THEORIE DES NOMBRES
BESANÇON

Années 1979-1980
et 1980-1981

INTRODUCTION A LA THEORIE D'IWASAWA

Bernard ORIAT

INTRODUCTION A LA THEORIE D'IWASAWA

Bernard ORIAT

Nous donnons ici une approche détaillée du théorème d'Iwasawa ; théorème qui affirme l'existence de λ, μ, ν tels que les p-groupes des classes d'idéaux $\mathcal{H}_n$ d'une $\mathbb{Z}_p$-extension soient, pour n assez grand, d'ordres $|\mathcal{H}_n| = p^{\mu p^n + \lambda n + \nu}$. Pour cela, nous suivons à peu près l'exposé que Lang réalise de la question dans [4]. Voici quelques titres qui traitent de l'introduction de ce théorème :

[1] Gillard R. Résultats sur les Γ-extensions cyclotomiques. Séminaire de théorie des nombres de Grenoble (1974).

[2] Iwasawa K. On Γ-extensions of algebraic number fields. Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959).

[3] Joly J. R. Etude de l'anneau $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$. Structure des Λ-modules de type fini. Séminaire de théorie des nombres de Grenoble (1969).

[4] Lang S. Cyclotomic fields. Springer Verlag (1978).

[5] Serre J. P. Classes des corps cyclotomiques d'après Iwasawa. Séminaire Bourbaki 1958-1959.

C'est dans [2] qu'Iwasawa a énoncé ce théorème. L'introduction de l'anneau Λ est due à Serre [5].

1 - L'anneau $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[X]]$.

On désigne par p un nombre premier et par Λ l'anneau $\mathbb{Z}_p[[X]]$ des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. Cet anneau est noethérien. Si f est un élément de Λ, $f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, f est inversible dans Λ si et seulement si $f(0) = a_o$ n'est pas congru à 0 modulo p. Il s'en suit que l'idéal (p, X) de Λ, engendré par p et X est l'unique idéal maximal de Λ.

Algorithme d'Euclide dans Λ.

Proposition 1.1 : Soit $f = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$ un élément de Λ. On suppose qu'il existe un entier n tel que $a_i \equiv 0 \bmod (p)$ pour $0 \leq i \leq n-1$ et $a_n \not\equiv 0 \bmod (p)$. Pour tout g appartenant à Λ, il existe un élément unique q de Λ et un polynôme unique r de $\mathbb{Z}_p[X]$ tels que :

$$\begin{cases} g = fq + r \\ d^o r \leq n-1 \quad \text{ou} \quad r = 0. \end{cases}$$

Pour démontrer cette proposition, nous utilisons le lemme :

Lemme 1.2 : Soit τ une application $\mathbb{Z}_p$-linéaire de Λ dans Λ telle que $\operatorname{Im} \tau \subset p\Lambda$. Alors $id_\Lambda + \tau$ est un $\mathbb{Z}_p$-automorphisme de Λ.

Démonstration : Il est clair que si x appartient à $\operatorname{Ker}(id_\Lambda + \tau)$, alors x appartient à $\bigcap_{i \geq 0} p^i \Lambda = \{0\}$. Donc $x = 0$ et $id_\Lambda + \tau$ est injectif. Soit x un élément de Λ. Définissons une suite $(b_i)_{i \geq 0}$ d'éléments de Λ de la façon suivante : Posons $b_o = x$. On a donc $b_o + \tau(b_o) \equiv x \bmod (p)$. Soit ensuite b_1 défini par $b_1 = -\tau(b_o)/p$. On a donc $b_o + p b_1 + \tau(b_o + p b_1) \equiv x \bmod (p^2)$. Ensuite, b_2 sera défini par $b_2 = -\tau(b_o + p b_1)/p$ etc... Posons $b = b_o + p b_1 + p^2 b_2 + \ldots$ On obtient alors $b + \tau(b) = x$ et nous avons montré que $id_\Lambda + \tau$ est surjectif.

Démontrons maintenant la proposition 1.1 : Pour cela introduisons les applications $\mathbb{Z}_p$-linéaires de Λ dans Λ ainsi définies :

$$\alpha : \sum_{i \geq 0} b_i X^i \rightarrow b_o + b_1 X + \ldots + b_{n-1} X^{n-1}.$$

$$\beta : \sum_{i \geq 0} b_i X^i \rightarrow \sum_{i \geq 0} b_{n+i} X^i.$$

L'existence de q et r équivaut à l'existence de q tel que $\beta(g) = \beta(qf)$. Mais $f = \alpha(f) + X^n \beta(f)$ d'où $\beta(g) = \beta\left(q\alpha(f)\right) + \beta\left(X^n q\beta(f)\right)$. Soit encore $\beta(g) = \beta\left(q\alpha(f)\right) + q\beta(f)$. Posons $z = q\beta(f)$. Comme $\beta(f)$ est inversible, il reste à résoudre, z étant l'inconnue : $\beta(g) = \beta\left(z\,\alpha(f)\,\beta(f)^{-1}\right) + z$. Mais $\alpha(f)$ appartient à $p\Lambda$. On déduit alors du lemme l'existence de z.

Définition d'un polynôme distingué : C'est un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}_p[X]$ de la forme $X^n + p a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 pX + a_o p$; avec a_i dans $\mathbb{Z}_p$.

Proposition 1.2 : Si f est un polynôme distingué, alors l'injection canonique de $\mathbb{Z}_p[X]$ dans Λ induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p$-modules : $\mathbb{Z}_p[X]/f\mathbb{Z}_p[X] \cong \Lambda/f\Lambda$.

Démonstration : On considère l'application canonique : $\mathbb{Z}_p[X] \rightarrow \Lambda/f\Lambda$. On déduit de l'algorithme d'Euclide dans Λ, que cette application est surjective. Si maintenant h appartient à $\mathbb{Z}_p[X] \cap f\Lambda$, divisons h par f dans $\mathbb{Z}_p[X]$. Nous obtenons $h = fq + h_1$ avec $d^o h_1 \leq d^o f - 1$. Le reste h_1 appartient à $f\Lambda$. On déduit alors de l'unicité de l'algorithme d'Euclide que $h_1 = 0$. Donc le noyau de cette application est $f\mathbb{Z}_p[X]$.

Définition du degré de Weierstrass : Si f est un élément de Λ, $f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, on appelle degré de Weierstrass de f, noté $\deg_W(f)$ le plus petit entier i tel que $a_i \not\equiv 0 \bmod (p)$. Lorsque f appartient à $p\Lambda$, on posera $\deg_W(f) = +\infty$.

Proposition 1.3 : Soit f un élément de Λ, n'appartenant pas à $p\Lambda$. Posons $n = \deg_W(f)$. Il existe un polynôme distingué h de degré n et un élément inversible u de Λ tels que $f = uh$.

Démonstration : Posons $f = \sum_{m \geq 0} a_m X^m$. On a donc $a_o \equiv 0 \bmod (p), \ldots,$ $a_{n-1} \equiv 0 \bmod (p)$ et $a_n \not\equiv 0 \bmod (p)$. Utilisons l'algorithme d'Euclide : il existe q et r tels que $X^n = fq + r$ avec $r \in \mathbb{Z}_p[X]$ et $d^o r \leq n - 1$. En réduisant modulo p, il reste $r \equiv 0 \bmod (p)$ et $X^n - r$ est un polynôme distingué de degré n. D'autre part, si $q = \sum_{i \geq 0} b_i X^i$, nous avons $1 = a_o b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_o$ et nous obtenons $a_n b_o \equiv 1 \bmod (p)$. Donc q est un élément inversible de Λ et on peut écrire $f = \left(X^n - r\right) q^{-1}$.

2 - Structure des Λ-modules de type fini.

La notion de base employée pour préciser cette structure est la notion de quasi-isomorphisme :

Définition d'un quasi-isomorphisme de Λ-modules : Soient V et W deux Λ-modules. Un quasi-isomorphisme α de V dans W est une application Λ-linéaire de V dans W, dont le noyau et le conoyau sont finis (Rappelons que Coker $\alpha = W/\mathrm{Im}\,\alpha$).

Remarques : La somme directe de deux quasi-isomorphismes est un quasi-isomorphisme. Le composé de deux quasi-isomorphismes est aussi un quasi-isomorphisme. Mais l'existence d'un quasi-isomorphisme de V dans W n'implique pas l'existence d'un quasi-isomorphisme de W dans V : Considérons en effet l'idéal de Λ engendré par p et X, noté (p,X), et la suite exacte :

$$0 \to (p,X) \to \Lambda \to \mathbb{F}_p \to 0.$$

L'injection canonique de (p,X) dans Λ est donc un quasi-isomorphisme. Mais il n'existe pas de quasi-isomorphisme de Λ dans (p,X) : soit θ une application Λ-linéaire de Λ dans (p,X). L'image de 1 par θ a un degré de Weierstrass supérieur à 1. Si ce degré est fini, on peut l'écrire sous la forme uh, u élément inversible et h polynôme distingué de degré supérieur à 1 (Proposition 1.3). On a alors $\mathrm{Im}\,\theta = h\Lambda$ et $(\Lambda : h\Lambda) = \left(\mathbb{Z}_p[X] : h\mathbb{Z}_p[X]\right)$

est infini. Donc Coker $\theta = (p, X)/h\Lambda$ est infini. Si l'image de 1 par θ appartient à $p\Lambda$, on a le même résultat.

La méthode que nous exposons ci-après s'inspire de la méthode classique de détermination de la structure des modules sur un anneau principal.

Définition de $\hat{R}$: Soit R une matrice à coefficients dans Λ. Soit n le nombre de ses colonnes. Ses lignes sont des éléments de Λ^n et on note $\hat{R}$ le sous-Λ-module engendré par les lignes de R. On considère le Λ-module $\Lambda^n/\hat{R}$. Il est de type fini. Réciproquement on a la proposition :

Proposition 2.1 : Si M est un Λ-module de type fini, il existe un entier n et une matrice R à n colonnes telle que M soit Λ-isomorphe à $\Lambda^n/\hat{R}$.

Démonstration : Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de générateurs de M. Faisons correspondre à la suite $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de Λ^n l'élément $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ de M. Le noyau de cette application Λ-linéaire est de type fini, puisque Λ est noethérien. Un système de générateurs de ce noyau forme les lignes de la matrice R cherchée.

Opérations élémentaires : Soit R une matrice, à n colonnes, à coefficients dans Λ. Une opération élémentaire sur les lignes de R est :

ou l'échange de deux lignes,

ou l'addition à une ligne d'une combinaison Λ-linéaire des autres lignes,

ou la multiplication d'une ligne par un élément inversible de Λ. Il est clair que si R' est déduite de R par une opération élémentaire sur les lignes, alors $\hat{R} = \hat{R}'$ et $\Lambda^n/\hat{R} = \Lambda^n/\hat{R}'$.

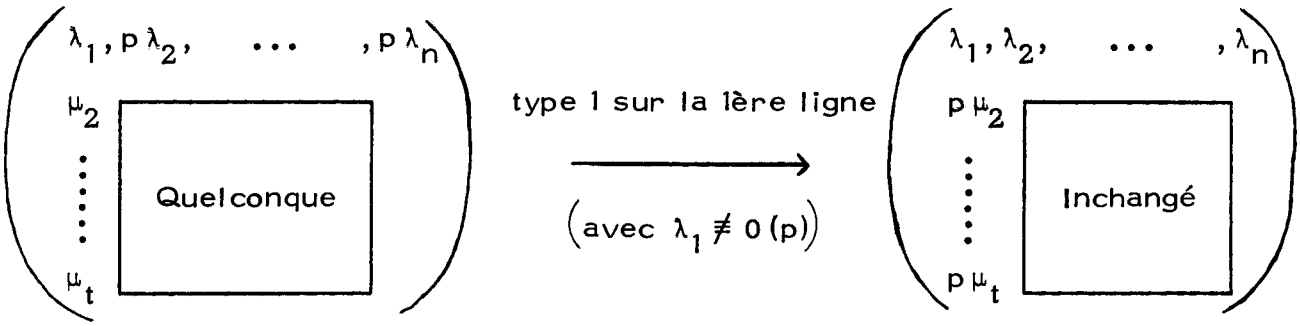
Une opération élémentaire sur les colonnes se définit de la même façon. Si R' est déduite de R par une opération élémentaire sur les colonnes, alors $\Lambda^n/\hat{R}'$ est isomorphe à $\Lambda^n/\hat{R}$.

En plus de ces opérations élémentaires utilisées dans la théorie classique des modules sur un anneau principal, nous allons introduire d'autres opérations dites "admissibles" :

On désigne par R une matrice à n colonnes et t lignes, à coefficients dans Λ. Posons $R = (a_{ij})$.

Définition d'une opération admissible de type 1 : Pour réaliser une telle opération sur la $i^{ème}$ ligne, il faut que $a_{ii} \not\equiv 0 \bmod (p)$ et $a_{ij} \equiv 0 \bmod (p)$ pour $j \neq i$. Cette opération consiste à diviser a_{ij} pour $j \neq i$ par p et à multiplier a_{ki}, pour $k \neq i$, par p. L'élément a_{ii} reste invariant.

En résumé :



Proposition 2.2 : On suppose que R vérifie l'hypothèse permettant de réaliser une opération admissible de type 1 sur l'une de ses lignes. Soit R' la matrice déduite de par cette opération. Alors il existe un quasi-isomorphisme de $\Lambda^n/\hat{R}$ dans $\Lambda^n/\hat{R}'$.

Démontrons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.3 : Soit M un Λ-module de type fini, annulé par une puissance de p et par un polynôme distingué. Alors M est fini.

Démonstration : Soit p^k la puissance de p qui annule M et λ le polynôme distingué qui annule M. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un système de générateurs de M. On déduit de l'application $(a_1, \ldots, a_n) \to a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n$ de Λ^n dans M, une application Λ-linéaire surjective de $(\Lambda/p^k\Lambda + \lambda\Lambda)^n$ sur M. Mais $\Lambda/p^k\Lambda + \lambda\Lambda \cong (\Lambda/\lambda\Lambda)/\left((p^k\Lambda + \lambda\Lambda)/\lambda\Lambda\right) = (\Lambda/\lambda\Lambda)/p^k(\Lambda/\lambda\Lambda)$
$\cong \left(\mathbb{Z}_p[X]/\lambda\mathbb{Z}_p[X]\right)/p^k\left(\mathbb{Z}_p[X]/\lambda\mathbb{Z}_p[X]\right)$ est fini.

Démonstration de la proposition : Reprenons la notation introduite plus haut :

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1, p\lambda_2, & \cdots & , p\lambda_n \\ \mu_2 & & \\ \vdots & \text{Quelconque} & \\ \mu_t & & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R' = \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2, & \cdots & , \lambda_n \\ p\mu_2 & & \\ \vdots & \text{Inchangé} & \\ p\mu_t & & \end{pmatrix}$$

Considérons l'application de Λ^n dans Λ^n qui fait correspondre à $(a_1, \ldots, a_n)$ l'élément $(pa_1, a_2, \ldots, a_n)$ de Λ^n. Il est clair que cette application envoie $\hat{R}$ dans $\hat{R}'$. On en déduit donc une application Λ-linéaire θ de $\Lambda^n/\hat{R}$ dans $\Lambda^n/\hat{R}'$ définie par $(a_1, \ldots, a_n) + \hat{R} \mapsto (pa_1, a_2, \ldots, a_n) + \hat{R}'$. Son image est $[(p\Lambda \times \Lambda \times \ldots \times \Lambda) + \hat{R}']/\hat{R}'$ et son conoyau est $\Lambda^n/(p\Lambda \times \Lambda \times \ldots \times \Lambda) + \hat{R}'$. Ce conoyau est annulé par p et par λ_1. Donc d'après le lemme, il est fini. D'autre part, on peut vérifier que son noyau est réduit 0. Donc θ un quasi-isomorphisme.

Définition d'une opération admissible de type 2 : Pour réaliser une telle opération sur la $i^{ème}$ ligne, il est nécessaire que $a_{ij} \equiv 0 \bmod (p^k)$ pour tout j, $a_{ki} \equiv 0 \bmod (p^k)$ pour tout k et enfin $a_{ii} \not\equiv 0 \bmod (p^{k+1})$. Cette opération consiste alors à diviser les termes de la $i^{ème}$ ligne par p^k.

Soit en résumé :

$$\begin{pmatrix} p^k\lambda_1, p^k\lambda_2, & \cdots & , p^k\lambda_n \\ p^k\mu_2 & & \\ \vdots & \text{Quelconque} & \\ p^k\mu_t & & \end{pmatrix} \xrightarrow[(\text{avec } \lambda_1 \not\equiv 0\,(p))]{\text{type 2 ; sur la 1ère ligne}} \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2, & \cdots & , \lambda_n \\ p^k\mu_2 & & \\ \vdots & \text{Inchangé} & \\ p^k\mu_t & & \end{pmatrix}$$

Proposition 2.3 : Soit R une matrice à coefficients dans Λ, pouvant subir une opération de type 2 sur la $i^{ème}$ ligne ; c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $a_{ij} \equiv 0 (p^k)$ pour tout j ; $a_{ki} \equiv 0 (p^k)$ pour tout k et

$a_{ii} \not\equiv 0 \bmod \left(p^{k+1}\right)$. Soit R' la matrice déduite de R par l'opération admissible de type 2 sur la $i^{ème}$ ligne. Alors il existe un quasi-isomorphisme de $\Lambda^n/\hat{R}$ dans $\left(\Lambda^n/\hat{R}'\right) \oplus \left(\Lambda/p^k\Lambda\right)$.

Démonstration : Reprenons la notation simplifiée : $\left(\text{avec } \lambda_1 \not\equiv 0\,(p)\right)$

$$R = \begin{pmatrix} p^k\lambda_1, p^k\lambda_2, \ldots, p^k\lambda_n \\ p^k\mu_2 \\ \vdots \\ p^k\mu_t \end{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \text{Quelconque} \\ \hline \end{array} \qquad \text{et} \qquad R' = \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \\ p^k\mu_2 \\ \vdots \\ p^k\mu_t \end{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \text{Inchangé} \\ \hline \end{array}$$

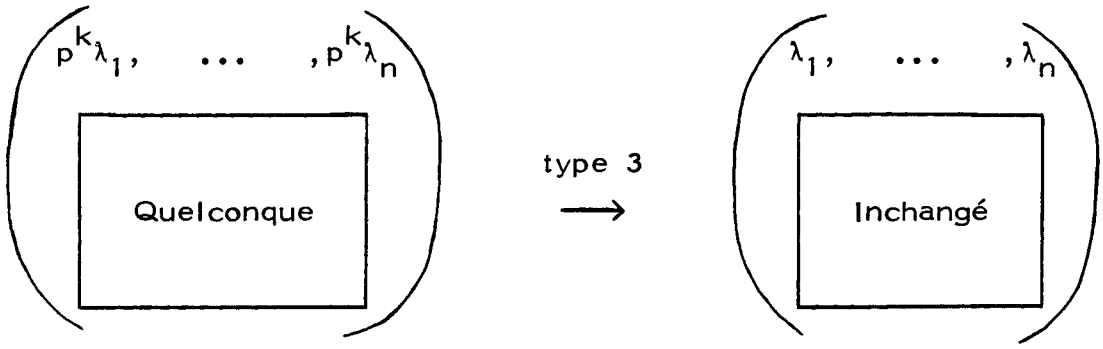
Considérons l'application de Λ^n dans $\left(\Lambda^n/\hat{R}'\right) \oplus \left(\Lambda/p^k\Lambda\right)$ qui fait correspondre à $\left(a_1, \ldots, a_n\right)$ l'élément $\left(\left(a_1, \ldots, a_n\right) + \hat{R}', a_1 + p^k\Lambda\right)$. Cette application envoie $\hat{R}$ dans 0. On en déduit donc une application θ Λ-linéaire de $\Lambda^n/\hat{R}$ dans $\left(\Lambda^n/\hat{R}'\right) \oplus \left(\Lambda/p^k\Lambda\right)$. Elle est injective. Pour montrer que le conoyau de cette application est fini, nous montrons qu'il est annulé par p^k et λ_1. Soit $\left(\left(b_1, \ldots, b_n\right) + \hat{R}', b_o + p^k\Lambda\right)$ un élément de $\left(\Lambda^n/\hat{R}'\right) \oplus \left(\Lambda/p^k\Lambda\right)$. Si on le multiplie par p^k, alors on constate qu'il est l'image par θ de $\left(p^k b_1, \ldots, p^k b_n\right) + \hat{R}$. Si on le multiplie par λ_1, on peut l'écrire :

$$\left[\lambda_1\left(b_1, \ldots, b_n\right) + \hat{R}', \lambda_1 b_o + p^k\Lambda\right] = \left[\left(\lambda_1 b_o, \ldots, \lambda_1 b_n - \lambda_n\left(b_1 - b_o\right)\right) + \hat{R}', \lambda_1 b_o + p^k\Lambda\right]$$

et il apparaît ainsi comme un élément de Im θ. Ceci termine la démonstration.

Définition d'une opération admissible de type 3 : Pour pouvoir réaliser une telle opération sur la $i^{ème}$ ligne de la matrice R, il faut que les termes de cette $i^{ème}$ ligne soient tous divisibles par p^k, c'est-à-dire : $a_{ij} \equiv 0 \bmod \left(p^k\right)$ pour tout j et qu'il existe un élément λ de Λ, non divisible par p, tel que $\left(\lambda\, a_{i1} p^{-k}, \ldots, \lambda\, a_{in} p^{-k}\right)$ appartienne à $\hat{R}$. L'opération admissible de type 3 sur la $i^{ème}$ ligne consiste à diviser les éléments de cette ligne par p^k.

En résumé, voici une opération de type 3 sur la première ligne (sous l'hypothèse : il existe $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \not\equiv 0 \bmod (p)$ tel que $(\lambda\lambda_1, \ldots, \lambda\lambda_n) \in \hat{R}$) :



Proposition 2.4 : Soit R une matrice susceptible de subir une opération admissible de type 3. Soit R' la matrice déduite de R par cette opération. Alors il existe un quasi-isomorphisme de $\Lambda^n/\hat{R}$ dans $\Lambda^n/\hat{R}'$.

Démonstration : Il suffit de considérer l'application naturelle de $\Lambda^n/\hat{R}$ dans $\Lambda^n/\hat{R}'$ déduite de l'inclusion $\hat{R} \subset \hat{R}'$. Elle est surjective. Son noyau est $\hat{R}'/\hat{R}$. Ce Λ-module est annulé par λ et par p^k. Il est donc fini, d'après le lemme énoncé plus haut.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème essentiel :

Théorème 2.5 : Soit R une matrice à coefficients dans Λ. Il existe une suite de polynômes distingués $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ et une suite d'opérations élémentaires ou admissibles permettant de transformer la matrice R en une matrice R' de la forme :

$$R' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 \ddots \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \ldots \lambda_r & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

La démonstration de ce théorème va utiliser la définition suivante :

Définition de $\deg_k R$: Soit toujours R une matrice à coefficients dans Λ et k un entier inférieur à son nombre de lignes et de colonnes. On considère l'ensemble de toutes les matrices qui peuvent être déduites de R par des suites d'opérations élémentaires ou admissibles, laissant invariant les (k-1) premières lignes. Si (a_{ij}) est une telle matrice, on s'intéresse au minimum : $\min_{\substack{i \geq k \\ j \geq k}} \deg_W (a_{ij})$; i et j étant supérieurs à k. On désigne par $\deg_k R$, le plus petit de ces minimum, (a_{ij}) parcourant l'ensemble des matrices considéré.

Remarque : Si R' est déduite de R par une opération élémentaire ou admissible laissant invariant les (k-1) premières lignes, alors $\deg_k R \leq \deg_k R'$.

En effet, l'ensemble des matrices qui peuvent être déduites de R' par des opérations élémentaires ou admissibles laissant invariant les (k-1) premières lignes est inclus dans l'ensemble des matrices qui peuvent être déduites de R de la même façon. D'où cette inégalité.

Pour démontrer le théorème 2.5, nous démontrons d'abord cette proposition :

Proposition 2.6 : Soit R une matrice à coefficients dans Λ. On peut, à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires ou admissibles, transformer R en une matrice R' de la forme

$$R' = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \\ & 0 \\ & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} & \\ & X \\ & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \\ & 0 \\ & \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont des polynômes distingués vérifiant les conditions :
Pour $1 \leq \ell \leq r$, $\quad d^o \lambda_\ell = \deg_\ell R'$.

Pour démontrer cette proposition, nous procédons par récurrence au moyen de la proposition suivante :

Proposition 2.7 : Soit R une matrice à coefficients dans Λ de la forme

$$R = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{r-1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Y \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ sont des polynômes distingués tels que pour $1 \leq \ell \leq r-1$, $d^o \lambda_\ell = \deg_\ell R$. Si le bloc $\begin{pmatrix} Y \end{pmatrix}$ n'est ni nul, ni vide, alors il existe une suite d'opérations élémentaires ou admissibles permettant de transformer R en une matrice R' de la forme

$$R' = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{r-1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Y' \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où λ_r est encore un polynôme distingué et où les polynômes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ vérifient encore les conditions : pour $1 \leq \ell \leq r$, $d^o \lambda_\ell = \deg_\ell R'$.

Démonstration : Posons $R = (\lambda_{ij})$ et convenons de noter λ_i pour λ_{ii}. A l'aide d'opérations admissibles de type 1 sur les lignes $1, 2, \ldots, r-1$, on peut multiplier les éléments de X par p autant de fois que l'on veut, sans modifier les $r-1$ premières lignes de R. Une permutation de colonnes d'indices supérieurs à r suivie d'une opération admissible de type 2 sur la $r^{ème}$ ligne peuvent alors (puisque $Y \neq (0)$) faire apparaître un $\lambda_r \not\equiv 0 \bmod (p)$. Nous avons donc vérifié ainsi que $\deg_r R \neq \infty$.

Il existe donc une suite de transformations admissibles et élémentaires laissant invariant les $r-1$ premières lignes et transformant la matrice R en une matrice $R' = (\lambda'_{ij})$ telle que : $\deg_r R' = \deg_W \lambda'_{ij}$ pour un i et un j supérieur à r. Effectuant une permutation de lignes et colonnes, nous pouvons supposer $i = j = r$. Multipliant la $r^{ème}$ colonne par une unité adéquate, nous pouvons supposer que $\lambda'_r = \lambda'_{rr}$ est un polynôme distingué. Il vérifie $d^o \lambda'_r = \deg_r R'$. Des opérations élémentaires laissant invariant les $r-1$ premières lignes permettent, en utilisant l'algorithme d'Euclide, de faire apparaître sur la $r^{ème}$ ligne des polynômes λ'_{rj} tels que : $d^o \lambda'_{rj} < d^o \lambda'_r$ pour $r \neq j$ et $d^o \lambda'_{rj} < d^o \lambda_j$ pour $j < r$. (Il est clair que $\lambda_j = \lambda'_j$ pour $1 \leq j \leq r-1$, puisque les $r-1$ premières lignes n'ont pas été modifiées).

Il reste à montrer que la matrice R' vérifie les conditions annoncées. Si $1 \leq \ell \leq r-1$, on déduit de la remarque faite plus haut que : $d^o \lambda_\ell = \deg_\ell R \leq \deg_\ell R' \leq d^o \lambda'_\ell = d^o \lambda_\ell$. Donc $d^o \lambda_\ell = \deg_\ell R'$. De même, par définition de λ'_r, on a $d^o \lambda'_r = \deg_r R$. Donc $d^o \lambda'_r = \deg_r R'$.

Montrons maintenant que $\lambda'_{ri} = 0$ pour $i \geq r+1$. La condition $d^o \lambda'_{ri} < d^o \lambda'_r$ et la définition de λ'_r : $d^o \lambda'_r = \deg_r R = \deg_r R'$, montre que $\deg_W (\lambda'_{ri}) = +\infty$, ou en d'autres termes $\lambda'_{ri} \equiv 0 \bmod (p)$. Supposons que les λ'_{ri}, $i \geq r+1$ ne soient pas tous nuls et soit k tel que p^k ne divise pas ces λ'_{ri}. En utilisant des opérations de type 1 sur les lignes $1, 2, \ldots, r-1$, on peut multiplier λ'_{rj} pour $1 \leq j \leq r-1$ par p autant de fois que l'on veut, de

façon à avoir $\lambda'_{rj} \equiv 0 \left(p^k\right)$. Utilisant encore l'opération de type 1 sur la $r^{ème}$ ligne, on fera apparaître un λ''_{ri}, $i \geq r+1$, tel que $\deg_W \left(\lambda''_{ri}\right) < d^o \lambda_r$. Contradiction.

Montrons enfin que $\lambda'_{ri} = 0$ pour $1 \leq i \leq r-1$. Nous avons $d^o \lambda'_{ri} < d^o \lambda_i$. Si pour $1 \leq i \leq r-1$, il existait un $\lambda'_{ri} \neq 0$, il devrait vérifier $\lambda'_{ri} \equiv 0 \bmod (p)$, sinon il contredirait la condition $\deg_i R' = d^o \lambda_i$. Mais en effectuant l'opération élémentaire de type 1 sur la $r^{ème}$ ligne, autant de fois que nécessaire, on peut faire apparaître un λ''_{ri}, tel que $\deg_W \lambda''_{ri} < d^o \lambda_i$. Contradiction.

Ainsi la matrice R' a bien la forme annoncée. Ceci termine la démonstration de la propriété 2.7. La proposition 2.6 s'en déduit immédiatement.

Pour terminer la démonstration du théorème, nous utilisons la proposition suivante :

Proposition 2.8 : Soit R une matrice à coefficients dans Λ de la forme

$$R = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ étant des polynômes distingués tels que pour $1 \leq \ell \leq r$, $d^o \lambda_\ell = \deg_\ell R$. Alors on peut déduire de R, à l'aide d'opérations élémentaires, la matrice :

$$R' = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Démonstration : Soit $R = (\lambda_{ij})$ la matrice donnée. Posons $\lambda_i = \lambda_{ii}$. Utilisant des opérations élémentaires et l'algorithme d'Euclide, on peut transformer R en $R' = (\lambda'_{ij})$, où λ'_{ij}, pour $i > r$, sont des polynômes tels que $d^o \lambda'_{ij} < d^o \lambda_j$ pour $i > r$ et $1 \leq j \leq r$. Comme ces opérations laissent invariantes les r premières lignes, et utilisant la remarque, on a donc encore $d^o \lambda_i = \deg_i R'$ pour $1 \leq i \leq r$.

Il reste à montrer que si $i > r$, alors $\lambda'_{ij} = 0$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et que $\lambda'_{ij} \neq 0$. La condition $d^o \lambda_\ell = \deg_\ell R'$ et la condition $d^o \lambda'_{i\ell} < d^o \lambda_\ell$ implique $\lambda'_{i\ell} \equiv 0 \bmod (p)$. Posons donc $\lambda'_{ik} = p \lambda''_{ik}$ et la $i^{ème}$ ligne de R' est de la forme :

$$(p\lambda''_{i1}, p\lambda''_{i2}, \ldots, p\lambda''_{in}).$$

D'autre part, posons $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r$. Il s'agit là d'un polynôme distingué et $(\lambda, 0, \ldots, 0)$, $(0, \lambda, 0, \ldots, 0)$, etc..., appartiennent à $\hat{R}'$. Donc $(\lambda\lambda''_{i1}, \ldots, \lambda\lambda''_{in})$ appartient à $\hat{R}'$. Utilisons alors l'opération admissible de type 3 sur la $i^{ème}$ ligne. On peut donc remplacer dans $\hat{R}'$ la $i^{ème}$ ligne par

$$(\lambda''_{i1}, \lambda''_{i2}, \ldots, \lambda''_{in}) \quad \text{sans changer les conditions } d^o \lambda_\ell = \deg_\ell R'.$$

En répétant cette opération le nombre de fois qu'il faut, on fait apparaître un terme d'indices ij qui contredit la condition $d^o \lambda_j = \deg_j$.

Ceci termine la démonstration de la proposition 2.8 et du théorème 2.5. Des résultats énoncés dans ce paragraphe, nous déduisons immédiatement :

Théorème 2.9 : Soit V un Λ-module de type fini. Il existe un entier s, des polynômes distingués $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, des entiers $m_1, \ldots, m_t$ et un quasi-isomorphisme de V dans $\Lambda^s \oplus \left(\oplus_i \left(\Lambda/\lambda_i\Lambda\right)\right) \oplus \left(\oplus_i \left(\Lambda/p^{m_i}\Lambda\right)\right)$.

Remarque : Si λ_1 et λ_2 sont deux polynômes distingués premiers entre eux, $\Lambda/\lambda_1\lambda_2\Lambda$ est quasi-isomorphe à $\Lambda/\lambda_1\Lambda \oplus \Lambda/\lambda_2\Lambda$. Par suite il est possible dans le théorème précédent d'imposer de plus à $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ d'être des puissances de polynômes distingués irréductibles. Avec cette condition supplémentaire, les paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, m_1, \ldots, m_t$ et s sont uniques. La démonstration de cette unicité s'appuie sur la notion de dimension d'un module libre sur un anneau principal (on utilise ici les anneaux $\mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{F}_p[[X]]$) et sur les lemmes suivants :

Lemme : Soient V et V' deux Λ-modules, T et T' leurs sous-modules de torsion respectifs. Si V est quasi-isomorphe à V', alors T est quasi-isomorphe à T' et V/T est quasi-isomorphe à V'/T'.

Lemme : Soient V et V' deux Λ-modules et λ un élément quelconque Λ. Si V est quasi-isomorphe à V', alors λV est quasi-isomorphe à $\lambda V'$ et $V/\lambda V$ est quasi-isomorphe à $V'/\lambda V'$.

3 - Module d'Iwasawa.

Définition des polynômes h_n et g_n : Pour tout entier n, on pose $h_n = (1+X)^{p^n} - 1$ et $g_n = h_n/X = 1 + (1+X) + \ldots + (1+X)^{p^n - 1}$. Ces polynômes sont des polynômes distingués de $\mathbb{Z}_p[X]$. On a $g_o = 1$ et

$$g_{n+1} = g_n\left[1 + (1+X)^{p^n} + \ldots + (1+X)^{(p-1)p^n}\right].$$

Définition d'un module d'Iwasawa : Soit V un Λ-module. Soit $\tau_1, \ldots, \tau_s$ des éléments en nombre fini de V. On dit que V est un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa si V est un Λ-module de type fini et si pour tout entier n le module quotient $V/g_n\left(XV + \mathbb{Z}_p\tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p\tau_s\right)$ est fini.

Cas particulier : Un 0-module d'Iwasawa est un Λ-module V de type fini tel que $V/\left((1+X)^{p^n} - 1\right)V$ soit fini pour tout n.

Proposition 3.1 : Soit V un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa. Soit α une application Λ-linéaire de V dans W. On suppose que le conoyau de α est fini. Alors W est un $(\alpha(\tau_1), \ldots, \alpha(\tau_s))$-module d'Iwasawa.

Démonstration : Puisque V est de type fini et que $\left(W : \alpha(V)\right)$ est fini, alors W est aussi de type fini. Posons $U = XV + \mathbb{Z}_p\tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p\tau_s$. On déduit de α une suite exacte :

$$V/g_nU \longrightarrow \alpha(V)/\alpha(g_nU) \longrightarrow 0.$$

De plus, on a $\alpha(g_nU) = g_n\alpha(U)$. Donc $\left(\alpha(V) : g_n\alpha(U)\right)$ est fini. Donc $\left(W : g_n\alpha(U)\right)$ est fini. Constatons enfin que

$$\alpha(U) = \alpha[XV + \mathbb{Z}_p\tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p\tau_s] = X\alpha(V) + \mathbb{Z}_p\alpha(\tau_1) + \ldots + \mathbb{Z}_p\alpha(\tau_s).$$

Donc $\alpha(U) \subset XW + \mathbb{Z}_p\alpha(\tau_1) + \ldots + \mathbb{Z}_p\alpha(\tau_s)$. Ceci montre que $W/g_n\left(XW + \mathbb{Z}_p\alpha(\tau_1) + \ldots + \mathbb{Z}_p\alpha(\tau_s)\right)$ est fini.

Lemme 3.2 : Soient V un Λ-module et U un sous-module de V. On suppose que V/U est fini. Alors il existe un entier n_o et une constante entière c tels que pour $n \geq n_o$, on ait $\left(g_nV : g_nU\right) = p^c$.

Démonstration : A partir de la multiplication par g_n on forme une suite exacte $V/U \longrightarrow g_nV/g_nU \longrightarrow 0$. Elle montre que $\left(g_nV : g_nU\right)$ est fini. De plus g_{n+1} est un multiple de g_n. On peut donc aussi former une suite exacte

$$g_nV/g_nU \longrightarrow g_{n+1}V/g_{n+1}U \longrightarrow 0$$

qui montre que les indices $\left(g_nV : g_nU\right)$ forment une suite décroissante ;

donc stationnaire. Remarquons enfin que tout Λ-module fini est aussi un $\mathbb{Z}_p$-module fini. Son ordre est une puissance de p.

Proposition 3.3 : Soit V un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa. Soit $U = XV + \mathbb{Z}_p \tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s$. Soit α un quasi-isomorphisme de V dans W. Si $Z = XW + \mathbb{Z}_p \alpha(\tau_1) + \mathbb{Z}_p \alpha(\tau_s)$, alors il existe un entier n_o et une constante entière c tels que pour $n \geq n_o$, on ait $(V : g_n U) = (W : g_n Z) p^c$.

Démonstration : A partir de α on forme la suite exacte

$$V/g_n U \xrightarrow{\alpha_n} \alpha(V)/\alpha(g_n U) \longrightarrow 0.$$

Le noyau de α_n est $(\operatorname{Ker}\alpha + g_n U)/g_n U \cong \operatorname{Ker}\alpha/(\operatorname{Ker}\alpha \cap g_n U)$. Cet ensemble est fini : De plus $g_{n+1} U \subset g_n U$. Donc $(\operatorname{Ker}\alpha : \operatorname{Ker}\alpha \cap g_n U)$ est une suite croissante et bornée. Donc stationnaire. Donc $|\operatorname{Ker}\alpha_n|$ est constant pour n assez grand. Il s'en suit que $(V : g_n U)/(\alpha(V) : \alpha(g_n U))$ est fini et constant pour n assez grand. D'autre part, $(W : \alpha(V))$ est fini. Comme V/U est fini, $\alpha(V)/\alpha(U)$ est fini. Donc $(W : \alpha(U))$ est fini et $Z/\alpha(U)$ est fini. L'application du lemme 3.2 montre que à partir d'un certain rang $(g_n Z : g_n \alpha(U))$ est constant. D'où le résultat.

Etudions maintenant les Λ-modules élémentaires, c'est-à-dire les Λ-modules qui apparaissent dans le théorème 2.9 :

Proposition 3.4 : Considérons Λ comme Λ-module. Pour toute suite $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$ de Λ^s, Λ n'est pas un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa.

Démonstration : Soit $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$ dans Λ^s. Nous avons $g_n(X\Lambda + \mathbb{Z}_p \tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s) \subset g_n \Lambda$ et une suite exacte

$$\Lambda/g_n(X\Lambda + \mathbb{Z}_p \tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s) \longrightarrow \Lambda/g_n\Lambda \longrightarrow 0.$$

Mais g_n est distingué. Donc $\Lambda/g_n\Lambda \cong \mathbb{Z}_p[X]/g_n\mathbb{Z}_p[X]$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de dimension $d^o g_n = p^n - 1$. Donc il est infini.

Proposition 3.5 : Soit m un entier positif. Soit $V = \Lambda/p^m\Lambda$. Pour tout $\tau_1, \ldots, \tau_s$ appartenant à V, V est un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa. Il existe un entier n_o et une constante entière c tels que pour $n \geq n_o$, on ait $|V/g_n(XV + \mathbb{Z}_p\tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p\tau_s)| = p^{mp^n + c}$.

Démonstration : Posons $U = XV + \mathbb{Z}_p\tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p\tau_s$. L'indice $(g_nV : g_nU)$ est constant à partir d'un certain rang d'après le lemme 3.2. D'autre part, on a : $V/g_nV = (\Lambda/p^mV)/g_n(\Lambda/p^mV) \simeq$

$(\Lambda/p^m\Lambda)/(p^m\Lambda + g_n\Lambda)/p^m\Lambda \simeq \Lambda/(p^m\Lambda + g_n\Lambda) \simeq$

$(\Lambda/g_n\Lambda)/(p^m\Lambda + g_n\Lambda)/g_n\Lambda \simeq (\Lambda/g_n\Lambda)/p^m(\Lambda/g_n\Lambda)$.

Mais g_n est distingué. Donc $\Lambda/g_n\Lambda \simeq \mathbb{Z}_p[X]/g_n\mathbb{Z}_p[X]$.

Donc $V/g_nV \simeq (\mathbb{Z}_p[X]/g_n\mathbb{Z}_p[X])/p^m(\mathbb{Z}_p[X]/g_n\mathbb{Z}_p[X])$.

Mais $d^o g_n = p^n - 1$. Donc $|V/g_nV| = p^{m(p^n-1)}$.

D'où le résultat.

Proposition 3.6 : Soit f un polynôme de $\mathbb{Z}_p[X]$ distingué, de degré d. Soit $V = \Lambda/f\Lambda$. On suppose que $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$ sont des éléments de V tels que V soit un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa. Alors il existe un entier n_o et une constante entière c tels que pour $n \geq n_o$, on ait :

$|V/g_n(XV + \mathbb{Z}_p\tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p\tau_s)| = p^{dn + c}$.

La démonstration de cette proposition utilise le lemme :

Lemme : Pour n assez grand, il existe des polynômes A_n et B_n tels que $g_{n+1} = g_n(p(1 + A_np) + B_nf)$.

Démonstration du lemme : On a dans Λ la congruence $f \equiv X^d \bmod (p)$. Si n_1 est tel que $p^{n_1} \geq d$, alors $X^{p^{n_1}} \equiv 0 \bmod (f, p)$. Donc $X^{p^n} \equiv 0 \bmod (f, p)$ pour $n \geq n_1$. Mais $(1 + X)^{p^n} \equiv 1 + X^{p^n} \bmod (p)$. Donc $(1 + X)^{p^n} \equiv 1 \bmod (f, p)$

et un calcul évident montre que $(1+X)^{p^{n+1}} \equiv 1 \bmod (f, p^2)$. On en déduit

$$1 + (1+X)^{p^{n+1}} + \ldots + (1+X)^{(p-1)p^{n+1}} \equiv p \bmod (f, p^2).$$

C'est-à-dire il existe A_{n+1} et B_{n+1} tels que

$$1 + (1+X)^{p^{n+1}} + \ldots + (1+X)^{(p-1)p^{n+1}} = p + A_{n+1} p^2 + B_{n+1} f.$$

Démonstration de la proposition : Considérons le quotient $g_n V/g_{n+1} V$. Pour n assez grand, nous déduisons du lemme l'égalité : $g_{n+1} V = g_n p V$; car f annule V et $1 + A_n p$ est un élément inversible de Λ.

D'autre part, si $U = XV + \mathbb{Z}_p \tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s$, nous avons $U \subset V$ et $g_n U \subset g_n V \subset V$. L'hypothèse $(V : g_n U)$ fini implique donc $(V : g_n V)$ est fini. Comme f est distingué, V est isomorphe à $\mathbb{Z}_p[X]/f\mathbb{Z}_p[X]$ et V est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de dimension d. Il en est de même de $g_n V$, pour tout n. De l'égalité $g_{n+1} V = g_n p V$, pour n assez grand, on déduit que $(g_n V : g_{n+1} V) = p^d$. Il existe donc une constante c_o, telle que pour n assez grand $(V : g_n V) = p^{dn + c_o}$. Il reste à s'occuper de l'indice $(g_n V : g_n U)$. Le lemme 3.2 permet de conclure qu'il est constant pour n assez grand. D'où le résultat.

Remarque : On désigne toujours par f un polynôme distingué. Lorsqu'il existe un entier n tel que f et g_n ne soient pas premiers entre eux, alors pour tout $\tau_1, \ldots, \tau_s$ appartenant à $\Lambda/f\Lambda$, $\Lambda/f\Lambda$ n'est pas un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa. Par contre, si f est premier à h_n pour tout n, alors pour tout $\tau_1, \ldots, \tau_s$ appartenant à $\Lambda/f\Lambda$, $\Lambda/f\Lambda$ est un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa. Quant au module $\Lambda/X^d\Lambda$, il peut, suivant les valeurs de $\tau_1, \ldots, \tau_s$, être ou ne pas être un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa.

Proposition 3.7 : Soit V un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa. On suppose que V se décompose en somme directe de deux modules $V = V' \oplus V''$. Posons $\tau_i = \tau_i' + \tau_i''$ avec $\tau_i' \in V'$ et $\tau_i'' \in V''$. Alors V' est un $(\tau_1', \ldots, \tau_s')$-

module d'Iwasawa et V'' est un $(\tau_1'', \ldots, \tau_s'')$-module d'Iwasawa. Soit $U = XV + \mathbb{Z}_p \tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s$; soit $U' = XV' + \mathbb{Z}_p \tau_1' + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s'$ et $U'' = XV'' + \mathbb{Z}_p \tau_1'' + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s''$. Il existe un entier n_o et une constante c tels que $n \geq n_o$ implique :

$$(V : g_n U) = (V' : g_n U')(V'' : g_n U'') p^c.$$

Démonstration : La première affirmation se déduit de la proposition 3.1. Ensuite nous avons $\mathbb{Z}_p \tau_1 \subset \mathbb{Z}_p \tau_1' + \mathbb{Z}_p \tau_1''$, d'où $U \subset U' \oplus U''$; soit encore $g_n U \subset g_n U' \oplus g_n U''$. D'autre part, $V/g_n(U' \oplus U'')$ est isomorphe à $V'/g_n U' \oplus V''/g_n U''$. Pour conclure, on applique le lemme 3.2 à $U' \oplus U''$ et U : Il existe un entier n_o et une constante c tels que : pour $n \geq n_o$, on ait : $(g_n(U' \oplus U'') : g_n U) = p^c$.

Théorème 3.8 : Soit V un Λ-module. Si $\tau_1, \ldots, \tau_s$ sont des éléments de V et si V est un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa, alors il existe des entiers positifs n_o, μ, λ et un entier relatif ν tels que $n \geq n_o$ implique :

$$|V/g_n(XV + \mathbb{Z}_p \tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s)| = p^{\mu p^n + \lambda n + \nu}.$$

Démonstration : Par définition, V est un Λ-module de type fini. Utilisons le théorème 2.9 : il existe un entier r, des polynômes distingués $f_1, \ldots, f_t$, des entiers $m_1, \ldots, m_u$ et un quasi-isomorphisme de V dans $\Lambda^r \oplus \left(\oplus_i (\Lambda/f_i \Lambda)\right) \oplus \left(\oplus_i (\Lambda/p^{m_i} \Lambda)\right)$. D'après la proposition 3.1, ce Λ-module est un module d'Iwasawa. Donc chaque composante aussi (proposition 3.7). On déduit alors de la proposition 3.4 que $r = 0$. L'application des propositions 3.3, 3.5, 3.6 et 3.7 fait apparaître les entiers $\mu = \Sigma m_i$ et $\lambda = \Sigma\, d^o f_i$.

Définition : Nous dirons que μ et λ sont les paramètres associés au module d'Iwasawa V.

Remarques : Ces paramètres, λ et μ, ne dépendent pas des valeurs $\tau_1, \ldots, \tau_s$ (bien que V puisse, suivant ces valeurs, être ou ne pas être un module d'Iwasawa). En effet, supposons que V soit un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa et aussi un $(\tau'_1, \ldots, \tau'_s)$-module d'Iwasawa. Alors il est clair que V est encore un $(\tau_1, \ldots, \tau_s, \tau'_1, \ldots, \tau'_s)$-module d'Iwasawa. Posons $U = XV + \mathbb{Z}_p \tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s$, $U' = XV + \mathbb{Z}_p \tau'_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau'_s$ et $W = XV + \mathbb{Z}_p \tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s + \mathbb{Z}_p \tau'_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau'_s$. L'application du lemme 3.2 à W et U d'une part et W et U' d'autre part, montre que pour n assez grand les indices $(g_n V : g_n U)$ et $(g_n V : g_n U')$ sont constants.

Les paramètres λ et μ sont conservés par quasi-isomorphisme (Proposition 3.3).

Par contre, la quantité ν dépend de $\tau_1, \ldots, \tau_s$. De plus, elle peut être négative comme le montre l'exemple suivant : Soit $V = \Lambda/p\Lambda$. Choisissons pour τ la classe de $1 + X$ modulo $p\Lambda$. Alors V est τ-module d'Iwasawa. On vérifie que l'on a $\mu = 1$, $\lambda = 0$ et $\nu = -1$.

4 - $\mathbb{Z}_p$-extensions :

Définition d'une $\mathbb{Z}_p$-extension : Une extension K_∞/K_o est dite une $\mathbb{Z}_p$-extension, si elle est galoisienne et si son groupe de Galois est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. On note ce groupe de Galois Γ. Pour tout entier n, Γ/Γ^{p^n} (on note Γ multiplicativement) est cyclique d'ordre p^n. Soit K_n le sous-corps de K_∞, contenant K_o et correspondant par la théorie de Galois à Γ^{p^n}. L'extension K_n/K_o est cyclique de degré p^n. Les corps $K_o, K_1, \ldots, K_n, \ldots$ forment une suite croissante. Ce sont les seuls sous-corps de K_∞. On a évidemment $K_\infty = \bigcup_{i \geq 0} K_i$. Remarquons aussi que, pour tout entier d, K_∞/K_d est aussi une $\mathbb{Z}_p$-extension.

La proposition suivante précise la ramification à l'intérieur d'une $\mathbb{Z}_p$-extension. Elle résulte de la théorie classique de la ramification :

Proposition 4.1 : Soit K_∞/K_o une $\mathbb{Z}_p$-extension. Aucun idéal de K_o premier à p ne se ramifie dans K_∞/K_o. Il existe au moins un idéal de K_o au-dessus de p ramifié dans K_∞/K_o. Si $\mathfrak{p}$ est un tel idéal, il existe un entier $n_\mathfrak{p}$ tel que $K_\infty/K_{n_\mathfrak{p}}$ soit totalement ramifiée pour les idéaux au-dessus de $\mathfrak{p}$ et $K_{n_\mathfrak{p}}/K_o$ soit non ramifiée en $\mathfrak{p}$. Il existe donc un entier $d\left(= \sup_\mathfrak{p} n_\mathfrak{p}\right)$ tel que tout idéal de K_d soit : ou totalement ramifié dans K_∞/K_d ; ou non ramifié dans K_∞/K_d.

Introduisons maintenant l'algèbre Λ : Nous désignons toujours par K_∞/K_o une $\mathbb{Z}_p$-extension. Soit γ un $\mathbb{Z}_p$-générateur de Γ : nous voulons dire par là que si nous choisissons un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p$ sur Γ, γ est l'image de 1 par cet isomorphisme et γ^u est l'image de u. Soit $\Gamma_n = \Gamma/\Gamma^{p^n}$ et soit γ_n la classe de γ modulo Γ^{p^n}, c'est-à-dire la restriction de γ à K_n. Le groupe Γ_n est cyclique d'ordre p^n et γ_n en est un générateur.

On considère l'isomorphisme

$$\mathbb{Z}_p[\Gamma_n] \cong \mathbb{Z}_p[T]/\left(T^{p^n}-1\right)\mathbb{Z}_p[T],$$

induit par l'application : $\begin{cases} \mathbb{Z}_p[T] \to \mathbb{Z}_p[\Gamma_n] \\ T \to \gamma_n. \end{cases}$

Changeons T en X+1. On a donc un isomorphisme :

$$\mathbb{Z}_p[\Gamma_n] \cong \mathbb{Z}_p[X]/\left(\left(1+X\right)^{p^n}-1\right)\mathbb{Z}_p[X].$$

induit par l'application $\begin{cases} \mathbb{Z}_p[X] \to \mathbb{Z}_p[\Gamma_n] \\ 1+X \to \gamma_n. \end{cases}$

Comme le polynôme $h_n = \left(1+X\right)^{p^n} - 1$ est distingué, nous avons un isomorphisme (Proposition 1.2) :

$$\mathbb{Z}_p[X]/h_n\,\mathbb{Z}_p[X] \cong \Lambda/h_n\Lambda,$$

induit par l'injection canonique : $\mathbb{Z}_p[X] \to \Lambda$.

Considérons maintenant le système projectif formé par les $\mathbb{Z}_p[\Gamma_n]$. Les homomorphismes utilisés : $\mathbb{Z}_p[\Gamma_{n+1}] \to \mathbb{Z}_p[\Gamma_n]$ sont induits par les restrictions : $\begin{cases} \Gamma_{n+1} \to \Gamma_n \\ \gamma_{n+1} \to \gamma_n . \end{cases}$

D'autre part, h_n divise h_{n+1} et nous pouvons considérer le système projectif formé des $\Lambda/h_n\Lambda$, avec les homomorphismes naturels : $\Lambda/h_{n+1}\Lambda \to \Lambda/h_n\Lambda$. Avec les isomorphismes définis plus haut, nous avons des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p[\Gamma_{n+1}] & \cong & \Lambda/h_{n+1}\Lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_p[\Gamma_n] & \cong & \Lambda/h_n\Lambda \end{array}$$

qui montrent l'existence d'un isomorphisme de limites projectives :

$$\varprojlim \mathbb{Z}_p[\Gamma_n] \cong \varprojlim \Lambda/h_n\Lambda .$$

Remarquons, avant d'énoncer la proposition suivante, que $\varprojlim \mathbb{Z}_p[\Gamma_n]$ contient $\varprojlim \Gamma_n = \Gamma$. Ainsi Γ apparaît comme un sous-groupe du groupe multiplicatif de la $\mathbb{Z}_p$-algèbre $\varprojlim \mathbb{Z}_p[\Gamma_n]$.

Proposition 4.2 : Les $\mathbb{Z}_p$-algèbres $\varprojlim \mathbb{Z}_p[\Gamma_n]$ et $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[X]]$ sont isomorphes. Cet isomorphisme fait correspondre $X + 1$ à γ.

Démonstration : Nous allons montrer que $\varprojlim \Lambda/h_n\Lambda$ et Λ sont isomorphes : on considère les surjections canoniques : $\Lambda \to \Lambda/h_n\Lambda$ et on en déduit un $\mathbb{Z}_p$-homomorphisme :

$$\Lambda \to \varprojlim \Lambda/h_n\Lambda$$

qui associe à λ la suite $\left(\lambda + h_n\Lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Nous avons $h_{n+1}/h_n = 1 + \left(1+X\right)^{p^n} + \ldots + \left(1+X\right)^{p^n(p-1)}$ et ce polynôme appartient à l'idéal maximal de Λ : (p, X). On en déduit que h_n appar-

tient à $(p,X)^{n+1}$. Cet idéal est l'ensemble des séries de la forme $p^{n+1}a_o + p^n a_1 X + \ldots + p a_n X^n + a_{n+1}X^{n+1} + \ldots$; $a_o, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ étant des éléments de $\mathbb{Z}_p$. On voit donc que l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (p,X)^n$ est réduite à $\{0\}$. Il en est de même de l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} h_n\Lambda$. Ceci montre que l'homomorphisme considéré est injectif.

Pour démontrer la surjectivité, le concept suivant de limite semble utile : Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de Λ, et si $\lambda_n = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ni}X^i$, on dira que $\lim_{n\to\infty}\lambda_n$ existe si $\lim_{n\to\infty} a_{ni}$ existe pour tout i. On pose évidemment $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\lim_{n\to\infty} a_{ni}\right)X^i$.

Le lemme suivant est évident :

Lemme : Soit une suite $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Λ, telle que pour tout i, μ_i appartienne à $(p,X)^i$. Soit $\lambda_n = \sum_{i=0}^{n} \mu_i$. Alors la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens défini plus haut.

Revenons maintenant à l'homomorphisme considéré : Soit $(\lambda_n + h_n\Lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\varprojlim \Lambda/h_n\Lambda$. Posons $\lambda_{n+1} = \lambda_n + h_n\mu_n$. Nous avons donc $\lambda_n = \lambda_o + \mu_o h_o + \ldots + \mu_{n-1}h_{n-1}$. Comme h_i appartient à $(p,X)^{i+1}$, on déduit du lemme précédent la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Soit $\lambda = \lim_{n\to\infty}\lambda_n$. Lorsque $m > n$, nous avons aussi :

$$\lambda_m - \lambda_n = h_n[\mu_m h_m/h_n + \mu_{m-1}h_{m-1}/h_n + \ldots + \mu_n].$$

Désignons par $\nu_{m\,n}$ la quantité entre crochets. Utilisant à nouveau le lemme, nous voyons que la suite $(\nu_{mn})_{m\in\mathbb{N}}$ converge. Soit ν_n sa limite. Nous avons alors $\lambda - \lambda_n = h_n\nu_n$ et ceci montre que $\lambda + h_n\Lambda = \lambda_n + h_n\Lambda$. Ainsi, λ est l'antécédent de $(\lambda_n + h_n\Lambda)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous avons montré que l'homomorphisme considéré, de Λ dans $\varprojlim \Lambda/h_n\Lambda$, est un isomorphisme. Dans cet isomorphisme $1+X$ correspond à $(1 + X + h_n\Lambda)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans $\varprojlim \mathbb{Z}_p[\Gamma_n]$, $1+X$

correspond donc à la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et cette suite n'est autre que γ, puisque l'on a identifié $\varprojlim \Gamma_n$ et Γ.

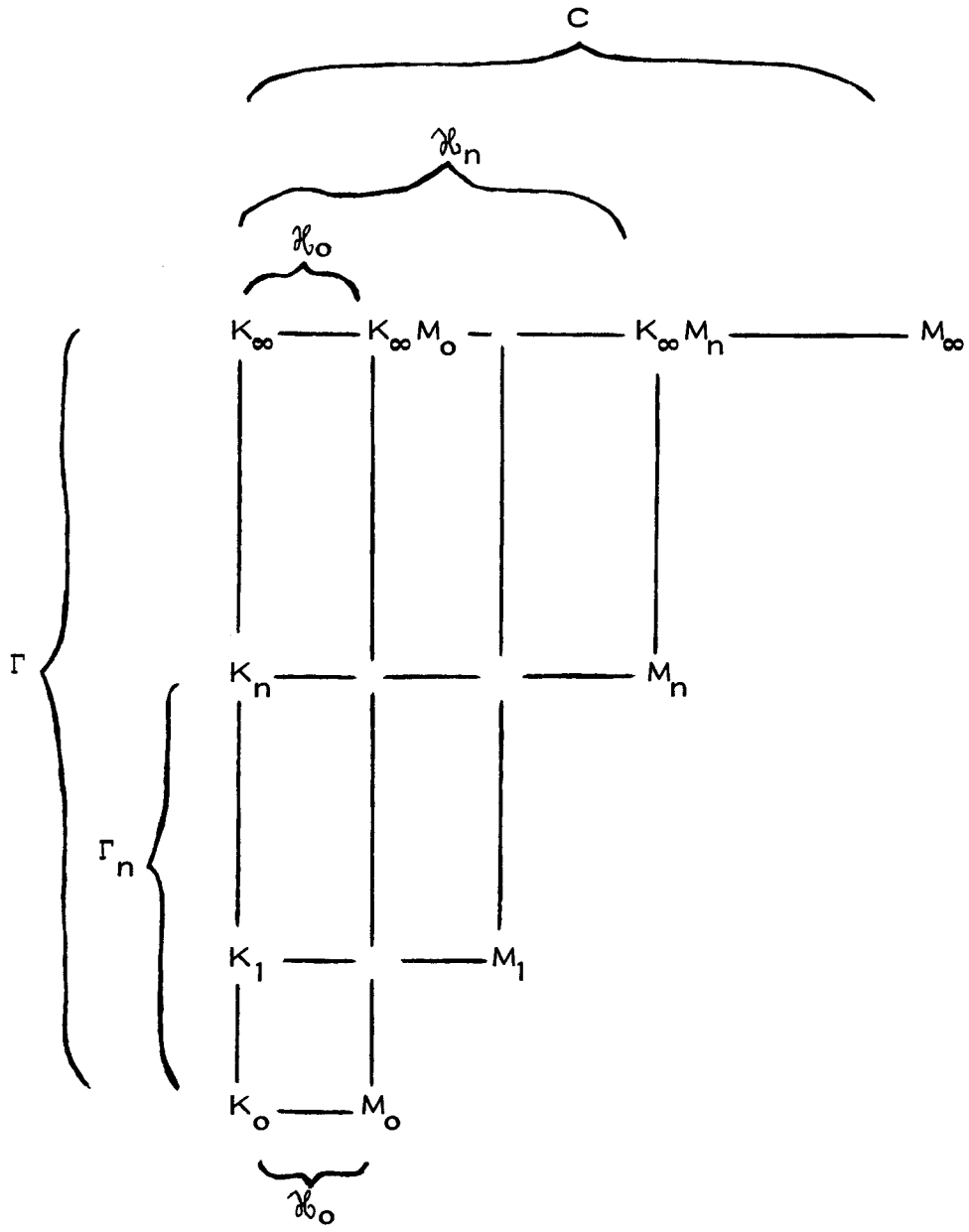
Définition de $\mathcal{H}_i$ et du Λ-module C : On conserve les mêmes notations. Soit $\mathcal{H}_i$ le p-groupe des classes d'idéaux de K_i. La suite $(\mathcal{H}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ constitue, avec les applications normes un système projectif, dont on nomme la limite C.

$$C = \varprojlim \mathcal{H}_i .$$

Comme chaque $\mathcal{H}_i$ est un $\mathbb{Z}_p[\Gamma_i]$-module, C se trouve donc être un module sur $\varprojlim \mathbb{Z}_p[\Gamma_i]$. En vertu de l'isomorphisme de la proposition 4.2, C est donc un Λ-module.

Définition de $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$: Nous supposons désormais que tous les idéaux de K_o sont non ramifiés dans K_∞/K_o, sauf s d'entre eux notés $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_s$. Nous les supposerons totalement ramifiés dans K_∞/K_o. Cette hypothèse ne restreint pas la généralité du résultat que nous avons en vue : en effet, d'une part, on ne cherche à obtenir que des résultats "asymptotiques" c'est-à-dire valables à partir d'une certaine hauteur dans la $\mathbb{Z}_p$-extension et d'autre part, nous avons vu que la ramification d'une $\mathbb{Z}_p$-extension est ainsi faite, au moins à partir d'un certain rang (Proposition 4.1).

Soit M_i le p-corps de classe de Hilbert de K_i. Cela veut dire que M_i/K_i est la p-extension abélienne non ramifiée maximale de K_i. Dans l'isomorphisme de réciprocité, $\mathrm{Gal}(M_i/K_i)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_i$. L'extension M_i/K_o est galoisienne et le groupe $\mathrm{Gal}(K_i/K_o) = \Gamma_i$ opère sur $\mathrm{Gal}(M_i/K_i)$ par conjugaison. Ainsi $\mathrm{Gal}(M_i/K_i)$ et $\mathcal{H}_i$ sont des $\mathbb{Z}[\Gamma_i]$-modules isomorphes.


C
$\mathcal{H}_n$
$\mathcal{H}_o$
K_∞
$K_\infty M_o$
$K_\infty M_n$
M_∞
Γ
K_n
M_n
Γ_n
K_1
M_1
K_o
M_o
$\mathcal{H}_o$

Soit $M_\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$. L'extension M_∞/K_o est galoisienne et on note G son groupe de Galois. Nous avons aussi $M_\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (M_i K_\infty)$ et $\mathrm{Gal}(M_i K_\infty/K_\infty) \cong \mathrm{Gal}(M_i/K_i) \cong \mathcal{X}_i$. Ainsi $\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty) = \varprojlim \mathrm{Gal}(M_i K_\infty/K_\infty)$ est isomorphe à $\varprojlim \mathcal{X}_i = C$ (la restriction des automorphismes correspond, par le corps de classes, à la norme). Par la suite, nous poserons $C = \varprojlim (M_\infty/K_\infty)$. On a évidemment $G/C \cong \Gamma$ et Γ opère sur C par conjugaison.

Introduisons maintenant I_i groupe d'inertie dans M_∞/K_o de $\mathfrak{P}_i$. Comme $\mathfrak{P}_i$ est totalement ramifié dans K_∞/K_o, G est produit semi-direct de C et I_i. Par restriction à K_∞, I_i est isomorphe à Γ et nous désignons par γ_i l'élément de I_i qui correspond ainis à γ. Pour i de 1 à s, on définit τ_i par l'égalité $\tau_i \gamma_1 = \gamma_i$. Ainsi $\tau_1 = 1$ et $\tau_1, \ldots, \tau_s$ sont des éléments de C.

Proposition 4.3 : On suppose que les idéaux ramifiés dans K_∞/K_o le sont totalement. Le groupe C est noté multiplicativement et l'action de $\varprojlim \mathbb{Z}_p[\Gamma_i]$ sur C exponentiellement. Pour tout entier n, on a un isomorphisme :

$$\mathcal{X}_n \cong C/[C^{\gamma-1}{}^{\mathbb{Z}_p}_{\tau_1} \ldots {}^{\mathbb{Z}_p}_{\tau_s}]^{1+\gamma+\ldots+\gamma^{p^n-1}}.$$

Démonstration : Commençons par démontrer l'isomorphisme relatif à $\mathcal{X}_o$.

Montrons tout d'abord que G', groupe dérivé de G est égal à $C^{\gamma-1}$. L'inclusion $G' \supset C^{\gamma-1}$ est évidente : en effet si c appartient à C et si $\overset{\circ}{\gamma}$ est un élément de G prolongeant γ, on a $c^{\gamma-1} = \overset{\circ}{\gamma}{}^{-1} c \overset{\circ}{\gamma} c^{-1}$. Donc $c^{\gamma-1}$ appartient à G'. Réciproquement, vérifions que $G/C^{\gamma-1}$ est abélien : On peut d'abord vérifier que $C^{\gamma-1}$ est un sous-groupe distingué de G. Il s'en suit que $C/C^{\gamma-1}$ est un sous-groupe distingué de $G/C^{\gamma-1}$. Le quotient de ces groupes est $G/C \cong \Gamma$. Soit $\overset{\circ}{\gamma}$ un relèvement de γ dans $G/C^{\gamma-1}$. Si u et v sont deux éléments de $G/C^{\gamma-1}$, alors on peut les écrire : $u = \overset{\circ}{\gamma}{}^x u'$ et $v = \overset{\circ}{\gamma}{}^y v'$ avec x, y dans $\mathbb{Z}_p$ et u' et v' dans $C/C^{\gamma-1}$. Mais Γ opère trivia-

lement sur $C/C^{\gamma-1}$. Cela veut dire $\overset{\circ}{\gamma}^{x} u' \overset{\circ}{\gamma}^{-x} = u'$ etc... et $\overset{\circ}{\gamma}^{x}$, $\overset{\circ}{\gamma}^{y}$, u', v' permutent entre eux. Donc $uv = vu$.

Comme M_o est l'extension abélienne maximale non ramifiée de K_o, nous avons $\mathrm{Gal}\left(M_\infty/M_o\right) = G' I_1 I_2 \dots I_s = C^{\gamma-1} I_1 I_2 \dots I_s$; étant entendu que $I_1 I_2 \dots I_s$ désigne le sous-groupe de G engendré par I_1, I_2 et I_s. Nous avons donc $\mathrm{Gal}\left(M_\infty/M_o K_\infty\right) = [C^{\gamma-1} I_1 I_2 \dots I_s] \cap C$. Calculons cette intersection et montrons qu'elle est égale à $C^{\gamma-1} \tau_1^{\mathbb{Z}_p} \dots \tau_s^{\mathbb{Z}_p}$.

Un élément de $C^{\gamma-1} I_1 I_2 \dots I_s$ est de la forme :

$c^{\gamma-1} \gamma_1^{u_1} \gamma_2^{u_2} \dots \gamma_s^{u_s} \gamma_1^{u'_1} \gamma_2^{u'_2} \dots \gamma_s^{u'_s} \dots$ avec $u_i, u'_i \dots$ dans $\mathbb{Z}_p$ et c dans C. Ceci s'écrit encore :

$c^{\gamma-1} \gamma_1^{u_1} \left(\tau_2 \gamma_1\right)^{u_2} \dots \left(\tau_s \gamma_1\right)^{u_s} \gamma_1^{u'_1} \left(\tau_2 \gamma_1\right)^{u'_2} \dots \left(\tau_s \gamma_1\right)^{u'_s} \dots$

Mais $G/C^{\gamma-1}$ est commutatif. Donc $\left(\tau_2 \gamma_1\right)^{u} C^{\gamma-1} = \tau_2^{u} \gamma_1^{u} C^{\gamma-1}$ pour tout u de $\mathbb{Z}$. En passant à la limite (car $G/C^{\gamma-1}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module) nous avons $\left(\tau_2 \gamma_1\right)^{u_2} \equiv \tau_2^{u_2} \gamma_1^{u_2} \bmod C^{\gamma-1}$ et l'expression considérée peut s'écrire :

$c' {}^{\gamma-1} \tau_1^{v_1} \dots \tau_s^{v_s} \gamma_1^{w}$ avec $v_1, \dots, v_s$ dans $\mathbb{Z}_p$, ainsi que w. Si cette expression appartient à C, alors $\gamma_1^{w} = 1$ donc elle appartient à $C^{\gamma-1} \tau_1^{\mathbb{Z}_p} \dots \tau_s^{\mathbb{Z}_p}$. Nous avons démontré l'inclusion :

$$\left([C^{\gamma-1} I_1 I_2 \dots I_s] \cap C\right) \subset \left(C^{\gamma-1} \tau_1^{\mathbb{Z}_p} \dots \tau_s^{\mathbb{Z}_p}\right).$$

L'inclusion réciproque est évidente.

Nous déduisons de ces considérations :

$$\mathrm{Gal}\left(M_\infty/M_o K_\infty\right) = C^{\gamma-1} \tau_1^{\mathbb{Z}_p} \dots \tau_s^{\mathbb{Z}_p}$$

d'où $\mathrm{Gal}\left(M_o K_\infty/K_\infty\right) \cong C/C^{\gamma-1} \tau_1^{\mathbb{Z}_p} \dots \tau_s^{\mathbb{Z}_p}$. Mais il est clair que : $\mathcal{H}_o \cong \mathrm{Gal}\left(M_o/K_o\right) \cong \mathrm{Gal}\left(M_o K_\infty/K_\infty\right)$. D'où le résultat pour $\mathcal{H}_o$.

L'isomorphisme relatif à $\mathcal{H}_n$ se démontre de la même façon : si on remplace K_o par K_n, il faut remplacer γ par γ^{p^n}, γ_i par $\gamma_i^{p^n}$.

Que devient τ_i ? Nous avons $\gamma_i = \tau_i \gamma_1$.

D'où $\gamma_i^{p^n} = (\tau_i \gamma_1)^{p^n} = \tau_i \gamma_1 \tau_i \gamma_1^{-1} \gamma_1^2 \tau_i \gamma^{-2} \gamma^3 \ldots \gamma_1^{-(p^n-1)} \gamma_1^{p^n}$

$= \tau_i \tau_i^{\gamma} \tau_i^{\gamma^2} \ldots \tau_i^{\gamma^{p^n-1}}$. D'où $\gamma_i^{p^n} = \tau_i^{1+\gamma+\ldots+\gamma^{p^n-1}} \gamma_1^{p^n}$.

On en déduit l'isomorphisme annoncé.

Il reste pour terminer à montrer que C est un Λ-module de type fini. Pour cela, on utilise le lemme de Nakayama :

Lemme de Nakayama : Soit R un Λ-module compact tel que $R/(p,X)R = 0$. Alors $R = 0$.

Démonstration : L'anneau Λ est muni de la topologie (p,X)-adique (la notion de limite déjà employée au cours de la démonstration de la proposition 4.2 coïncide avec cette topologie). Soit V un voisinage de 0 dans R. Soit r un élément de R. Il existe un entier n_r et un voisinage V_r de r tel que $(p,X)^{n_r} V_r \subset V$. Comme $R = \bigcup_{r \in R} V_r$ il existe $r_1, \ldots, r_m$ dans R tels que $R = \bigcup_{i=1}^{m} V_{r_i}$. Soit n le plus grand des n_{r_i}. On a alors $(p,X)^n R \subset V$. Mais l'hypothèse $R/(p,X)R = 0$ implique $R = (p,X)R = \ldots = (p,X)^n R$. Donc $R \subset V$ et $R = 0$.

Conséquence : Soit M un Λ-module compact tel que $M/(p,X)M$ soit un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Alors M est un Λ-module de type fini.

Démonstration : Soit $m_1, \ldots, m_n$ des éléments de M tels que $(m_i + (p,X)M)_{1 \leq i \leq n}$ forment une base de $M/(p,X)M$. Soit $P = \Lambda m_1 + \Lambda m_2 + \ldots + \Lambda m_n$. Le quotient M/P est un Λ-module compact tel que $(M/P)/(p,X)(M/P) = 0$. Donc le lemme précédent montre que $M/P = 0$ et $m_1, \ldots, m_n$ est un système de générateurs de M.

Proposition 4.4 : On conserve les mêmes hypothèses et les mêmes notations qu'à la proposition précédente. Le Λ-module $C = \varprojlim \mathcal{H}_i$ est un Λ-module de type fini.

Démonstration : Notons un instant C additivement. Nous avons vu, dans la proposition précédente, que le quotient $C/\left(XC + \mathbb{Z}_p \tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s\right)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_o$, donc est fini. D'autre part, $\left(XC + \mathbb{Z}_p \tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s\right)/XC$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini. Donc C/XC est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini. Il en est donc de même de $C/(p, X)C$. D'autre part, C, limite projective de groupes finis, est compact. Le lemme de Nakayama permet donc de conclure.

On déduit des propositions 4.3 et 4.4 la proposition :

Proposition 4.5 : On conserve les mêmes hypothèses et les mêmes notations qu'à la proposition précédente. Le Λ-module $C = \varprojlim \mathcal{H}_i$ est un $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa.

Nous déduisons alors du théorème 3.8 et des propositions précédentes le théorème d'Iwasawa :

Théorème 4.6 : Soit K_∞/K_o une $\mathbb{Z}_p$-extension et soit $\mathcal{H}_i$ le p-groupe des classes d'idéaux de K_i. Il existe des entiers n_o, μ, λ positifs et un entier ν tels que : si $n \geq n_o$, alors l'ordre de $\mathcal{H}_n$ est donné par :

$$|\mathcal{H}_n| = p^{\mu p^n + \lambda n + \nu}.$$

Exemple : Soit p un nombre premier impair. Notons Q_n le sous-corps du corps cyclotomique $\mathbb{Q}\left(p^{n+1}\right)$ tel que le degré $\left(\mathbb{Q}\left(p^{n+1}\right) : Q_n\right)$ soit égal à $p-1$. Posons $Q_\infty = \bigcup_{i \geq 1} Q_i$. La $\mathbb{Z}_p$-extension $Q_\infty/\mathbb{Q}$ est l'unique $\mathbb{Z}_p$-extension de $\mathbb{Q}$. Il n'y a, dans cette extension, qu'un idéal totalement ramifié. Donc $s = 1$ et $\mathcal{H}_o = C/C^{\gamma - 1}$. Comme $\mathbb{Q}$ est principal, $\mathcal{H}_o = \{1\}$ et le lemme de

Nakayama montre que C est réduit à $\{1\}$. Les paramètres associés à $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ vérifient donc : $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Considérons aussi la $\mathbb{Z}_p$-extension dont le corps de base est $K_o = \mathbb{Q}^{(p)}$ et définie par $K_n = \mathbb{Q}^{\left(p^{n+1}\right)}$ pour tout n. Le même argument montre que si p est régulier, c'est-à-dire si $\mathcal{X}_o = \{1\}$, alors les paramètres λ, μ, ν sont nuls.

5 - Lien entre p^m-rangs et paramètres λ, μ.

Notation : Si H est un $\mathbb{Z}_p$-module, on note $\dim_m H$ la dimension du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $p^{m-1}H/p^mH$. C'est le p^m-rang de H.

Proposition 5.1 : Soit V un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa. On pose $U = XV + \mathbb{Z}_p\tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p\tau_s$. Soit α un quasi-isomorphisme de V dans W. Nous savons (Proposition 3.1) que W est un $\left(\alpha(\tau_1), \ldots, \alpha(\tau_s)\right)$-module d'Iwasawa. Posons $T = XW + \mathbb{Z}_p\alpha(\tau_1) + \ldots + \mathbb{Z}_p\alpha(\tau_s)$. Alors la suite

(double) $\left[\sum_{i=1}^{m}\left[\dim_i\left(V/g_nU\right) - \dim_i\left(W/g_nT\right)\right]\right]_{\substack{n\geq 0\\ m\geq 0}}$ est bornée.

Démonstration : Nous avons $\left|V/g_nU + p^mV\right| = p^{\sum_{i=1}^{m}\dim_i\left(V/g_nU\right)}$ et de même pour $\left|W/g_nT + p^mW\right|$.

A partir de α, on forme la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{\operatorname{Ker}\alpha}{\operatorname{Ker}\alpha \cap \left(g_nU + p^mV\right)} \longrightarrow \frac{V}{g_nU + p^mV} \longrightarrow \frac{\alpha(V)}{g_n\alpha(U) + p^m\alpha(V)} \longrightarrow 0.$$

Le premier terme est fini et son ordre est borné par $|\operatorname{Ker}\alpha|$. Ensuite, les deux suites exactes évidentes suivantes :

$$0 \longrightarrow \frac{\alpha(V)}{g_n\alpha(U) + p^m\alpha(V)} \longrightarrow \frac{W}{g_n\alpha(U) + p^m\alpha(V)} \longrightarrow \frac{W}{\alpha(V)} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \frac{g_nT + p^mW}{g_n\alpha(U) + p^m\alpha(V)} \longrightarrow \frac{W}{g_n\alpha(U) + p^m\alpha(V)} \longrightarrow \frac{W}{g_nT + p^mW} \longrightarrow 0,$$

conduisent à étudier le quotient $\dfrac{g_n T + p^m W}{g_n \alpha(U) + p^m \alpha(V)}$. Pour cela, on forme

la suite exacte : $\dfrac{T}{\alpha(U)} \times \dfrac{W}{\alpha(V)} \longrightarrow \dfrac{g_n T + p^m W}{g_n \alpha(U) + p^m \alpha(V)} \longrightarrow 0$ en associant

aux classes de t et w modulo $\alpha(U)$ et $\alpha(V)$ la classe de $g_n t + p^m w$ modulo $g_n \alpha(U) + p^m \alpha(V)$. Par hypothèse le groupe $W/\alpha(V)$ est fini. L'autre aussi, car on a des suites exactes :

$$\frac{W}{\alpha(V)} \longrightarrow \frac{XW}{X\alpha(V)} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{XW}{X\alpha(V)} \longrightarrow \frac{XW + \mathbb{Z}_p \alpha(\tau_1) + \ldots + \mathbb{Z}_p \alpha(\tau_s)}{X\alpha(V) + \mathbb{Z}_p \alpha(\tau_1) + \ldots + \mathbb{Z}_p \alpha(\tau_s)} \longrightarrow 0.$$

Ce dernier quotient est $T/\alpha(U)$. Il est donc fini. Ainsi l'ordre de $\dfrac{g_n T + p^m W}{g_n \alpha(U) + p^m \alpha(V)}$ est borné. D'où le résultat annoncé.

Proposition 5.2 : Soit V un $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$-module d'Iwasawa. On pose encore $U = XV + \mathbb{Z}_p \tau_1 + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s$. On suppose que V est somme directe : $V = V' \oplus V''$, de deux sous Λ-modules. Soient $\tau_i = \tau_i' + \tau_i''$ les décompositions correspondantes et $U' = XV' + \mathbb{Z}_p \tau_1' + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s'$ et $U'' = XV'' + \mathbb{Z}_p \tau_1'' + \ldots + \mathbb{Z}_p \tau_s''$. Alors la suite (double)

$$\Big[\sum_{i=1}^{m} \left[\dim_i \left(V/g_n U\right) - \dim_i \left(V'/g_n U'\right) - \dim_i \left(V''/g_n U''\right) \right] \Big]_{\substack{n \geq 0 \\ m \geq 0}}$$ est bornée.

Démonstration : Posons $T = U' \oplus U''$. Nous avons $V/g_n T = V'/g_n U' \oplus V''/g_n U''$ d'où :

$$\sum_{i=1}^{m} \left[\dim_i V'/g_n U' + \dim_i V''/g_n U'' \right] = \sum_{i=1}^{m} \dim_i V/g_n T$$

et il reste à étudier $\sum_{i=1}^{m} \left[\dim_i V/g_n U - \dim_i V/g_n T \right]$; c'est-à-dire à comparer les deux quotients $V/g_n U + p^m V$ et $V/g_n T + p^m V$. Mais nous avons $T \supset U$ et une suite exacte évidente :