilisons les notations et les résultats de [2] .

On rappelle que l'interprétation du théorème de Stickelberger ([2], Th. II 5) est que pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^-$, le $\mathbb{Z}^{(g_\chi)}$-module $\mathbb{H}_\chi$ est annulé par l'idéal $B_1(\chi'^{-1})(\chi'(a) - a, \Lambda_\chi)$ de $\mathbb{Z}^{(g_\chi)}(\chi'|\chi)$; ici a est choisi de telle sorte que $\left(\frac{K_\chi}{a}\right)$ engendre G_χ et on sait aussi que l'idéal

$(\chi'(a) - a, \Lambda_\chi)$ est presque toujours l'idéal unité . Par conséquent, lorsque c'est le cas, $(B_1(\chi'^{-1}))$ annule $\mathbb{H}_\chi$; ceci ne veut pas dire que l'annulateur de $\mathbb{H}_\chi$ soit l'idéal principal $(B_1(\chi'^{-1}))$; cependant, pour trouver un cas où l'annulateur de $\mathbb{H}_\chi$ soit non principal,il semble qu'il soit plus facile de se placer dans un cas où l'idéal $(\chi'(a) - a, \Lambda_\chi)$ n'est pas l'idéal unité .

Nous nous proposons de construire un tel exemple .

Etude de $\mathbb{Q}^{(47)}$. Prenons $\ell = 47$ et $K_\chi = \mathbb{Q}^{(\ell)}$; on a alors $g_\chi = 46$ et on sait que $\mathbb{Z}^{(g_\chi)} = \mathbb{Z}^{(46)} = \mathbb{Z}^{(23)}$ est non principal .

On a le schéma suivant (où $K_\psi = \mathbb{Q}(\sqrt{-47})$ et où $\mathbb{Q}_+^{(47)}$ est le sous-corps réel maximal de $\mathbb{Q}^{(47)}$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}_+^{(47)} \arrow[r, dash, "2"] \arrow[d, dash, "23"'] & \mathbb{Q}^{(47)} = K_\chi \arrow[d, dash, "23"] \\
\mathbb{Q} \arrow[r, dash, "2"] & \mathbb{Q}(\sqrt{-47}) = K_\psi
\end{tikzcd}$$

On vérifie sur une table ([1] par exemple) que $|\mathbb{H}_\psi| = 5$ et que $|\mathbb{H}(K_\chi)^-| = 5.\ 139$. D'après la proposition II 2 de [2] , on a

$|\mathbb{H}_\chi||\mathbb{H}_\psi| = |\mathbb{H}(K_\chi)^-|$, d'où $|\mathbb{H}_\chi| = 139$. On a donc

$\mathbb{H}_\chi \simeq \mathbb{Z}^{(23)}/\mathfrak{p}_{139}$, où $\mathfrak{p}_{139}$ est un idéal premier au-dessus de 139 dans $\mathbb{Z}^{(23)}$.

Considérons l'idéal $(\chi'(a) - a, \Lambda_\chi)$: on a $\Lambda_\chi = 47$ (cf. [2], Prop. II 5) et $(\chi'(a) - a, \Lambda_\chi) = \mathfrak{p}_{47}$ (idéal premier au-dessus de 47 dans $\mathbb{Q}^{(23)}$) . Si maintenant on utilise le théorème II 2 de [2] , on obtient $|\mathbb{H}_\chi| = 2^{\alpha_\chi} w_\chi \prod_{\chi'|\chi}(\frac{1}{2}B_1(\chi'^{-1}))$; or ici $\alpha_\chi = 0$, $w_\chi = 47$,

d'où $47 \prod_{\chi'|\chi} \frac{1}{2} B_1(\chi'^{-1})) = 139$. Il résulte de tout ceci (et notamment du fait que le nombre de classes de $\mathbb{Q}^{(47)}$ est impair) que $(\frac{1}{2} B_1(\chi'^{-1}))\mathfrak{p}_{47}$ est l'annulateur de $\mathbb{H}_\chi$: en effet, c'est un idéal entier de norme 139 (c'est $\mathfrak{p}_{139}$) .

Montrons maintenant que l'idéal $\mathfrak{p}_{139}$ est non principal . En vertu de la relation $(\frac{1}{2} B_1(\chi'^{-1}))\,\mathfrak{p}_{47} = \mathfrak{p}_{139}$, il suffit de prouver que $\mathfrak{p}_{47}$ est non principal dans $\mathbb{Q}^{(23)}$. On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Q}_+^{(23)} & \overset{2}{\text{———}} & \mathbb{Q}^{(23)} & & \mathfrak{p}_{47} \\
11 \Big| & & \Big| 11 & & \\
\mathbb{Q} & \text{———} & \mathbb{Q}(\sqrt{-23}) & & \mathcal{P}_{47}
\end{array}$$

On remarque que la non principalité de $\mathbb{Q}^{(23)}$ provient de celle de $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$. Soit $\mathcal{P}_{47}$ l'idéal premier au-dessous de $\mathfrak{p}_{47}$ dans $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$; 47 étant totalement décomposé dans $\mathbb{Q}^{(23)}$, si $\mathfrak{p}_{47}$ était principal dans $\mathbb{Q}^{(23)}$, il en résulterait que $N_{\mathbb{Q}^{(23)}/\mathbb{Q}(\sqrt{-23})}\,\mathfrak{p}_{47} = \mathcal{P}_{47}$ serait aussi principal ; or ceci n'est pas comme on peut le vérifier élémentairement :

En effet, si on suppose $\mathcal{P}_{47} = (\alpha)$, $\alpha = \dfrac{x + y\sqrt{-23}}{2}$, $x,y \in \mathbb{Z}$ de même parité , on est conduit à résoudre l'équation $x^2 + 23\,y^2 = 4.47$ qui est manifestement impossible .

En résumé :

Proposition :

Soit χ le caractère rationnel impair pour lequel $K_\chi = \mathbb{Q}^{(47)}$ et soit $\mathbb{H}_\chi = \{ h \in \mathbb{H}(\mathbb{Q}^{(47)}),\ P_\chi(\sigma_\chi) h = 1 \} = \{ h \in \mathbb{H}(\mathbb{Q}^{(47)}),\ N_{\mathbb{Q}^{(47)}/\mathbb{Q}_+^{(47)}} h = N_{\mathbb{Q}^{(47)}/\mathbb{Q}(\sqrt{-47})} h = 1 \}$. Alors l'annulateur de $\mathbb{H}_\chi$ (en tant que $\mathbb{Z}^{(23)}$- module) est un idéal premier non principal (de norme 139) .

Références

[1] Borevitch et Chafarevitch , Théorie des Nombres, Gauthier-Villars , Paris (1967) .

[2] Gras (G.) , Application de la notion de φ-objet à l'étude du groupe des classes d'idéaux des extensions abéliennes , Publ. Math. de l'Université de Besançon (théorie des Nombres) , 1975-76 , Fasc. 2 .