

PAVEMENTS EQUILIBRES DU PLAN

Robert BANTEGNIE

PAVEMENTS EQUILIBRES DU PLAN

27 pages et 10 figures.

0 - INTRODUCTION

Dans ce qui suit, on étudie certains pavements de \mathbb{R}^2 par des isométries de disques topologiques appelés tuiles appartenant à une famille \mathfrak{R} en général finie. Au §2 on rappelle la notion de cycle d'une tuile ou d'un sommet du pavement. On définit la notion de "cycle". On introduit la notion d'équilibrage (strict ou non) sur les tuiles et sur les sommets d'un tel pavement. On rappelle la notion de contribution d'Euler-Lebesgue d'une tuile ou d'un sommet ce qui permet de considérer les pavements faiblement équilibrés. On montre qu'il y a une hiérarchie entre les diverses notions d'équilibrage et au §3 comment une notion de dualité permet de passer des pavements équilibrés sur les tuiles aux pavements équilibrés sur les sommets et inversement. Les pavements isohédraux resp. isogonaux sont strictement équilibrés sur les tuiles resp. sur les sommets. On sait que dans ces derniers cas, seuls sont possibles les 11 cycles de Laves auxquels correspondent 10 "cycles". Le §4 montre que 11 "cycles" sont effectivement possibles pour les pavements faiblement équilibrés et les 10 "cycles" précédents pour les pavements équilibrés. On a étudié aussi au §5 les pavements équilibrés sur les côtés dont les pavements isotoxaux sont des cas particuliers. On trouve 3 "cycles" possibles pour un pavement faiblement équilibré sur les côtés et 5 cycles pour un pavement strictement équilibré. Au §6 on exhibe les exemples nécessaires. Finalement au §7 on étudie les pavements équivalencés. Certains résultats ont été annoncés aux journées d'Oberwolfach "Diskrete Geometrie" (10-16/07/1977).

1 - GENERALITES

Un pavement de \mathbb{R}^2 est une famille $\mathfrak{T} = (T_j)_{j \in J}$ d'ouverts appelés tuiles tels que

(i) T_j est un disque topologique ouvert
(\bar{T}_j est un compact de Jordan appelé tuile fermée) ;

(ii) $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j \in J} \bar{T}_j$;

(iii) pour j distinct de j' dans J , T_j et $T_{j'}$ sont disjoints.

[on a alors $\bar{T}_j \cap \bar{T}_{j'} \subset \text{fr } T_j \cap \text{fr } T_{j'}$ et $\bigcup_{j \in J} T_j$ couvre \mathbb{R}^2 à un ensemble de mesure nulle près].

Si \mathfrak{R} est une famille telle que toute tuile de \mathfrak{T} est isométrique (l'isométrie est notée \cong) à un élément de \mathfrak{R} on dit que \mathfrak{T} provient de \mathfrak{R} .

Pour $\mathfrak{R} = (K_i)_{i \in I}$ on suppose toujours que pour i distinct de i' dans I on a

$$K_i \not\cong K_{i'} ; \text{ alors } \forall j \in J \exists ! i T_j \cong K_i.$$

On dit que le pavement est ordinaire quand quels que soient j, j' dans J

$\bar{T}_j \cap \bar{T}_{j'}$ est connexe (pour $j \neq j'$ ce peut être \emptyset , un singleton ou un arc, appelé côté de \mathfrak{T} , commun à $\text{fr } T_j$ et $\text{fr } T_{j'}$).

On ne considère que des pavements ordinaires.

On suppose en général vérifiée la condition

(*) Les tuiles de \mathfrak{R} sont uniformément bornées et telles que leurs cercles inscrits ont un rayon borné inférieurement par un nombre strictement positif.

[(*) évidemment vérifiée quand \mathfrak{R} fini contient h éléments (on dit alors que \mathfrak{T} est h -morphique) sert notamment à appliquer la formule polyédrale d'Euler valable dans ce cas (cf. [2], [4]) ; elle entraîne aussi que quand J est infini il est dénombrable].

On appelle sommet s de \mathfrak{T} tout point commun à au moins trois tuiles fermées distinctes et valence $v(s)$ de ce sommet le nombre de tuiles fermées auquel s appartient ((*) entraîne que $v(s)$ est fini).

On dit qu'une tuile T de \mathfrak{T} a une valence $v(T) = \ell$ et est un ℓ -gone quand $\text{fr } T$ contient ℓ sommets (le pavement étant ordinaire on a $v(T) \geq 3$ et (*) entraîne

que $v(T)$ est fini). $v(T)$ est aussi le nombre de côtés distincts portés par $\text{fr } T$. Deux tuiles distinctes sont dites adjacentes quand leurs adhérences sont non disjointes et strictement adjacentes quand leurs adhérences ont un côté commun. Deux sommets distincts sont dits adjacents quand ils appartiennent à une même tuile fermée et strictement adjacents si ce sont les extrémités d'un côté. Deux côtés distincts sont dits adjacents s'ils appartiennent à une même tuile fermée ou s'ils ont une extrémité commune et strictement adjacents s'ils appartiennent à une même tuile fermée et ont une extrémité commune.

Soit $\bar{\mathcal{T}} = (\bar{T}_j)_{j \in J}$. L'ensemble des sommets de \mathcal{T} aussi appelés noeuds est noté $N(\mathcal{T})$, l'ensemble des côtés $L(\mathcal{T})$. Soit

$$\Psi = \{\bar{\mathcal{T}}, L(\mathcal{T}), N(\mathcal{T})\}, \quad \Theta = \{L(\mathcal{T}), N(\mathcal{T})\},$$

$\cup \Psi$, resp. $\cup \Theta$ est appelé complexe de \mathcal{T} , resp. graphe de \mathcal{T} et noté $\text{comp } \mathcal{T}$ resp. $\text{gr } \mathcal{T}$. Dans Ψ (ou Θ) tout élément de \mathcal{T} , resp. $L(\mathcal{T})$, resp. $N(\mathcal{T})$ est dit de dimension 2, resp. 1, resp. 0. Pour U, V dans $\text{comp } \mathcal{T}$ on dit que U est une face de V quand $U \subset V$, une face stricte quand $U \not\subset V$. On a alors respectivement $\dim U \leq \dim V$ et $\dim U < \dim V$. L'intersection de deux éléments non disjointes de $\text{comp } \mathcal{T}$ est dans $\text{comp } \mathcal{T}$. Soient $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ deux pavements; on dit que leurs complexes associés sont isomorphes et on écrit $\text{comp } \mathcal{T} \approx \text{comp } \mathcal{T}'$ s'il existe une bijection entre $\text{comp } \mathcal{T}$ et $\text{comp } \mathcal{T}'$ qui, elle, comme sa bijection inverse, conserve les dimensions et l'inclusion (une telle bijection conserve les notions d'adjacence introduites). Dans ce cas on dit aussi que \mathcal{T} et \mathcal{T}' sont isomorphes et on écrit $\mathcal{T} \approx \mathcal{T}'$.

Remarque : On peut dire que $\text{gr } \mathcal{T}$ et $\text{gr } \mathcal{T}'$ sont isomorphes et écrire $\text{gr } \mathcal{T} \approx \text{gr } \mathcal{T}'$ s'il existe une bijection entre $\text{gr } \mathcal{T}$ et $\text{gr } \mathcal{T}'$ qui, elle, comme sa bijection inverse, conserve les dimensions et l'inclusion. On peut avoir $\text{gr } \mathcal{T} \approx \text{gr } \mathcal{T}'$ et $\text{comp } \mathcal{T} \not\approx \text{comp } \mathcal{T}'$.

Si l'union de φ tuiles fermées de $\bar{\mathcal{T}}$ est simplement connexe et forme $\bar{\mathcal{T}}_\varphi$, $L(\mathcal{T}_\varphi) \subset L(\mathcal{T})$ désigne l'ensemble des côtés de \mathcal{T} situés sur la frontière de ces φ tuiles et $N(\mathcal{T}_\varphi) \subset N(\mathcal{T})$ l'ensemble des sommets de \mathcal{T} situés sur $L(\mathcal{T}_\varphi)$.

Pour $\Psi_\varphi = \{\bar{\mathcal{T}}_\varphi, L(\mathcal{T}_\varphi), N(\mathcal{T}_\varphi)\}$, $\Theta_\varphi = \{L(\mathcal{T}_\varphi), N(\mathcal{T}_\varphi)\}$

$U \Psi_\varphi$ et $U \Theta_\varphi$ respectivement notés $\text{comp } \mathfrak{X}_\varphi$ et $\text{gr } \mathfrak{X}_\varphi$ sont le complexe de \mathfrak{X}_φ et le graphe de \mathfrak{X}_φ . $\text{gr } \mathfrak{X}_\varphi$ est le 1-squelette du 2-complexe fini $\text{comp } \mathfrak{X}_\varphi$. De plus lorsque (*) est vérifié on a la formule d'Euler.

$\varphi - S + N = 1$ où S , resp. N , est le nombre d'éléments de $L(\mathfrak{X}_\varphi)$, resp. $N(\mathfrak{X}_\varphi)$. On peut dire aussi que $\text{gr } \mathfrak{X}$ est le 1-squelette du 2-complexe infini dénombrable $\text{comp } \mathfrak{X}$.

2 - CONTRIBUTIONS D'EULER-LEBESGUE DES TUILES ET DES SOMMETS ; "CYCLES" DE DELONE

Soit un sommet s de valence $v(s)$ de \mathfrak{X} . Si $s \in \bar{T}$ où T est une tuile de \mathfrak{X} , on dit que s est un sommet de T . L'ensemble des deux côtés strictement adjacents situés sur $\text{fr } T$ ayant même extrémité s est l'angle de \mathfrak{X} en s contenu dans T . En s il y a $v(s)$ angles distincts et \bar{T} contient $v(T)$ angles ayant un sommet sur $\text{fr } T$.

Si α est un tel angle, on appelle contribution (d'Euler-Lebesgue) de α (cf. [9] et [10] p. 54) la quantité

$$c(\alpha) = 1/v(s) + 1/v(T) - 1/2$$

La contribution de T est $c(T) = \sum_{\substack{\alpha \text{ a un sommet} \\ \text{sur fr } T}} c(\alpha) = 1 - v(T)/2 + \sum_{\substack{s \text{ est un sommet} \\ \text{de } T}} 1/v(s)$

La contribution de s est $c(s) = \sum_{\substack{\alpha \text{ a pour som-} \\ \text{met } s}} c(\alpha) = 1 - v(s)/2 + \sum_{\substack{T \text{ a pour som-} \\ \text{met } s}} 1/v(T)$

On dit que \mathfrak{X} est fortement équilibré si quel que soit α , $c(\alpha) = 0$,
faiblement équilibré sur les tuiles resp. sur les sommets si quel que soit T ,
 $c(T) = 0$, resp. quel que soit s , $c(s) = 0$.

Soit $s_1, \dots, s_{v(T)}$ les sommets de \mathfrak{X} situés sur \bar{T} numérotés suivant l'ordre induit sur $\text{fr } T$ par une orientation de \mathbb{R}^2 . Pour $1 \leq k \leq v(T)$ soit $a_k = v(s_k)$; $(a_1, \dots, a_{v(T)})$ défini modulo les permutations circulaires et le renversement est appelé cycle de T . La classe de ce cycle modulo toutes les permutations

est appelée "cycle" de T .

Soit $T_1, \dots, T_{v(s)}$ les tuiles de \mathfrak{T} ayant pour sommet s numérotées dans l'ordre induit par une orientation de \mathbb{R}^2 sur un cercle de centre s .

Pour $1 \leq k \leq v(s)$ soit $p_k = v(T_k)$; $(p_1, \dots, p_{v(s)})$ défini modulo les permutations circulaires et le renversement est le cycle de s . La classe de ce cycle modulo toutes les permutations est le "cycle" de s . Un cycle tel que $(4, 3, 4, 3, 3)$ s'écrit en abrégé $(4, 3, 4, 3^2)$ et son "cycle" $(4^2, 3^3)$ etc...

Quand $\mathfrak{T} \approx \mathfrak{T}'$ si $\sigma : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{T}'$ est une bijection qui comme σ^{-1} conserve les dimensions et l'inclusion, le cycle d'une tuile ou d'un sommet est conservé par σ et par σ^{-1} .

On dit que \mathfrak{T} est équilibré resp. strictement équilibré sur les tuiles resp. sur les sommets si le "cycle" resp. le cycle de chaque tuile resp. chaque sommet de \mathfrak{T} est le même.

Proposition 2.1

Pour les tuiles ou pour les sommets, un pavement strictement équilibré est équilibré et un pavement équilibré est faiblement équilibré.

Preuve. La première implication résulte de la définition. Quant à la deuxième, on remarque, pour les tuiles, par exemple, que par définition $c(T)$ ne dépend pas de la tuile considérée. La formule d'Euler montre alors que $c(T) = 0$.

[Pour l'union simplement connexe $\overline{\mathfrak{T}}_\varphi$ de φ tuiles fermées de \mathfrak{T} , la contribution est $c(\overline{\mathfrak{T}}_\varphi) = \sum_{T \in \mathfrak{T}_\varphi} c(T)$; si $c(T) \neq 0$, cette contribution tend vers l'infini avec φ

ce qui est exclu par la formule d'Euler].

Remarque. Si la contribution de chaque angle est constante, elle est nulle.

Proposition 2.2

Les pavements fortement équilibrés sont ceux pour lesquels le couple $(v(s), v(T))$ est le même pour toutes les tuiles et tous les sommets et est un des 3 couples $(6, 3)$, $(4, 4)$, $(3, 6)$.

Preuve. $c(\alpha) = 0$ équivaut à $1/v(T) + 1/v(s) = 1/2$ ce qui donne pour $(v(s), v(T))$ l'une des 3 solutions indiquées. De plus, il est immédiat que deux sommets strictement adjacents ont même valence. Que de tels pavements existent est donné par l'exemple des pavements monomorphiques bien connus pavant le plan à l'aide de triangles équilatéraux pour (6, 3) de carrés pour (4, 4) et d'hexagones réguliers pour (3, 6).

Proposition 2.3

Le "cycle" d'un sommet ou d'une tuile d'un pavement faiblement équilibré est un des 11 "cycles" de Delone

(3^6) , (6.3^4) , $(4^2.3^3)$, $(12.4.3^2)$, $(6^2.3^2)$, $(6.4^2.3)$, (4^4) , $(12^2.3)$, $(12.6.4)$, $(8^2.4)$, (6^3) .

Preuve. Pour les tuiles, on a d'abord à résoudre l'équation diophantienne

$$\sum_{i=1}^{v(T)} 1/a_i = v(T)/2 - 1 \quad (1)$$

Comme $a_i \geq 3$ on a immédiatement $v(T) \leq 6$ et on trouve pour (1) à une permutation près 16 solutions distinctes, les 11 "cycles" indiqués et les 5 solutions $(24.8.3)$, $(18.9.3)$, $(42.7.3)$, $(20.5.4)$ et $(10.5.5)$.

Or l'élimination de ces "cycles" pour les pavements strictement équilibrés faite par Delone [2] vaut pour les pavements faiblement équilibrés. Pour les sommets, on a à résoudre l'équation diophantienne

$$\sum_{i=1}^{v(s)} 1/p_i = v(s)/2 - 1 \quad (2)$$

qui, évidemment, a les mêmes 16 solutions que (1). Les 5 solutions ci-dessus indiquées sont également exclues comme on peut le vérifier directement ou en se servant des considérations de dualité du §3. Les 11 "cycles" indiqués sont effectivement possibles. Pour les 10 "cycles" distincts de $(12.4.3^2)$ on a des réalisations par des pavements strictement équilibrés. Pour le "cycle" $(12.4.3^2)$ des exemples sont donnés au §6.

3 - DUALITE

On vient de voir que pour les pavements faiblement équilibrés il y a parallélisme entre les résultats pour les tuiles et pour les sommets. Cela est rendu immédiat par la notion de dualité.

Soit $\mathfrak{T} = (T_j)_{j \in J}$ un pavement. A \mathfrak{T} on associe des duaux topologiques comme il suit. A chaque $j \in J$ on associe $s_j^* \in T_j$ et à chaque côté $L_{jj'}$ commun aux tuiles fermées totalement adjacentes \bar{T}_j et $\bar{T}_{j'}$, un point $\ell_{jj'} \in L_{jj'}$, distinct des extrémités de $L_{jj'}$. s_j^* est joint aux différents $\ell_{jj'}$ possibles par des arcs de Jordan contenus dans T_j tels que seul s_j^* soit commun à ces arcs. s_j^* et $s_{j'}^*$ sont joints par $L_{jj'}^*$ qui est l'union des 2 arcs de Jordan joignant $\ell_{jj'}$ à s_j^* et $s_{j'}^*$.

Soit $L^* = \{L_{jj'}^*\}$, $N^* = \{s_j^*\}$, $\Theta^* = \{L^*, N^*\} \cup \Theta^*$ considéré dans \mathbb{R}^2 est l'union des divers s_j^* et des divers $L_{jj'}^*$; il définit un filet de \mathbb{R}^2 ; les mailles de ce filet, c'est-à-dire les parties simplement connexes ouvertes que ce filet détermine, constituent une famille de tuiles formant pavement de \mathbb{R}^2 telle qu'à chaque élément de $N(\mathfrak{T})$ correspond biunivoquement une de ces tuiles. Le pavement ainsi obtenu est appelé dual topologique de \mathfrak{T} et noté \mathfrak{T}^* .

Proposition 3.1

- (a) \mathfrak{T} est un dual topologique de \mathfrak{T}^* ;
- (b) Le cycle d'un sommet de \mathfrak{T}^* (resp. \mathfrak{T}) est le cycle de la tuile de \mathfrak{T} (resp. \mathfrak{T}^*) qui le contient ;
- (c) $\mathfrak{T} \approx \mathfrak{T}'$ ssi $\mathfrak{T}^* \approx \mathfrak{T}'^*$.

Corollaire

- (α) La contribution d'Euler-Lebesgue d'un sommet de \mathfrak{T}^* (resp. \mathfrak{T}) est égale à celle de la tuile de \mathfrak{T} (resp. \mathfrak{T}^*) qui le contient.
- (β) Si \mathfrak{T} est strictement équilibré, équilibré ou faiblement équilibré sur les tuiles resp. sur les sommets, \mathfrak{T}^* l'est sur les sommets resp. sur les tuiles
- (γ) Si les tuiles resp. les sommets de \mathfrak{T} ont la même valence ℓ les sommets resp. les tuiles de \mathfrak{T}^* ont aussi la valence ℓ .

Prouvons ici (c). Pour ce faire, rappelons quelques notions concernant les complexes de la topologie algébrique.

Soit pour p entier $T_p, T_{p-1}, \dots, T_1, T_0$ des ensembles disjoints (pouvant être vides) d'éléments non vides. Un élément φ de $\bigcup_{i=0}^p T_i$ est dit de dimension q s'il appartient à T_q ($0 \leq q \leq p$) ; cette dimension est notée $\dim \varphi$.

$\mathcal{C} = \bigcup_{i=0}^p T_i = \bigcup \Psi$ pour $\Psi = \{T_0, \dots, T_p\}$ est appelé p -complexe (abstrait) si

(a) l'intersection non vide de deux éléments de \mathcal{C} est dans \mathcal{C}

(b) pour $(U, V) \in \mathcal{C}^2$, $U \not\subset V$ implique $\dim U < \dim V$.

Pour $\Theta = \{T_{p-1}, \dots, T_0\}$, U_Θ est appelé $(p-1)$ -squelette de \mathcal{C} et noté \mathcal{C}_{-1} .

C'est un $(p-1)$ -complexe quand \mathcal{C} est un p -complexe.

Deux complexes \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont dits isomorphes ($\mathcal{C} \approx \mathcal{C}'$) s'il existe une bijection de \mathcal{C} sur \mathcal{C}' qui, elle, comme sa bijection inverse, conserve les dimensions et l'inclusion. $\mathcal{C} \approx \mathcal{C}'$ entraîne $\mathcal{C}_{-1} \approx \mathcal{C}'_{-1}$ mais on peut avoir $\mathcal{C}_{-1} \approx \mathcal{C}'_{-1}$ avec $\mathcal{C} \not\approx \mathcal{C}'$.

2 p -complexes \mathcal{C} et \mathcal{C}^* sont dits duaux s'il existe une bijection $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^*$ ($\varphi \mapsto \varphi^*$) telle que

(i) $\dim \varphi + \dim \varphi^* = p$

(ii) $\varphi \subset \psi$ ssi $\psi^* \subset \varphi^*$.

Avec ces définitions, s'il existe des duaux à \mathcal{C} et \mathcal{C}' on a $\mathcal{C} \approx \mathcal{C}'$ ssi $\mathcal{C}^* \approx \mathcal{C}'^*$.

Par contre, on peut avoir $\mathcal{C}_{-1} \approx \mathcal{C}'_{-1}$ et $\mathcal{C}^* \not\approx \mathcal{C}'^*$.

La dualité que nous avons considérée sur les pavements associe $\text{comp } \mathcal{C}^*$ et $\text{comp } \mathcal{C}$ de la façon suivante : à une tuile T_j on associe s_j^* , à un sommet s_k la tuile T_k^* qui contient s_k et au côté $L_{jj'}$, joignant les sommets s_k et $s_{k'}$, le côté $L_{jj'}^*$, intersection des tuiles T_k^* et $T_{k'}^*$.

On vérifie facilement que cette dualité possède les propriétés de la dualité abstraite et par suite on a bien (c).

4 - CYCLES DE LAVES

Proposition 4.1

Le cycle d'un sommet ou d'une tuile d'un pavement strictement équilibré est un des 11 cycles de Laves

(3^6) , (6.3^4) , $(4^2.3^3)$, $(4.3.4.3^2)$, $(6.3.6.3)$, $(6.4.3.4)$, (4^4) , $(12^2.3)$, $(12.6.4)$, $(8^2.4)$, (6^3) .

Preuve. A cause de la dualité, on ne considère que le cas des tuiles. Des 11 "cycles" de Delone possibles, le "cycle" $(12.4.3^2)$ s'élimine comme par exemple dans [2]. Les 10 "cycles" restants donnent lieu aux 11 cycles indiqués, deux $(4^2.3^3)$ et $(4.3.4.3^2)$ correspondant au "cycle" $(4^2.3^3)$ et les cycles $(6^2.3^2)$, $(6.4^2.3)$ étant exclus (cf. par exemple [2]). Les 11 possibilités existent. Le nom "cycle de Laves" vient de [8] ; pour les sommets, on dit parfois cycles archimédiens.

Proposition 4.2

Le "cycle" d'un sommet ou d'une tuile d'un pavement équilibré est un des 10 "cycles".

(3^6) , (6.3^4) , $(4^2.3^3)$, $(6^2.3^2)$, $(6.4^2.3)$, (4^4) , $(12^2.3)$, $(12.6.4)$, $(8^2.4)$, (6^3) .

Preuve. On considère le cas des tuiles. Le "cycle" étant un des 11 "cycles" de Delone, on doit éliminer $(12.4.3^2)$. Cela se fait par les considérations suivantes qui utilisent simultanément les figures 1 et 2.

(α) Soit **I** une tuile de cycle $(12.4.3^2)$ et **II** la tuile adjacente à **I** suivant le côté $(12, 3)$ (Fig. 1). On suppose le pavement équilibré ; si **II** avait pour cycle $(12.4.3^2)$, la tuile **III** adjacente aux tuiles **I** et **II** aurait trois sommets consécutifs de valence 3. Comme c'est exclu, **II** a pour cycle $(12.3.4.3)$ et **III** pour cycle $(12.4.3^2)$. Alors **IV** adjacent à **I** et **III** a pour cycle $(12.3.4.3)$ et **V** adjacent à **I** suivant le côté $(12, 4)$ comme cycle $(12.4.3^2)$. La tuile **VI** adjacente à **IV** et **V** a pour cycle $(12.3.4.3)$ et **VII** adjacent à **IV** et **VI** possède deux sommets de valence 12. Ce cas étant exclu, il ne peut exister dans un pavement équilibré sur les tuiles de

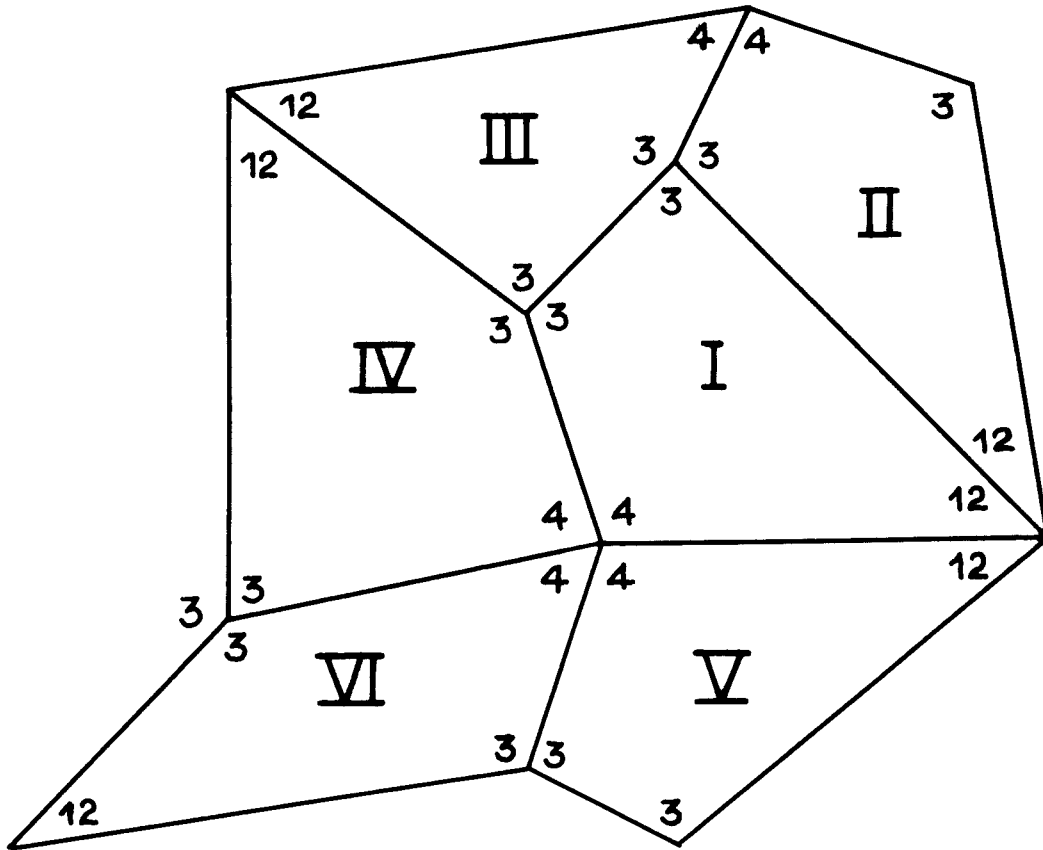


Figure 1

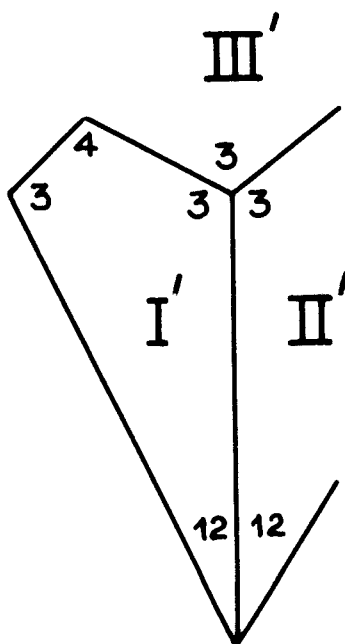


Figure 2

cycle $(12.4.3^2)$.

(β) Soit I' une tuile de cycle $(12.3.4.3)$ d'un pavement équilibré sur les tuiles. Considérons la tuile II' adjacente à I' suivant le côté $(12, 3)$ (Fig. 2).

Si II' avait comme cycle $(12.3.4.3)$, la tuile III' adjacente à I' et II' aurait deux sommets de valence 4. C'est exclu et donc II' a pour cycle $(12.4.3^2)$; or d'après (α) un pavement équilibré sur les tuiles ne peut contenir une telle tuile.

Proposition 4.3

Si un pavement est équilibré à la fois sur les tuiles et sur les sommets, il est fortement équilibré.

Preuve. Le "cycle" d'une tuile est un des 10 "cycles" de la Proposition 4.2. Or si ce "cycle" est un des 7 "cycles" (6.3^4) , $(4^2.3^3)$, $(6^2.3^2)$, $(6.4^2.3)$, $(12^2.3)$, $(12.6.4)$ ou $(8^2.4)$ la valence d'un sommet n'étant pas indépendante de ce sommet, le pavement n'est pas équilibré sur les sommets. Le "cycle" d'une tuile est donc (3^6) , (4^4) ou (6^3) auquel cas le "cycle" d'un sommet est respectivement (6^3) , (4^4) ou (3^6) : on retrouve les pavements fortement équilibrés.

Soit $S(\mathfrak{X})$ le groupe de symétries de \mathfrak{X} . On dit que \mathfrak{X} est isohédral resp. isogonal si vis-à-vis de $S(\mathfrak{X})$ les tuiles resp. les sommets sont dans la même classe de transitivité (cf. [4] et [5]).

Proposition 4.4

Un pavement isohédral resp. isogonal est strictement équilibré sur les tuiles resp. sur les sommets.

Preuve. Soit $\sigma \in S(\mathfrak{X})$ envoyant la tuile T de cycle (a_1, \dots, a_n) sur la tuile T' de cycle (a'_1, \dots, a'_n) et s_i resp. s'_i le sommet de T resp. T' de valence a_i resp. a'_i . Si \mathfrak{X} est isohédral pour un certain j avec $1 \leq j \leq n$ on a $s'_j = \sigma s_j$ et $a'_j = a_j$. L'ordre sur $\text{fr } T'$ induit par un ordre donné sur $\text{fr } T$ est soit le même soit l'ordre opposé d'un ordre quelconque choisi sur $\text{fr } T'$; il en résulte que les

cycles de T et T' sont les mêmes. Lorsque \mathfrak{X} est isogonal, la preuve se fait de façon analogue.

Remarque. On peut écrire $\mathfrak{X} = \bigcup_{i=3}^{\infty} T_i$ où T_i contient les tuiles de valence i et

$N = \bigcup_{i=3}^{\infty} N_i$ où N_i contient les sommets de valence i . On dit que \mathfrak{X} est h-noeudique

s'il y a seulement h valences distinctes de noeuds, h-tuïlique s'il y a seulement h valences distinctes de tuiles. On peut dire que \mathfrak{X} est valencement équilibré resp. strictement équilibré sur les tuiles resp. les sommets si deux tuiles resp. deux sommets de même valence ont même "cycle" resp. même cycle. Les 2 notions précédentes sont duales. On peut considérer aussi la notion suivante. Un pavement est isométriquement équilibré sur les tuiles resp. strictement équilibré quand deux tuiles isométriques ont même "cycle" resp. même cycle. Il ne semble pas y avoir de notion duale.

Disons qu'un pavement \mathfrak{X} est h-isohédral resp. h-isogonal quand relativement à $S(\mathfrak{X})$ les tuiles resp. les sommets forment h classes de transitivité.

Un pavement h-isohédral est h-morphique ; un pavement h-isogonal est h-noeudique. De plus, on a la

Proposition 4.5

Un pavement h-isohédral resp. h-isogonal est valencement strictement équilibré sur les tuiles resp. les sommets.

Preuve. Pour les tuiles, celle de la proposition 4.4 marche in extenso en prenant T et T' dans une même classe de transitivité ; pour les sommets, on fait de façon analogue.

5 - PAVEMENTS EQUILIBRES SUR LES COTES

On introduit la contribution d'Euler-Lebesgue d'un côté de \mathfrak{X} comme il suit : si ce côté L_{12} est commun aux tuiles \bar{T}_1 et \bar{T}_2 et a pour extrémités s_3 et s_4 , sa contribution $c(L_{12})$ vaut $1/v(s_3) + 1/v(s_4) + 1/v(T_1) + 1/v(T_2) - 1$. On associe aussi à L_{12} le symbole $\langle v(s_3), v(s_4) ; v(T_1), v(T_2) \rangle$.

Ce symbole pris modulo les permutations sur les deux premiers termes et sur les deux derniers est appelé cycle du côté ; ce symbole pris modulo toutes les permutations est appelé "cycle". Le symbole $\langle m, n ; p, q \rangle$ s'écrit $\langle m, n ; p, q \rangle$, m, n par exemple étant abrégé en m^2 pour $m = n$. Le "cycle" associé s'écrit $\langle m, n, p, q \rangle$ avec des abréviations immédiates à l'aide des puissances quand certains termes sont égaux.

Si le cycle d'un côté ne dépend pas du côté considéré, on dit que le pavement est strictement équilibré sur les côtés ; si c'est le "cycle" qui n'en dépend pas qu'il est équilibré (sur les côtés). Si la contribution d'un côté est constante, elle est nulle et on dit que le pavement est faiblement équilibré sur les côtés. Un pavement équilibré sur les côtés est aussi faiblement équilibré.

Il est immédiat que si un côté $L_{jj'}$ de \mathfrak{X} a pour symbole $\langle m, n ; p, q \rangle$ le côté $L_{jj'}^*$ du dual \mathfrak{X}^* a pour symbole $\langle p, q ; m, n \rangle$. On en déduit que si un pavement \mathfrak{X} est faiblement équilibré resp. équilibré resp. strictement équilibré sur les côtés, il en est de même de \mathfrak{X}^* .

Proposition 5.1

Le "cycle" d'un côté d'un pavement faiblement équilibré sur les côtés est un des 3 "cycles" $\langle 3^2, 6^2 \rangle$, $\langle 3, 4^2, 6 \rangle$ ou $\langle 4^4 \rangle$.

Preuve. Si ce "cycle" est $\langle m, n, p, q \rangle$ on peut supposer $q \geq p \geq n \geq m \geq 3$. De plus, ce "cycle" vérifie l'équation diophantienne $1/m + 1/n + 1/p + 1/q = 1$, équation qui, avec les conditions imposées, admet seulement les 4 "solutions" $\langle 3^2, 4, 12 \rangle$, $\langle 3^2, 6^2 \rangle$, $\langle 3, 4^2, 6 \rangle$ et $\langle 4^4 \rangle$. Reste à éliminer le "cycle" $\langle 3^2, 4, 12 \rangle$. Or, si un côté d'un pavement a pour "cycle" $\langle 3^2, 4, 12 \rangle$ on peut supposer, à la dualité près, que le cycle associé est soit $\langle 4, 12 ; 3^2 \rangle$ soit $\langle 3, 12 ; 3, 4 \rangle$. On élimine successivement les deux cas en se servant des figures 3 et 4.

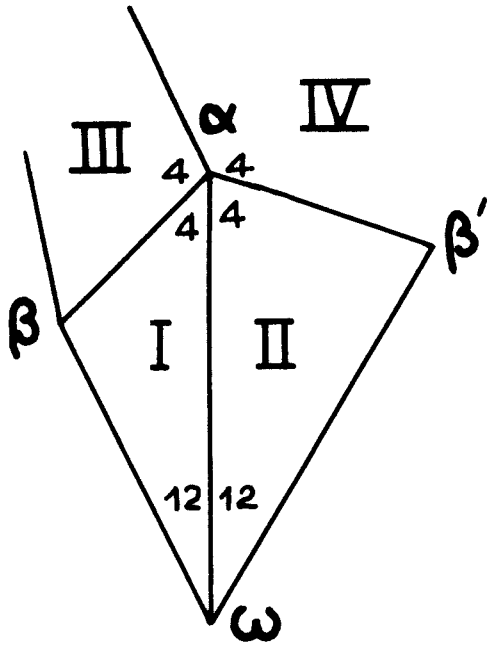


Figure 3

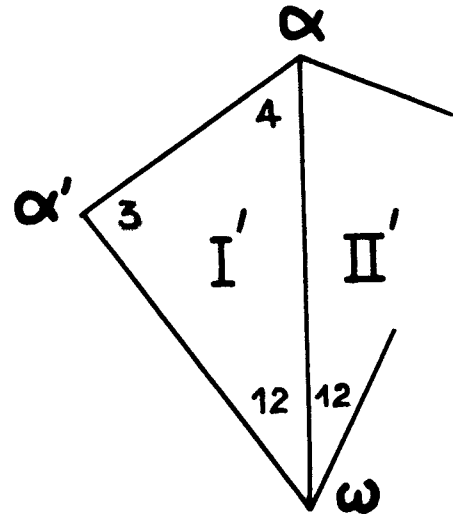


Figure 4

(α) \mathfrak{X} a un côté de cycle $\langle 4.12 ; 3^2 \rangle$ (Fig. 3). Soit $\widehat{\omega\alpha}$ ce côté, ω étant de valence 12 et α de valence 4. Désignons par I et II les deux 3-gones du pavement de côté $\widehat{\omega\alpha}$, $\omega\hat{\alpha}\beta$ noté I et $\omega\hat{\alpha}\beta'$ noté II. β a pour valence 3, 4, 6 ou 12. Si β a pour valence 12, $\widehat{\omega\beta}$ a pour cycle $\langle 12^2 ; 3.x \rangle$ et si β a pour valence 6, pour cycle $\langle 6.12 ; 3.x \rangle$; ces deux cas étant exclus, β a pour valence 3 ou 4. De même β' a pour valence 3 ou 4. Si β a pour valence 4, $\widehat{\alpha\beta}$ a pour cycle $\langle 4^2 ; 3.x \rangle$ ce qui n'est possible que pour $x = 12$ et si β a pour valence 3, $\widehat{\alpha\beta}$ a pour cycle $\langle 3.4 ; 3.x \rangle$ ce qui nécessite $x = 6$. Donc la tuile III adjacente à I suivant $\widehat{\alpha\beta}$ a pour valence 6 ou 12. De même la tuile IV adjacente à II suivant $\widehat{\alpha\beta'}$ a pour valence 6 ou 12. Or, III et IV sont adjacents suivant $\widehat{\alpha\epsilon}$ qui a pour cycle $\langle 4.y ; 6^2 \rangle$, $\langle 4.y ; 6.12 \rangle$ ou $\langle 4.y ; 12^2 \rangle$: c'est exclu dans un pavement faiblement équilibré sur les côtés.

(β) \mathfrak{X} a un côté de cycle $\langle 3.12 ; 3.4 \rangle$ (Fig. 4). Soit $\widehat{\alpha'\omega}$ ce côté, α' étant de valence 3 et ω de valence 12. Soit $\omega\hat{\alpha}\alpha'$ le 3-gone de \mathfrak{X} admettant comme côté $\widehat{\omega\alpha'}$ noté aussi

I' . α a pour valence 3, 4, 6 ou 12 ; si α a pour valence 12, $\widehat{\omega\alpha}$ a pour cycle $\langle 12^2 ; 3. x \rangle$; si α a pour valence 6, $\widehat{\omega\alpha}$ a pour cycle $\langle 6.12 ; 3. x \rangle$; si α a pour valence 3, $\widehat{\alpha\alpha'}$ a pour cycle $\langle 3^2 ; 3. x \rangle$; ces trois cas étant exclus, α a pour valence 4. Alors si Π' est la tuile de \mathfrak{X} adjacente à I' suivant $\widehat{\omega\alpha}$, Π' a pour valence 3 (la valence de Π' est 3, 4, 6 ou 12 ; si c'est 12, $\widehat{\omega\alpha}$ a pour cycle $\langle 4.12 ; 3.12 \rangle$, si c'est 6 comme cycle $\langle 4.12 ; 3.6 \rangle$ et si c'est 4 pour cycle $\langle 4.12 ; 3.4 \rangle$ et ces 3 cas sont exclus).

Maintenant en remplaçant I' par I , Π' par Π et α' par β on retrouve une des situations étudiées en (α) (celle où β a pour valence 3).

Remarque. Pour atteindre le résultat précédent en ce qui concerne les pavements équilibrés sur les côtés, on peut donner une preuve plus simple.

Proposition 5.2

Le cycle d'un côté d'un pavement strictement équilibré sur les côtés est un des 5 cycles $\langle 3^2 ; 6^2 \rangle$, $\langle 3.6 ; 4^2 \rangle$, $\langle 4^2 ; 3.6 \rangle$, $\langle 4^2 ; 4^2 \rangle$ ou $\langle 6^2 ; 3^2 \rangle$.

Preuve. Grünbaum et Shephard dans [6] ont considéré le cas des pavements \mathfrak{X} isotoxaux c'est-à-dire celui où $S(\mathfrak{X})$ agit transitivement sur les côtés et établi le résultat dans ce cas. On voit facilement qu'un pavement isotoxal est strictement équilibré sur les côtés et la preuve donnée par G-S vaut pour ces derniers. Notons que la Proposition 5.2 établit la Proposition 5.1 dans le cas particulier des pavements strictement équilibrés sur les côtés. On sait qu'il existe des pavements strictement équilibrés sur les côtés admettant comme cycle un des cinq cycles précédents (cf. [6]).

6 - QUELQUES EXEMPLES

I - Pavements faiblement équilibrés sur les tuiles (ou sur les sommets) non équilibrés.

(α) Nous avons indiqué au §2 qu'on pouvait trouver dans ce cas le "cycle" $(12.4.3^2)$. Dans la figure 5, l'exemple (a) donne un cas où une tuile au moins a pour cycle $(12.4.3^2)$, l'exemple (b) celui où une infinité dénombrable de tuiles ont pour cycle $(12.3.4.3)$ ((b) est obtenu en pavant le plan par un ré-

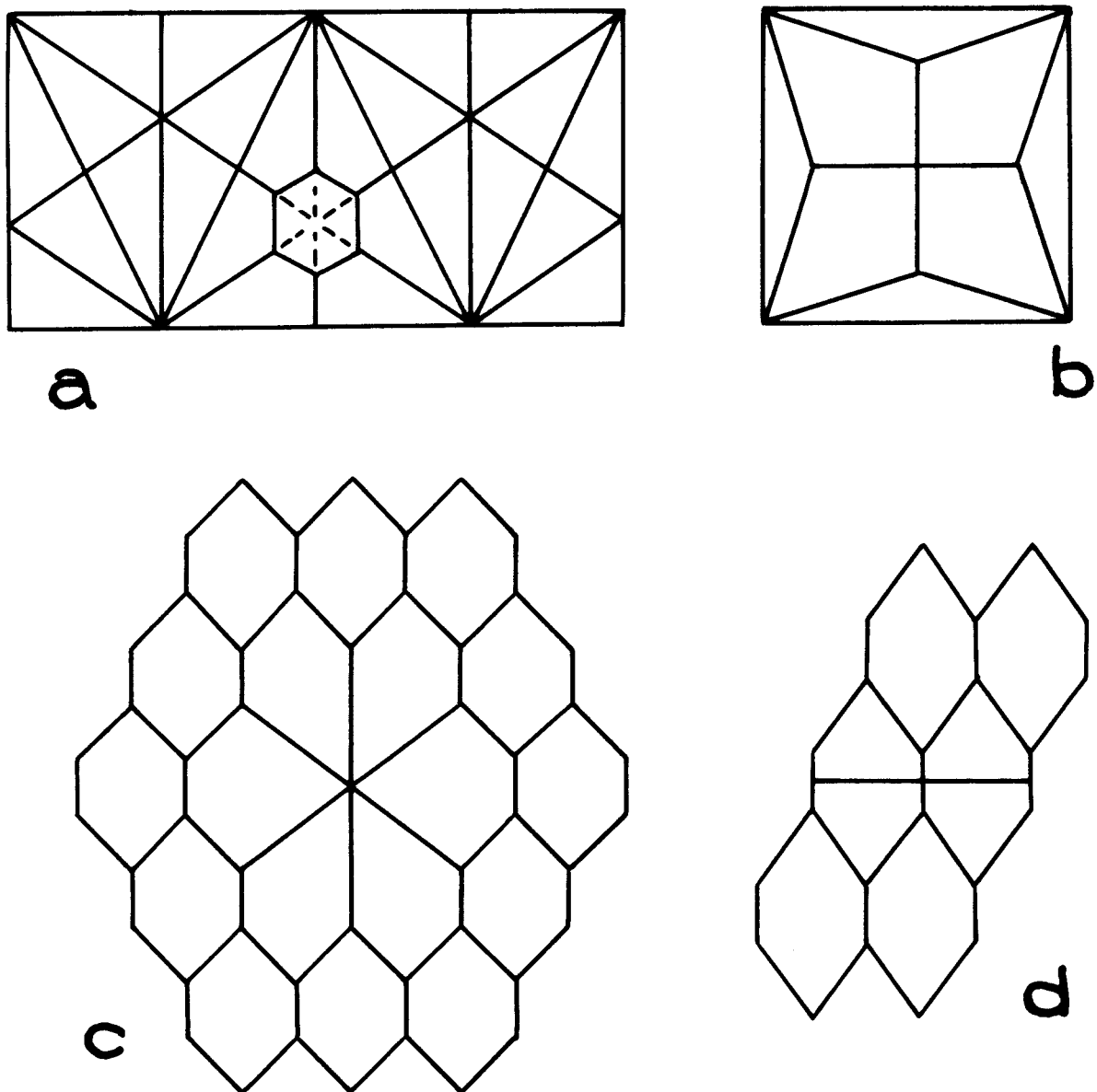


Figure 5

seau de carrés chacun étant décomposé comme la figure l'indique). a^* et b^* de la figure 6 sont les pavements duaux, a^* par exemple provient du pavement archimédien du plan obtenu à l'aide de dodécagones, d'hexagones et de carrés en remplaçant un au moins des hexagones par 6 triangles.

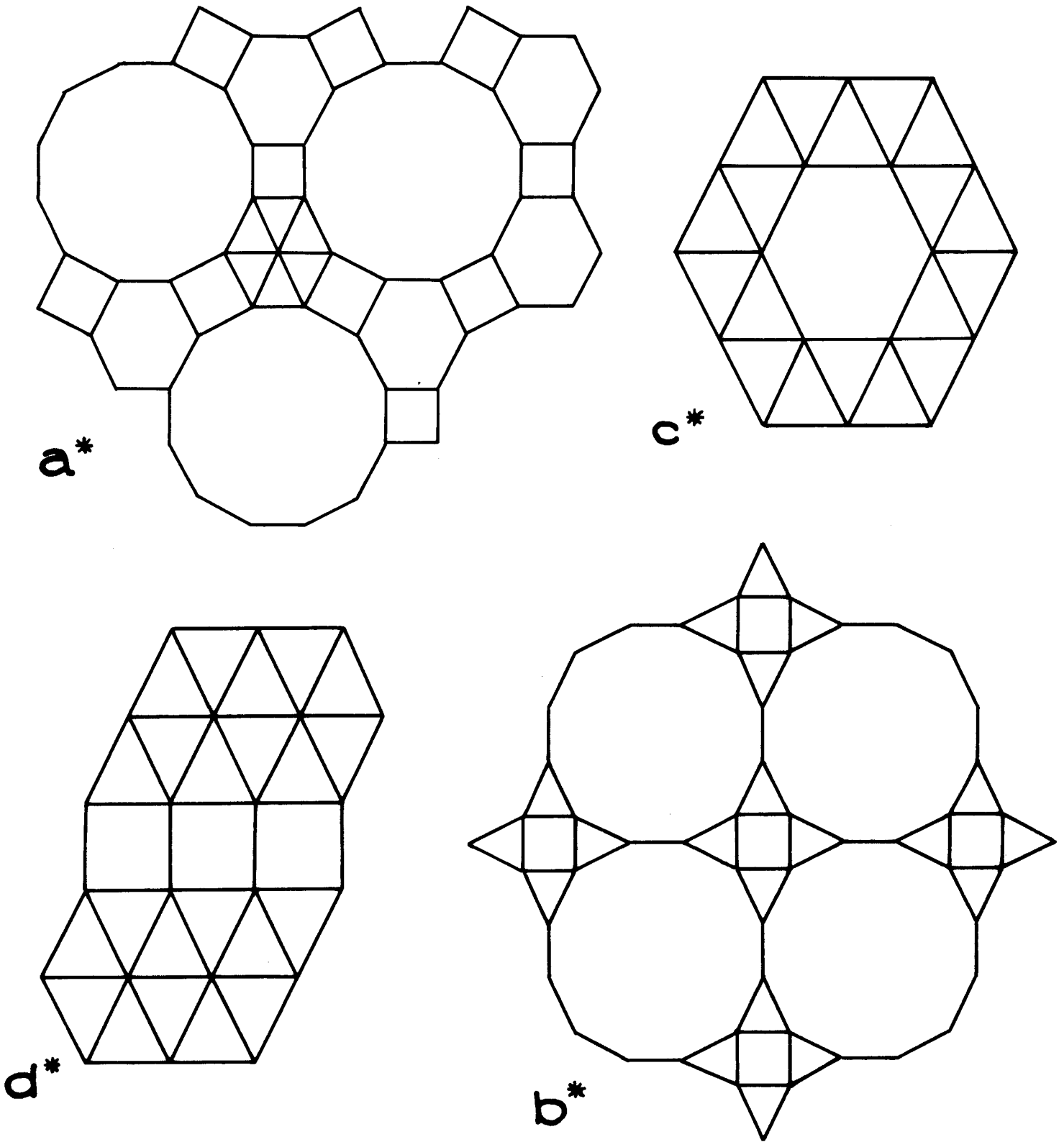


Figure 6

(β) Dans la figure 5, (c) est un exemple faiblement équilibré sur les tuiles où le cycle est soit (3^6) soit $(6, 3^4)$ et (d) un exemple d'un cas où le cycle d'une tuile est soit (3^6) soit $(4^2, 3^3)$. Dans la figure 6, (c^*) et (d^*) sont les exemples duaux. En utilisant une superposition de (c) et (d) (ou de (c^*) et (d^*)) on obtient un pavement faiblement équilibré sur les tuiles (ou sur les sommets) où le cycle est soit (3^6) soit $(6, 3^4)$ soit $(4^2, 3^3)$. On peut montrer par contre qu'il n'est pas possible de trouver un pavement faiblement équilibré où le "cycle" non unique soit seulement un des "cycles" $(6, 3^4)$ ou $(4^2, 3^3)$.

(γ) On trouve aussi des exemples donnés par Steinhaus [13]. Sa figure 85 est celle d'un pavement faiblement équilibré où le cycle est soit $(6, 4, 3, 4)$ soit $(4^2, 3^3)$; sa figure 86 celle d'un pavement où le cycle est soit $(6, 4, 3, 4)$ soit $(4, 3, 4, 3^2)$; (a^*) coïncide avec sa figure 87 et sa figure 88 est celle d'un pavement faiblement équilibré où le cycle est soit $(12, 4, 3^2)$ soit $(12, 3, 4, 3)$ soit $(12^2, 3)$.

II - Pavements équilibrés sur les tuiles (ou sur les sommets) non strictement équilibrés.

Vu la Proposition 4, 2 on n'a à considérer que le cas où le "cycle" est un des 3 "cycles" $(4^2, 3^3)$, $(6^2, 3^2)$ ou $(6, 4^2, 3)$ car dans le cas des 7 autres "cycles" possibles le pavement s'il est équilibré est strictement équilibré.

II 1 - "cycle $(4^2, 3^3)$ ".

On connaît pour les tuiles des exemples monomorphiques où la seule tuile est un pentagone convexe. En effet le type 7 de Kerschner [7] et le type 9 de Rice ([1], [11], [12]) de pentagones convexes.

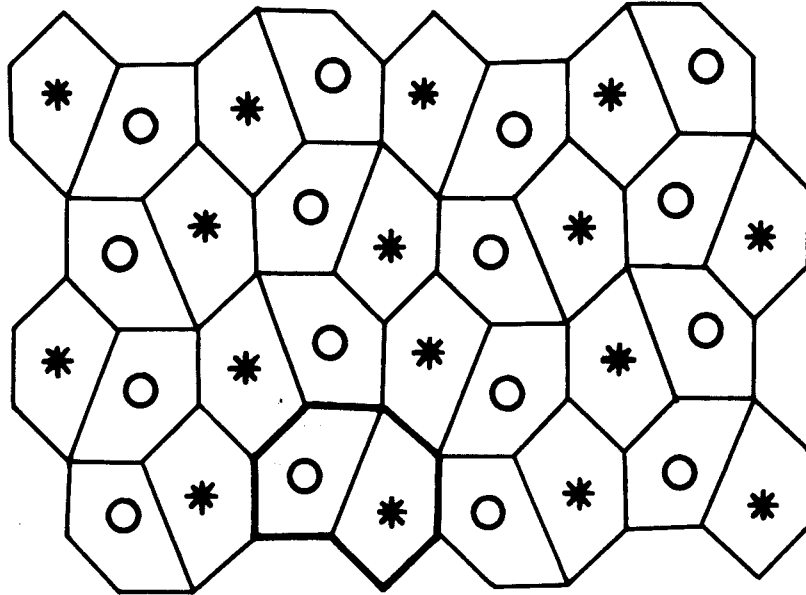
$$\text{type 7 : } 2\hat{B} + \hat{C} = 2\pi, \quad 2\hat{D} + \hat{A} = 2\pi, \quad a = b = c = d$$

$$\text{type 9 : } 2\hat{D} + \hat{C} = 2\pi, \quad 2\hat{E} + \hat{B} = 2\pi, \quad a = b = c = d$$

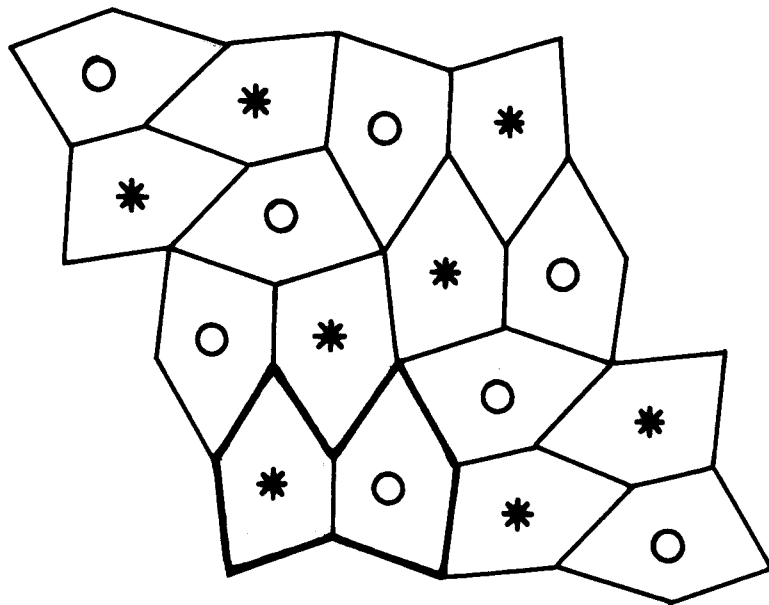
[On note ABCDE un pentagone de côtés a, b, c, d, e, les côtés de \hat{A} étant a et b etc...] (Les types 7 et 9 sont dans la figure 7).

conduisent à de tels pavements qu'on note aussi 7 et 9. 7^* et 9^* désignent les pavements duaux. Dans la figure 8 on a donné diverses représentations de ces

$$\Pi_1(4^2.3^3)$$



Type 7



Type 9

Figure 7

duaux. Notons qu'on a $7 \approx 9$ et $7^* \approx 9^*$. Dans les figures 7 et 8 quand le cycle est $(4^2, 3^3)$ une tuile est marquée \ast et un sommet \bullet quand le cycle est $(4, 3, 4, 3^2)$ une tuile ou un sommet est marqué \circ .

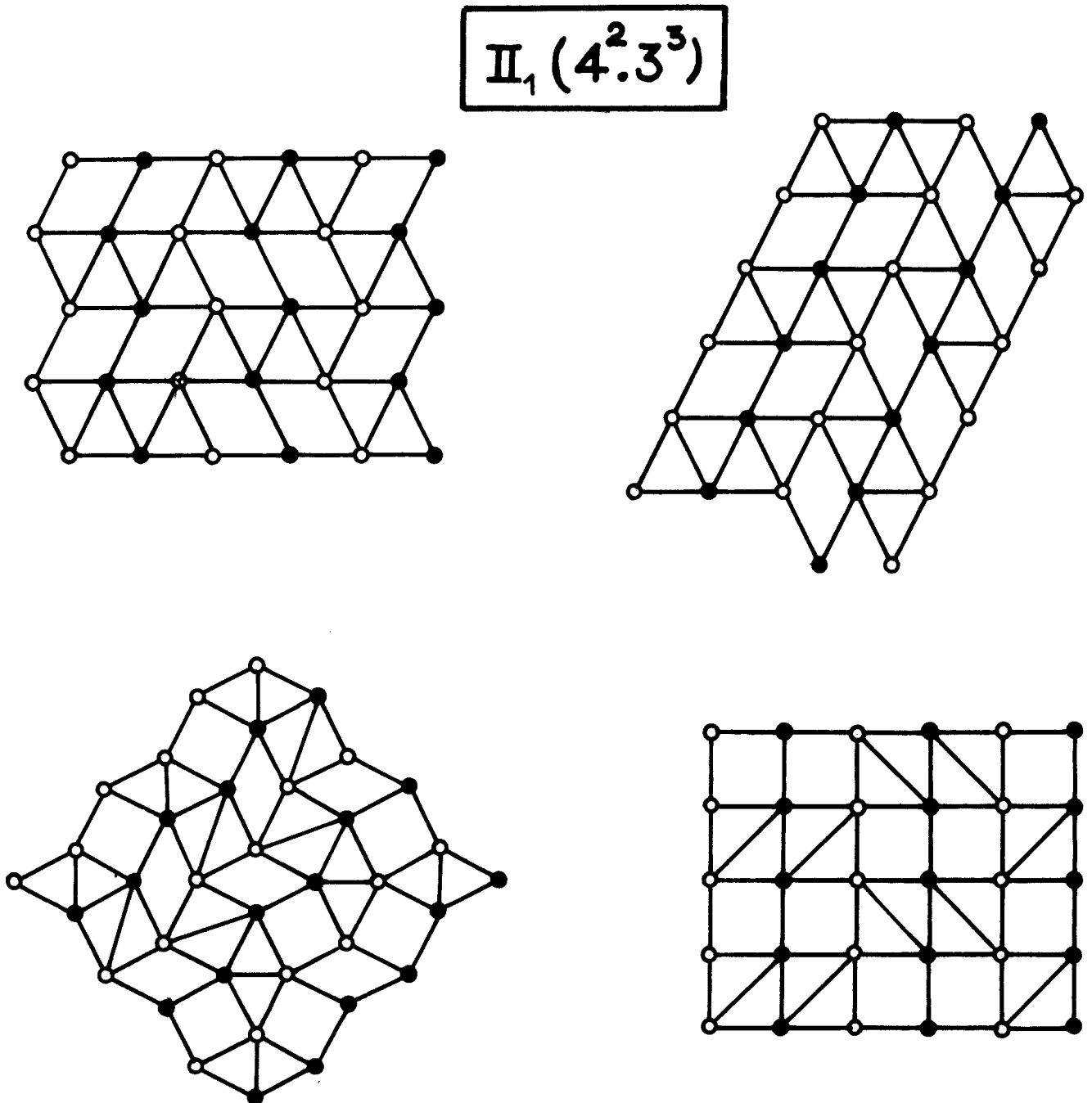
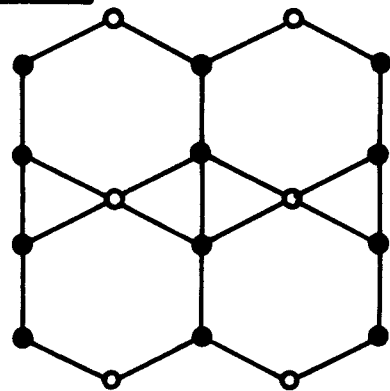
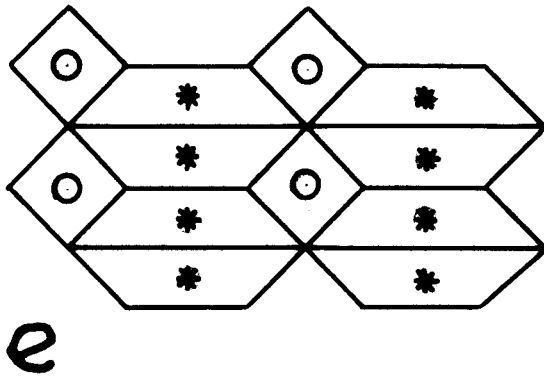


Figure 8

Il est possible de trouver une infinité de pavements non isomorphes ne contenant ni l'exemple de la figure 8 ni l'exemple de la figure 89 de [13] et contenant une infinité de sommets \bullet et une infinité de sommets \circ . On pourrait se proposer de trouver tous les pavements de "cycle" $(4^2.3^3)$. On pense qu'il y a unicité pour les strictement équilibrés de cycle \bullet ou \circ .

II 2 - "cycle" $(6^2.3^2)$ et II 3 "cycle" $(6.4^2.3)$.

$\Pi_2 (6^2.3^2)$



$\Pi_3 (6.4^2.3)$

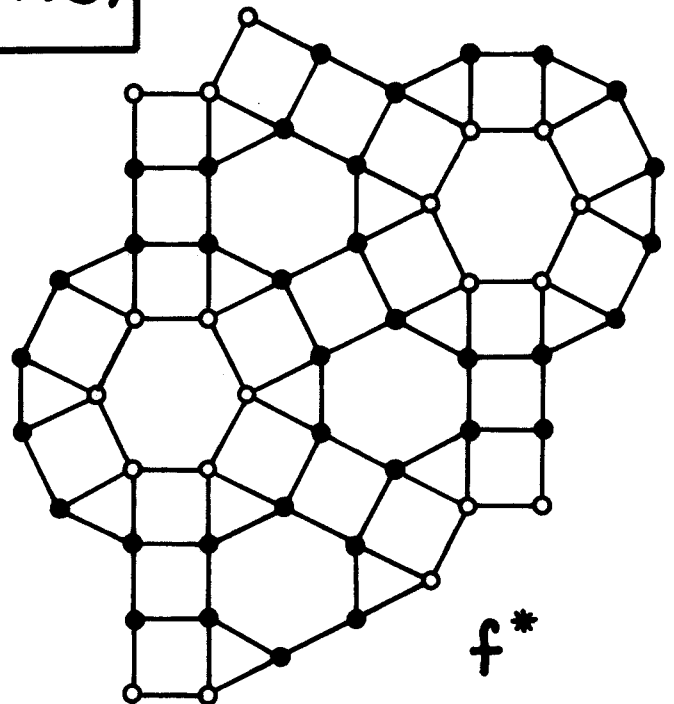
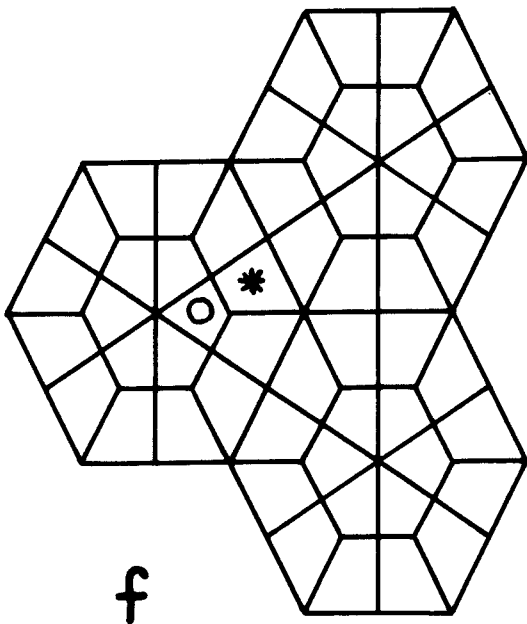


Figure 9

Dans la figure 9,

(e) pour les tuiles, (e^*) pour les sommets donne un exemple où le cycle est soit $(6^2, 3^2)$ marqué * pour les tuiles et ● pour les sommets soit $(6, 3, 6, 3)$ marqué o ;

(f) pour les tuiles, (f^*) pour les sommets donne un exemple où le cycle est soit $(6, 4^2, 3)$ marqué * pour les tuiles et ● pour les sommets soit $(6, 4, 3, 4)$ marqué o .

Montrons sommairement qu'il existe des pavements équilibrés sur les sommets de "cycle" $(6, 4^2, 3)$ ayant $12n$ sommets ● et une infinité de sommets o . Considérons le pavement strictement équilibré bien connu où chaque sommet a pour cycle o dans sa représentation régulière (pavement du plan à l'aide de 6-gones, de 4-gones et de 3-gones réguliers). Dans ce pavement un hexagone est entouré de 12 voisins et forme avec eux un dodécagone régulier. Si on fait une rotation de 30° autour du centre de l'hexagone de la partie du pavement intérieure au dodécagone, on obtient un pavement contenant 12 sommets ●, les autres étant o . En faisant l'opération précédente sur n dodécagones disjoints, on obtient le résultat. On peut montrer aussi qu'il existe une infinité de pavements non isomorphes ayant une infinité de sommets ● et une infinité de sommets o . Par contre, il n'existe pas de pavements ayant un nombre fini de sommets o . On peut montrer aussi qu'il existe une infinité de pavements non équilibrés de "cycle" $(6^2, 3^2)$ possédant une infinité de cycles ● et une infinité de cycles o ; par contre il n'existe pas de tels pavements ayant un nombre fini de cycles o .

III - Pavements faiblement équilibrés sur les côtés

III a Donnons d'abord quelques exemples de pavements faiblement équilibrés sur les côtés non équilibrés. C'est le cas dans la figure 10 de a où le cycle d'un côté est $\langle 4^2; 4^2 \rangle$, $\langle 4, 6; 3, 4 \rangle$ ou $\langle 6^2; 3^2 \rangle$ et de son dual a^* où le cycle d'un côté est $\langle 4^2; 4^2 \rangle$, $\langle 3, 4; 4, 6 \rangle$ ou $\langle 3^2; 6^2 \rangle$.

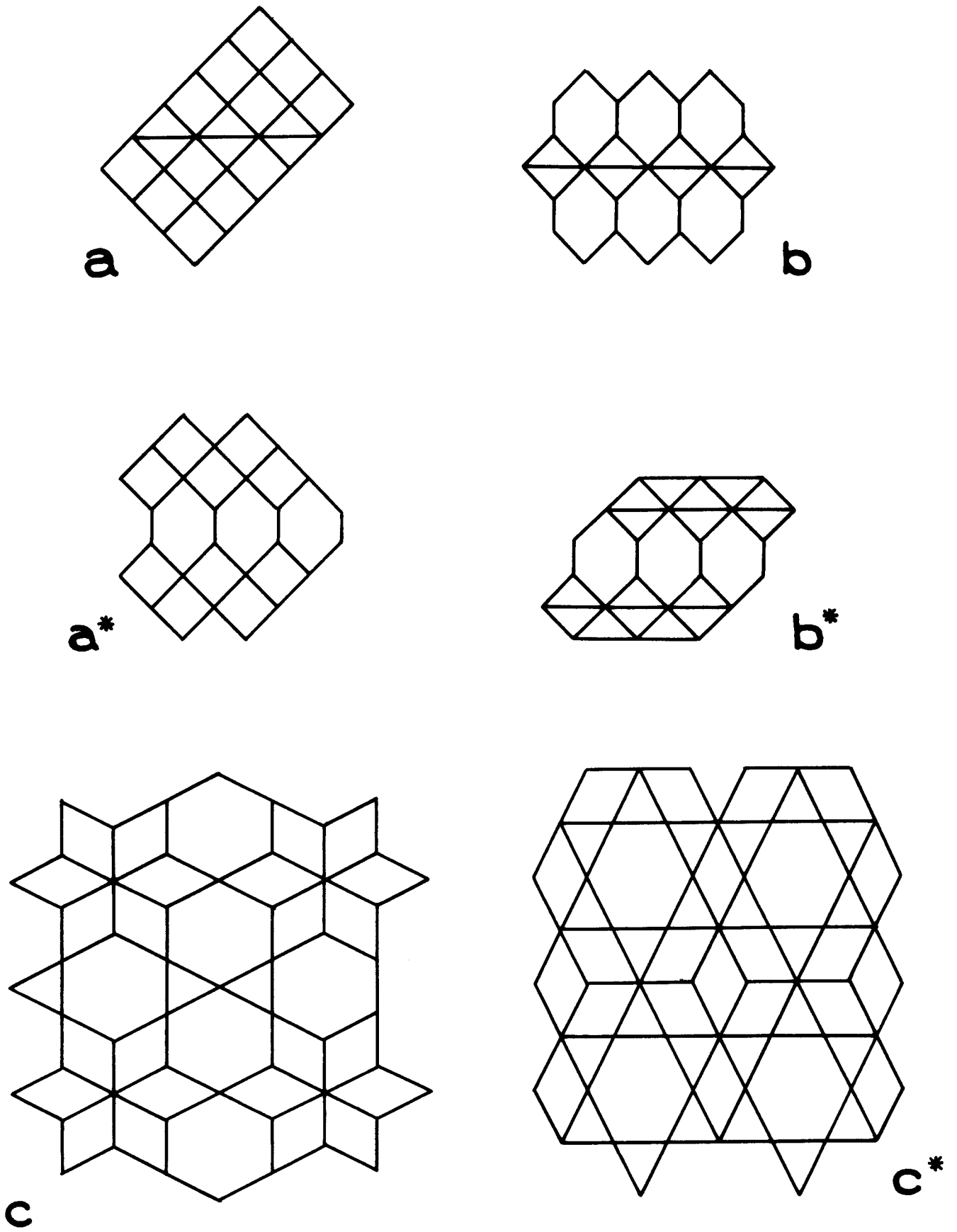


Figure 10

III b Donnons maintenant des exemples de pavements équilibrés sur les côtés non strictement équilibrés. Comme si le "cycle" d'un côté est $\langle 4^4 \rangle$ dans un pavement équilibré ce pavement l'est strictement on a seulement à considérer le cas où le cycle de ce pavement est $\langle 3^2, 6^2 \rangle$ ou $\langle 3, 4^2, 6 \rangle$. Dans la figure 10 b et son dual b^* fournissent des exemples où le cycle d'un côté est tantôt $\langle 3^2; 6^2 \rangle$ tantôt $\langle 3, 6; 3, 6 \rangle$ tantôt $\langle 6^2; 3^2 \rangle$. c est un exemple de pavement équilibré où le cycle d'un côté est soit $\langle 4^2; 3, 6 \rangle$ soit $\langle 3, 4; 4, 6 \rangle$ soit $\langle 3, 6; 4^2 \rangle$ et c^* un exemple où ce cycle est soit $\langle 3, 6; 4^2 \rangle$ soit $\langle 4, 6; 3, 4 \rangle$ soit $\langle 4^2; 3, 6 \rangle$.

7 - PAVEMENTS EQUIVALENCES

On a la

Proposition 7.1

Si un pavement est équivalencé (sur les tuiles ou sur les sommets) la valence ℓ vérifie $3 \leq \ell \leq 6$.

Preuve. A cause de la dualité, on peut se limiter au cas des tuiles. Si \mathfrak{X} a toutes ses tuiles de valence ℓ et si $\overline{\mathfrak{X}}_\varphi$ est l'union simplement connexe de φ tuiles de \mathfrak{X} on a $\varphi - S + N = 1$ (cf. §1).

Quand $\varphi \rightarrow \infty$, $S/\varphi \rightarrow \ell/2$ (un côté appartient à 2 tuiles et chaque tuile a ℓ côtés). De plus $N \rightarrow +\infty$ et $\overline{\lim} N/\varphi \leq \ell/3$ (un sommet appartient à au moins 3 tuiles fermées distinctes). On a donc $\overline{\lim} (\varphi - S + N)/\varphi \leq 1 - \ell/2 + \ell/3$ d'où $0 \leq 1 - \ell/6$ et $\ell \leq 6$.

Remarques.

1. Pour les tuiles au moins la Proposition 7.1 est connue depuis longtemps. Dans [8] Laves a donné une preuve qui semble fausse.
2. M. Gardner ([3] p. 249) a donné l'exemple d'une famille infinie de 7-gones convexes formant pavement provenant de l'Op Art. Cela ne contredit pas la Proposition 7.1 qui est valable sous l'hypothèse (*). Or dans l'exemple précédent, la famille infinie d'heptagones ne vérifie pas (*). Notons que l'exemple de Gardner est déjà dans [13] (cf. p. 77).

3. Il existe des empilements de \mathbb{R}^2 formé de translatés d'un polygone convexe d'un nombre arbitraire $k \geq 6$ de côtés et de densité aussi proche de 1 que l'on veut [on raisonne par récurrence : si la propriété est vérifiée pour un polygone de k côtés, on décompose ce polygone en un polygone de $k+1$ côtés et un triangle ayant pour sommet un des sommets du polygone primitif, triangle dont on peut prendre la surface aussi petite que l'on veut ; la récurrence démarre à partir du pavement du plan par des hexagones réguliers].

Je tiens à remercier ici R. Chaleat de l'aide technique qu'il m'a apportée.

B I B L I O G R A P H I E

=====

- 1 - BANTEGNIE R. : Animaux plans et groupes cristallographiques,
Pub. Math. U. Besançon (1976-1977).
- 2 - DELONE B. N. : Theoriya Planigonov,
Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem. 23 (1959), 365-386.
- 3 - GARDNER M. : Sixth book of Mathematical Games from Scientific American,
W.H. Freeman and C°, San Francisco 1975.
- 4 - GRUNBAUM B., SHEPHARD G. C. : The eighty one types of isohedrals
tilings of the plane,
Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 82 (1977), 177-196.
- 5 - GRUNBAUM B., SHEPHARD G. C. : The ninety one types of isogonal tilings
of the plane,
Trans. of Am. Math. Soc., 242 (1978), 335-353.
- 6 - GRUNBAUM B., SHEPHARD G. C. : Isotoxal tilings,
Pac. J. of Math., 76 (1978), 407-430.
- 7 - KERSCHNER R. B. : On paving the plane,
Am. Math. Month. 75 (1968), 839-844.
- 8 - LAVES P. : Ebenenteilung und Koordinationzahl,
Z. Kristallogr. 78 (1931), 208-241.

- 9 - LEBESGUE H. : Quelques conséquences simples de la formule d'Euler,
J. de Math. pures appl. (9) 19, (1940), 27-43.
- 10 - ORE O. : The four color problem,
Academic Press, New York London 1967.
- 11 - RICE M. : Pavements pentagonaux signalés à M. Gardner,
(non publié).
- 12 - SCHATTSCHEIDER D. : Tiling the plane with congruent pentagons,
Math. Mag. , 51-1 (1978) 29-44.
- 13 - STEINHAUS H. : Mathematical Snapshots,
Oxford U. Press New York (3ème éd. 1969).

Robert BANTEGNIE

Université de Besançon, Mathématiques

UMR 5584 - LEREA, CNRS. 070 654

25030 Besançon Cedex, France