THÉORIE DES NOMBRES

BESANÇON

Année 1983 - 1984

NON MONOGÉNÉITÉ DE L'ANNEAU DES ENTIERS DE CERTAINES EXTENSIONS ABÉLIENNES DE $\mathbb{Q}$

Marie-Nicole GRAS

Non monogénéité de l'anneau des entiers de certaines extensions abéliennes de $\mathbb{Q}$

par Marie-Nicole GRAS

0) Introduction.

Soit E un corps de nombres et soit Z_E l'anneau des entiers de E. On dit que Z_E est monogène s'il existe $\theta \in Z_E$ tel que $Z_E = \mathbb{Z}[\theta]$. Par abus, on dit aussi que E est monogène.

La monogénéité des extensions de $\mathbb{Q}$ de degré 2, 3 ou 4 a souvent été étudiée ; en degré plus grand, et dans le cas abélien, les seuls corps connus dont l'anneau des entiers soit monogène sont les corps cyclotomiques $\mathbb{Q}^{(f)} = \mathbb{Q}(\xi)$ et leur sous-corps réel maximal $\mathbb{Q}(\xi + \xi^{-1})$; il est facile de vérifier qu'il en est de même pour le corps (d'indice 2 dans $\mathbb{Q}^{(f)}$ si $f \equiv 0 \bmod 4$) égal à $\mathbb{Q}(\xi - \xi^{-1})$.

Dans [G(MN)1], nous avons montré que si $E/\mathbb{Q}$ est une extension cyclique de degré premier $\ell \geq 5$, alors Z_E n'est pas monogène, sauf si E est le sous-corps réel maximal d'un corps cyclotomique (ce qui donne au plus un corps pour ℓ fixé).

Dans [G(MN) 2], en généralisant la méthode utilisée dans [G(MN)1], nous avons établi une condition nécessaire pour que l'anneau des entiers d'une extension abélienne de $\mathbb{Q}$ soit monogène ; nous rappelons les principales étapes conduisant à l'énoncé de cette condition nécessaire :

Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension abélienne de degré n. On suppose que Z_E est monogène, c'est-à-dire qu'il existe $\theta \in Z_E$ tel que $\{1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}\}$ soit une $\mathbb{Z}$-base d'entiers de Z_E. Dans ce cas, on a :

$$\Delta(\theta) = \prod_{\substack{g, g' \in G \\ g \neq g'}} (\theta^g - \theta^{g'}) = \pm D_E ,$$

où $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ et où D_E désigne le discriminant de $E/\mathbb{Q}$.

Pour tout $g \in G$, $g \neq 1$, on pose $\Delta_g(\theta) = N_{E/\mathbb{Q}}(\theta - \theta^g)$; alors $\Delta(\theta) = \pm \prod_{\substack{g \in G \\ g \neq 1}} \Delta_g(\theta)$, et l'hypothèse $Z_E = \mathbb{Z}[\theta]$ entraine que pour tout g , $g' \in G$ tels que $\langle g \rangle = \langle g' \rangle \neq (1)$, on a $\frac{\Delta_g(\theta)}{\Delta_{g'}(\theta)} = \pm 1$. On choisit alors convenablement g et g' en fonction de la ramification dans $E/\mathbb{Q}$.

Soit p un nombre premier ne divisant pas n et ramifié dans $E/\mathbb{Q}$. Soit e l'indice de ramification de p et soit σ un générateur du groupe d'inertie de p dans $E/\mathbb{Q}$.

On étudie d'abord $\Delta_{\sigma^x}(\theta)$, $x = 1, \ldots, e - 1$. On exprime θ sur les χ-coordonnées de H.W. Leopoldt [L] , et on montre que l'on peut choisir un idéal $\mathfrak{P}$ de $\mathbb{Q}^{(f)}\,\mathbb{Q}^{(n)}$ (où f désigne le conducteur de E) au-dessus de p , et une uniformisante π en $\mathfrak{P}$ telle que

$$\Delta_{\sigma^x}(\theta) \equiv \pi^n (1 - \zeta_e^x)^n w \mod (\pi^{n+1}) ,$$

où w est inversible modulo (π) et ne dépend pas de $x = 1, \ldots, e - 1$, et où ζ_e est une racine de l'unité d'ordre e .

Soit d un diviseur de e , $d \neq 1$; on pose $\zeta_d = \zeta_e^{e/d}$; en choisissant pour g et g' deux générateurs quelconques de $\langle \sigma^{e/d} \rangle$, on obtient la condition suivante ([G(MN)2] , théorème 1) :

> Pour que Z_E soit monogène , il est nécessaire que l'on ait :
> pour tout nombre premier p ne divisant pas n , ramifié dans $E/\mathbb{Q}$ et d'indice de ramification e ,
> pour tout diviseur d de e , $d \neq 1$,
> pour tout k premier à d ,

$$(1) \qquad \left(\frac{1 - \zeta_d^k}{1 - \zeta_d}\right)^{2n} \equiv 1 \mod p\,\mathbb{Z}[\zeta_d] .$$

Lorsque d est impair , on peut choisir $k = 2$, et alors il est nécessaire que l'on ait (avec p et d comme ci-dessus) :

(2) $\qquad (1 + \zeta_d)^{2n} \equiv 1 \mod p\mathbb{Z}[\zeta_d]$.

Lorsque d = 2, 3, 4 ou 6 , les conditions (1) et (2) sont toujours vérifiées .

Dans [G(MN)2] , nous avons déduit des conditions (1) et (2) que si ℓ est un nombre premier , presque toutes les ℓ-extensions cycliques de $\mathbb{Q}$ ne sont pas monogènes .

Le présent travail se divise en deux parties :

Dans une première partie , en utilisant toujours ces conditions (1) et (2) , nous montrons qu'il n'existe qu'un nombre fini d'extensions abéliennes monogènes de degré n fixé , sous la seule condition que ni 2 ni 3 ne divisent n .

Puis nous montrons (théorème 2) qu'une extension abélienne $E/\mathbb{Q}$ de degré $n = m\,\ell^r$, ℓ premier , $\ell^r \geq 5$, $m \in \mathbb{N}^*$, est non monogène dès que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\begin{cases} \text{si } \ell = 2 \ , \ 2^{r-2} \geq 2m + 1 \\ \text{si } \ell \text{ est impair} \ , \ \dfrac{\ell - 1}{2}\,\ell^{r-1} \geq m + 1 \ , \end{cases}$

(ii) il existe un nombre premier p , $p \equiv 1 \mod \ell^r$, p ramifié dans $E/\mathbb{Q}$ avec un indice de ramification multiple de ℓ^r , et vérifiant $p > 2n + 1$.

Pour conclure cette partie , nous précisons les résultats obtenus dans le cas des extensions abéliennes de $\mathbb{Q}$ de degré $2\ell^r$, $3\ell^r$ (ℓ premier ≥ 5) et $5m$.

Dans une deuxième partie , nous montrons que les sous-corps E de $\mathbb{Q}^{(p)}$, p nombre premier impair , ne sont pas monogènes , exceptés les cas déjà connus (les corps $\mathbb{Q}^{(p)}$, $\mathbb{Q}_o^{(p)}$ et le sous-corps quadratique de $\mathbb{Q}^{(p)}$ qui sont monogènes , et si $p \equiv 1 \mod 3$, le sous-corps cubique de $\mathbb{Q}^{(p)}$ qui est le seul à pouvoir être ou non monogène) .

1) Extensions abéliennes de $\mathbb{Q}$.

a) Théorème de finitude .

Si n est un entier divisible par 2 (resp. 3) , on peut trouver une infinité d'extensions abéliennes $E/\mathbb{Q}$ de degré n dans lesquelles on a un nombre premier p ne divisant pas n , ramifié avec un indice de ramification égal à 2 (resp. 3) , et pour lequel la condition (1) est donc toujours vérifiée . En effet , soit K_n le sous-corps de degré n du composé des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de $\mathbb{Q}$ et soit p premier , $p \nmid n$. Soit L_p le sous-corps quadratique (resp. cubique si $p \equiv 1 \bmod 3$) de $\mathbb{Q}^{(p)}$; alors tout sous-corps E , $E \neq K_n$, d'indice 2 (resp. 3) de $K_n L_p$ convient .

Par contre , si n est premier à 2 et 3 , on va montrer le résultat suivant :

Théorème 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, n premier à 2 et 3 .
Il n'existe qu'un nombre fini d'extensions abéliennes de $\mathbb{Q}$ de degré n dont l'anneau des entiers soit monogène .

Définition : L'entier n étant fixé, soit $\ell \geq 5$ un nombre premier divisant n et soit $\zeta_\ell = \exp(2i\pi/\ell)$. On pose

$$\mathfrak{P}_\ell = \left\{ p \text{ premier} , p \equiv 1 \bmod \ell , \text{ tel que } (1+\zeta_\ell)^{2n} \equiv 1 \bmod p\,\mathbb{Z}[\zeta_\ell] \right\}.$$

Lemme : L'ensemble $\mathfrak{P}_\ell$ est fini .

Démonstration du lemme :
On sait que $\mathrm{Irr}(\zeta_\ell, \mathbb{Q}) = X^{\ell-1} + X^{\ell-2} + \dots + X + 1$, ce qui permet d'écrire $(1+\zeta_\ell)^{2n} - 1 = \sum_{j=0}^{\ell-2} a_j \zeta_\ell^j$, $a_j \in \mathbb{Z}$, où les coefficients a_j ne sont pas tous nuls , car $\ell \neq 3$. On a alors $(1+\zeta_\ell)^{2n} \equiv 1 \bmod p\,\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$ si et seulement si p divise tous les a_j , $j = 0, \dots, \ell-2$. Donc $\mathfrak{P}_\ell$ est fini, et la méthode pour déterminer $\mathfrak{P}_\ell$ est effective ; elle sera développée au b) .

Démonstration du théorème :
Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension abélienne de degré n , n premier à 2 et 3 ; tout nombre premier ℓ divisant n est donc tel que $\ell \geq 5$.

On pose $\mathcal{P}_o = \{ \ell , \ell \mid n \}$. Pour démontrer le théorème , il suffit de montrer que s'il existe p premier ramifié dans $E/\mathbb{Q}$ et tel que $p \notin \mathcal{P}_o \cup (\bigcup_{\ell \mid n} \mathcal{P}_\ell)$, alors Z_E n'est pas monogène .

En effet , $p \notin \mathcal{P}_o$, donc $p \nmid n$; soit e l'indice de ramification de p dans $E/\mathbb{Q}$, et soit L le corps d'inertie de p ; alors E/L est cyclique d'ordre e , p est totalement ramifié dans E/L et $p \equiv 1 \bmod e$; puisque $e \mid n$, il existe $\ell' \mid n$ tel que $\ell' \mid e$ et $\ell' \geq 5$; comme par hypothèse $p \notin \mathcal{P}_{\ell'}$, Z_E n'est pas monogène d'après (2) , puisque $(1 + \zeta_{\ell'})^{2n} \not\equiv 1 \bmod p\mathbb{Z}[\zeta_{\ell'}]$.

La méthode employée montre que les extensions abéliennes de degré n monogènes ont un conducteur explicitement borné en fonction des $p \in \mathcal{P}_\ell$, d'où l'importance de la détermination effective de $\mathcal{P}_\ell$. Nous déterminerons d'abord dans un cadre plus général un ensemble $\mathcal{P}_{m, \ell^r}$ et nous appliquerons les résultats obtenus à la non monogénéité des extensions abéliennes de $\mathbb{Q}$.

b) Détermination de l'ensemble $\mathcal{P}_{m, \ell^r}$.

Dans ce paragraphe nous étudions les nombres premiers p vérifiant (1) avec les notations suivantes :

$$(3) \quad \left[\begin{array}{l} \ell \text{ est un nombre premier , } r , m \in \mathbb{N}^* , \ \ell^r \geq 5 , \\ \zeta_r = \exp(2i\pi/\ell^r) , \\ \mathcal{P}_{m, \ell^r} = \left\{ p \text{ premier tel que } \left(\frac{1 - \zeta_r^k}{1 - \zeta_r} \right)^{2m\ell^r} \equiv 1 \bmod p\mathbb{Z}[\zeta_r] \right. \\ \qquad \left. \text{pour tout k premier à } \ell \right\} . \end{array} \right.$$

Si $p \in \mathcal{P}_{m, \ell^r}$, on a , pour tout k premier à ℓ , $(1 - \zeta_r^k)^{2m\ell^r} \equiv (1 - \zeta_r)^{2m\ell^r} \bmod p\mathbb{Z}[\zeta_r]$; on en déduit que

$$(1 - \zeta_r)^{2m\ell^r} \equiv \frac{1}{(\ell - 1)\ell^{r-1}} \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_r)/\mathbb{Q}} (1 - \zeta_r)^{2m\ell^r} \bmod p\mathbb{Z}[\zeta_r] ,$$

et donc que (la réciproque étant évidente) :

(3') $\left[\begin{array}{l} p \in \mathcal{P}_{m,\ell^r} \text{ si et seulement s'il existe } c \in \mathbb{Z} \text{ tel que} \\ (1-\zeta_r)^{2m\ell^r} \equiv c \bmod p\mathbb{Z}[\zeta_r]\,. \end{array}\right.$

Remarque 1 : Pour tout diviseur m' de m , si $p \in \mathcal{P}_{m',\ell^r}$, alors il est évident que $p \in \mathcal{P}_{m,\ell^r}$, et ceci a lieu, en particulier pour tout nombre p de la forme $m'\ell^r + 1$ ou $2m'\ell^r + 1$. Pour chaque valeur de m considérée , les nombres premiers p , $p < 2m\ell^r + 1$, feront l'objet d'une étude à part (voir à ce sujet la proposition 2) , et dans la suite on supposera $p \geq 2m\ell^r + 1$; alors les entiers qui interviennent dans le calcul des coefficients du binôme $\binom{2m\ell^r}{x}$ sont inversibles modulo p . Avec cette hypothèse on va développer $(1-\zeta_r)^{2m\ell^r}$; mais si ℓ est impair , on peut aussi utiliser $(1+\zeta_r)^{2m\ell^r} \equiv 1 \bmod p\mathbb{Z}[\zeta_r]$, ce qui simplifie les calculs ; on va donc distinguer deux cas .

1^er cas : $\ell = 2$ (et nécessairement $r \geq 3$)

On pose $N = 2^{r-2}$ et alors $\mathrm{Irr}(\zeta_r, \mathbb{Q}) = X^{2N} + 1$; donc $(1-\zeta_r)^{8mN} = a_o + \sum_{s=1}^{2N-1} (-1)^s a_s \zeta_r^s$, et (3') entraine que : $a_s \equiv 0 \bmod p$ pour tout $s = 1, \ldots, 2N-1$.

On calcule $a_s = \sum_{k=0}^{4m-1} (-1)^k \binom{8mN}{s+2kN}$

$$= \sum_{j=0}^{2m-1} \left[\binom{8mN}{s+4jN} - \binom{8mN}{s+(4j+2)N}\right] \quad , \quad s = 1, \ldots, 2N-1 \,.$$

Mais $a_N = 0$ et $a_{2N-s} = a_s$; on obtient donc N - 1 congruences qui sont : $a_t \equiv 0 \bmod N$, $t = N+1, \ldots, 2N-1$.

Si $N \leq 2m$, on étudie directement les N - 1 congruences ci-dessus. Si $N > 2m$, on considère les 2m congruences obtenues pour $t = N + i$, $i = 1, \ldots, 2m$. Puisque :

$$\binom{8mN}{(4j+2)N+N+i} = \binom{8mN}{8mN-4jN-4N+N-i},$$

on obtient, après renumérotation, les 2m congruences

$$\sum_{j=0}^{2m-1}\left[\binom{8mN}{4jN+N+i} - \binom{8mN}{4jN+N-i}\right] \equiv 0 \bmod p .$$

On pose $\delta = \det\left(\binom{8mN}{4jN+N+i} - \binom{8mN}{4jN+N-i}\right)_{\substack{i=1,\dots,2m \\ j=0,\dots,2m-1}}$;

si les 2m congruences ci-dessus sont vérifiées, on a $\delta \equiv 0 \bmod p$.

On applique alors le lemme du e), avec $\mu = 2m$, $\lambda = 4N$ et $x = N = 2^{r-2}$; il en résulte que si un nombre premier p divise δ et vérifie $p \geq m2^{r+1} + 1$, alors p divise $(m2^{r+1}+1)(m2^{r+1}+2)\dots(m2^{r+1}+4m-1)$; puisque $4m-1 < 2^{r-1}$ et que l'on ne considère que des nombres premiers p, $p \equiv 1 \bmod 2^r$, tous les entiers $m2^{r+1}+1+i$ sont inversibles modulo p, et donc <u>p divise $m2^{r+1}+1$</u>.

<u>2ème cas : ℓ est impair</u>, $\ell^r \geq 5$.

On pose $N = \ell^{r-1}$, et alors $\mathrm{Irr}(\zeta_r, \mathbb{Q}) = X^{(\ell-1)N} + \dots + X^N + 1$; on écrit $(1-\zeta_r)^{2m\ell N} = a_o + a_1\zeta_r + \dots + a_{(\ell-1)N-1}\zeta_r^{(\ell-1)N-1}$ dans $\mathbb{Z}[\zeta_r]$ et (3') entraine $a_s \equiv 0 \bmod p$, pour tout $s = 1, \dots, (\ell-1)N-1$.

Mais puisque ℓ est impair, on peut utiliser (2) et on a $(1+\zeta)^{2m\ell N} \equiv 1 \bmod p\,\mathbb{Z}[\zeta_r]$. On écrit $(1+\zeta_r)^{2m\ell N} = b_o + b_1\zeta_r + \dots + b_{(\ell-1)N-1}\zeta^{(\ell-1)N-1}$ dans $\mathbb{Z}[\zeta_r]$ et on a donc : $b_s \equiv 0 \bmod p$, pour tout $s = 1, \dots, (\ell-1)N-1$.

$$\text{Or } b_s = \sum_{k=0}^{2m-1}\binom{2m\ell N}{k\ell N+s} - \sum_{k=0}^{2m-1}\binom{2m\ell N}{k\ell N+(\ell-1)N+\bar{s}}$$

$$\text{et } a_s = \sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^{k+s}\binom{2m\ell N}{k\ell N+s} - \sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^{k+\bar{s}}\binom{2m\ell N}{k\ell N+(\ell-1)N+\bar{s}},$$

en désignant par $\bar{s}$ le reste de la division de s par N.

$$\text{On pose } c_s = \sum_{k=0}^{2m-1}\binom{2m\ell N}{k\ell N+s} \text{ et } d_s = \sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^{k+s}\binom{2m\ell N}{k\ell N+s},$$

$s = 1, \ldots, \ell N - 1$. Alors les congruences ci-dessus entrainent que pour $s' \equiv s \bmod N$ on a $c_{s'} \equiv c_s \bmod p$

et $d_{s'} \equiv d_s \bmod p$.

On écrit alors $c_s = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m\ell N}{2j\ell N + s} + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m\ell N}{2j\ell N + \ell N + s}$

et $(-1)^s d_s = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m\ell N}{2j\ell N + s} - \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m\ell N}{2j\ell N + \ell N + s}$;

puisque s et $s + \ell N$ sont de parité différente , en faisant la somme et différence des congruences ci-dessus , on obtient , après renumérotation , les congruences suivantes :

(4) Pour tout $t \in \{1, \ldots, \ell N - 1 , \ell N + 1 , \ldots, 2\ell N - 1\}$ soit $u_t = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m\ell N}{2j\ell N + t}$; alors pour $t' \equiv t \bmod 2N$, on a $u_{t'} \equiv u_t \bmod p$.

On écrit les m congruences obtenues pour $t = \alpha N + i$ et $t' = (2\ell - \alpha)N + i$, $i = 1, \ldots, m$, où $\alpha = (\ell - 1)/2$, et ceci est possible si $m \leq \alpha N - 1$ (sinon , on étudie numériquement les congruences (4) ci-dessus) .

Puisque $\binom{2m\ell N}{2j\ell N + (2\ell - \alpha)N + i} = \binom{2m\ell N}{2m\ell N - 2j\ell N - 2\ell N + \alpha N - i}$

on obtient , après renumérotation :

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left[\binom{2m\ell N}{2j\ell N + \alpha N + i} - \binom{2m\ell N}{2j\ell N + \alpha N - i} \right] \equiv 0 \bmod p .$$

Comme dans le cas $\ell = 2$, on pose

$$\delta = \det \left(\binom{2m\ell N}{2j\ell N + \alpha N + i} - \binom{2m\ell N}{2j\ell N + \alpha N - i} \right)_{\substack{i = 1, \ldots, m \\ j = 0, \ldots, m-1}} ,$$

et on a donc $\delta \equiv 0 \bmod p$.

On applique le lemme du e) avec $\mu = m$, $\lambda = 2\ell N$ et $x = \alpha N = \frac{\ell - 1}{2}\ell^{r-1}$; il en résulte que si un nombre premier p divise δ et vérifie $p \geq 2m\ell^r + 1$, alors p divise $(2m\ell^r + 1) \ldots (2m\ell^r + 2m - 1)$; puisque $2m - 1 < \frac{\ell - 1}{2}\ell^{r-1}$ et que l'on ne considère que des nombres premiers p, $p \equiv 1 \bmod 2\ell^r$, on a encore <u>p divise $2m\ell^r + 1$</u> .

On a donc montré :

<u>Proposition 1</u> : Les notations sont celles définies en (3) .
On suppose de plus que :

(i) si $\ell = 2$, $2^{r-2} \geq 2m + 1$

(ii) si ℓ est impair , $\frac{\ell - 1}{2}\ell^{r-1} \geq m + 1$.

Soit p un nombre premier , $p \geq 2m\ell^r + 1$ et $p \equiv 1 \bmod \ell^r$; si $p \in \mathcal{P}_{m,\ell^r}$, alors <u>$p = 2m\ell^r + 1$</u> .

Le cas des nombres premiers p, $p \equiv 1 \bmod \ell^r$, tels que $p < 2m\ell^r + 1$ va être précisé grâce à la propriété suivante :

<u>Proposition 2</u> : Soit p un nombre premier , $p \equiv 1 \bmod \ell^r$.
Si $p \in \mathcal{P}_{m,\ell^r}$, alors p est nécessairement de la forme suivante :

(i) lorsque ℓ est impair :
$p = 2\ell^r + 1$ ou $p = 2\lambda\ell^r + 1$ avec $(\lambda , m) \neq 1$,

(ii) lorsque $\ell = 2$:
$p = 2^r + 1$ ou $p = 2^{r+1} + 1$ ou $p = \lambda 2^r + 1$, avec $(\lambda , 2m) \neq 1$.

<u>Démonstration</u> : soit p un nombre premier , $p \equiv 1 \bmod \ell^r$; alors p est totalement décomposé dans $\mathbb{Q}(\ell^r)$; en tout $\mathfrak{p}$ au-dessus de p dans $\mathbb{Q}(\ell^r)$, le corps résiduel en $\mathfrak{p}$ est isomorphe à $\mathbb{F}_p$. Si $\ell^r + 1$ (lorsque $\ell = 2$) ou $2\ell^r + 1$ sont des nombres premiers , ils appartiennent à $\mathcal{P}_{m,\ell^r}$; supposons $p \neq \ell^r + 1$ et $p \neq 2\ell^r + 1$; alors $p \notin \mathcal{P}_{1,\ell^r}$, et donc il existe k premier à ℓ tel que $\left((1 - \zeta_r^k)/(1 - \zeta_r)\right)^{2\ell^r} \not\equiv 1 \bmod p\,\mathbb{Z}[\zeta_r]$; soit h

l'ordre de l'image de cet élément dans le groupe multiplicatif du corps résiduel en $\mathfrak{p}$. La proposition résulte de ce que :

(i) si ℓ est impair , et si $p = 1 + 2\lambda\ell^r$, avec $(\lambda, m) = 1$, h ne peut pas être un diviseur de m et donc $p \notin \mathcal{P}_{m,\ell^r}$,

(ii) si $\ell = 2$ et si $p = 1 + \lambda 2^r$, avec $(\lambda, 2m) = 1$, h ne peut pas être un diviseur de m et donc $p \notin \mathcal{P}_{m,2^r}$.

Remarque 2 : L'ensemble $\mathcal{P}_\ell$ du a) est l'ensemble des nombres premiers p , $p \equiv 1 \bmod \ell$, qui appartiennent à $\mathcal{P}_{m,\ell^r}$, avec $r = 1$.

Si $\ell \leq 2m + 1$, on étudie numériquement les congruences (4) :

$$(4') \quad \left[\begin{array}{l} \text{pour tout } t = 2, \ldots, \ell - 2 \text{ , on a } u_{t+1} \equiv u_{t-1} \bmod p \text{ , avec} \\ u_t = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m\ell}{2j\ell + t} \text{ ,} \end{array} \right.$$

et l'étude du cas $\ell = 5$ au paragraphe d) montrera qu'il peut exister des nombres premiers $p \in \mathcal{P}_\ell$ tels que $p > 2m\ell + 1$.

Par contre si $\ell \geq 2m + 3$, les nombres premiers qui appartiennent à $\mathcal{P}_\ell$ sont :

ou bien des nombres $p < 2m\ell + 1$ de la forme $2\lambda\ell + 1$, $\lambda = 1$ ou $(\lambda, m) \neq 1$,

ou bien le nombre $2m\ell + 1$.

Donc si $\ell \geq 2m + 3$, les résultats sont plus simples , mais cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée , d'où l'intérêt d'avoir la même propriété pour ℓ^r car alors la condition $(\ell - 1)\ell^{r-1} \geq 2m + 1$ est plus facilement réalisée , mais il faut supposer que le nombre premier p est ramifié avec un indice de ramification multiple de ℓ^r .

c) Extensions abéliennes de degré $m\ell^r$, ℓ premier , $\ell^r \geq 5$.

Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension abélienne de degré n . Soit p un nombre premier ne divisant pas n et ramifié dans $E/\mathbb{Q}$. On suppose que l'indice de ramification e de p est multiple de ℓ^r , ℓ premier , $\ell^r \geq 5$ et on pose $n = m\ell^r$.

Pour simplifier , on définit :

(RAM) Définition : on dit que p vérifie (RAM) si p est un nombre premier , $p \equiv 1 \bmod \ell^r$, et s'il est ramifié dans $E/\mathbb{Q}$ avec un indice de ramification multiple de ℓ^r .

On pose encore $\zeta_r = \exp(2i\pi/\ell^r)$. D'après (1) une condition nécessaire pour que Z_E soit monogène est que pour tout p vérifiant (RAM) et ne divisant pas n , on ait $p \in \mathcal{P}_{m,\ell^r}$, (cf. (3)) . Il résulte donc des propositions 1 et 2 :

Théorème 2 : Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension abélienne de degré n . On suppose que $n = m\ell^r$, ℓ premier , $\ell^r \geq 5$, et que :

(i) si $\ell = 2$, $2^{r-2} \geq 2m + 1$,

(ii) si ℓ est impair , $\frac{\ell - 1}{2} \ell^{r-1} \geq m + 1$.

Alors si Z_E est monogène , tous les nombres premiers p , $p \equiv 1 \bmod \ell^r$, qui se ramifient dans $E/\mathbb{Q}$ avec un indice de ramification multiple de ℓ^r vérifient $p \leq 2n + 1$.

Remarque 3 : Si $m = 1$ et $\ell \geq 5$ est premier , la non monogénéité des extensions cycliques de $\mathbb{Q}$ de degré ℓ^r a été résolue dans [G(MN)1] et [G(MN)2] ; le théorème 2 permet de retrouver que si Z_E est monogène, seuls les nombres premiers égaux à ℓ ou $2\ell^r + 1$ peuvent se ramifier totalement dans $E/\mathbb{Q}$ et le résultat est le même si $\ell = 3$ et $r \geq 2$. Nous allons préciser les résultats complétant le théorème 2 , d'abord lorsque $\ell = 2$, puis dans le cas du degré $2\ell^r$ et $3\ell^r$, ℓ premier , $\ell \geq 5$. Le cas du degré 5ℓ sera traité dans le § e) , exemple 1 .

(i) Degré $n = m2^r$, $r \geq 3$.

Si $m = 1$, le théorème 2 s'applique lorsque $2^{r-2} \geq 3$, c'est-à-dire $r \geq 4$; il reste donc à étudier le cas $n = 8$ et on calcule $\binom{16}{1} - \binom{16}{5} + \binom{16}{9} - \binom{16}{13} = 2^7 \cdot 3 \cdot 17$. Donc, dans tous les cas , si Z_E est monogène , seuls les nombres $2^r + 1$ et $2^{r+1} + 1$, lorsqu'ils sont premiers , peuvent vérifier (RAM) . On remarque aussi que $2^\lambda + 1$ ne peut être premier que si λ est une puissance de 2 et si le nombre de Fermat correspondant est premier .

Si $m \geq 2$ et $n = 8m$, il existe des nombres premiers p, $p \equiv 1 \bmod 8$, tels que $p > 8m + 1$ et $p \in \mathcal{P}_{m,8}$; en effet, dans ce cas, $p \in \mathcal{P}_{m,8}$ si et seulement si

$$a(m) = \sum_{j=0}^{2m-1} \left[\binom{16m}{8j+1} - \binom{16m}{8j+5} \right] \equiv 0 \bmod p \ ;$$

et on calcule, par exemple :

$a(2) = 2^{12} \cdot 3 \cdot 17 \cdot \underline{577}$,

$a(3) = 2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot \underline{1153}$,

et $a(4) = 2^{21} \cdot 3 \cdot 17 \cdot \underline{577} \cdot \underline{665857}$, d'où les exemples annoncés.

(ii) Degré $n = 2\ell^r$, ℓ premier ≥ 5 .

Les hypothèses entrainent que l'extension $E/\mathbb{Q}$ est cyclique . On désigne par L le sous-corps quadratique de E et par K le sous-corps de E de degré ℓ^r sur $\mathbb{Q}$; un nombre premier p vérifie (RAM) si et seulement si p est totalement ramifié dans $K/\mathbb{Q}$.

Le théorème 2 s'applique , sauf si $r = 1$ et $\ell = 5$, et l'étude du cas $n = 5m$ (cf. § d) , montre que si $m = 2$ alors $\mathcal{P}_5 = \{11\}$.

De plus , lorsque E est non inclus dans $\mathbb{R}$, ce qui a lieu si et seulement si L est imaginaire , alors pour tout $\theta \in Z_E$, tous les $\Delta_k(\theta)$ sont positifs , et une condition nécessaire pour que Z_E soit monogène est que pour tout p totalement ramifié dans $K/\mathbb{Q}$, $p \equiv 1 \bmod \ell^r$, on ait $(1 + \zeta_r)^{2\ell^r} \equiv 1 \bmod p\,\mathbb{Z}[\zeta_r]$ $\left(\text{au lieu de } (1 + \zeta_r)^{4\ell^r}\right)$; la condition trouvée est celle écrite dans le cas cyclique de degré ℓ^r ([G(MN)2], § 2) ; elle ne peut avoir lieu que si $p = 2\ell^r + 1$. On a donc :

Théorème 3 : Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension cyclique de degré $2\ell^r$, ℓ premier ≥ 5 . Soit K le sous-corps de E de degré ℓ^r sur $\mathbb{Q}$. S'il existe un nombre premier p , $p \equiv 1 \bmod \ell^r$, totalement ramifié dans K et vérifiant $p \neq 2\ell^r + 1$ et $p \neq 4\ell^r + 1$, alors Z_E n'est pas monogène .

Si de plus $E/\mathbb{Q}$ est imaginaire , il suffit alors que p vérifie $p \neq 2\ell^r + 1$.

Remarque 4 : Puisque $\ell \geq 5$, en raisonnant modulo 3 , on vérifie que le nombre $2\ell^r + 1$ n'est pas premier si r est pair ou si $\ell \equiv 1 \bmod 3$, et que le nombre $4\ell^r + 1$ n'est pas premier si r est impair et $\ell \equiv 2 \bmod 3$.

Lorsque $E/\mathbb{Q}$ est imaginaire , on obtient la non monogénéité de certaines extensions sauvagement ramifiées ; en effet , on a :

Proposition 3 : Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension imaginaire cyclique de degré $2\ell^r$, ℓ premier ≥ 5 . Si ℓ est totalement ramifié dans $K/\mathbb{Q}$, alors Z_E n'est pas monogène , sauf peut-être dans les deux cas suivants : $\ell = 5$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ et $\ell = 7$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

Démonstration : Les hypothèses faites entrainent que ℓ est totalement ramifié dans E/L . Il en résulte que Z_E n'est pas monogène sur Z_L : cette propriété a été démontrée lorsque $r = 1$ dans [P] et généralisée au cas r quelconque lorsque $L = \mathbb{Q}$ dans [G(MN)2] . Lorsque L est un corps quadratique imaginaire , les résultats sont les mêmes que lorsque $r = 1$. Enfin si Z_E n'est pas monogène sur Z_L , il n'est pas monogène sur $\mathbb{Z}$, d'où le résultat .

(iii) Degré $n = 3\ell^r$, ℓ premier ≥ 5 .

L'extension $E/\mathbb{Q}$ est encore cyclique et le théorème 2 s'applique sauf si $r = 1$ et $\ell = 5$ ou 7 . Si $\ell = 5$, l'étude du cas $n = 5m$ du § d) montre que si $m = 3$, alors $\mathcal{P}_5 = \{11, 31\}$.

Si $\ell = 7$, alors $p \in \mathcal{P}_7$ si et seulement si (cf. (4')) :

$u_1 \equiv u_3 \equiv u_5 \bmod p$ et $u_2 \equiv u_4 \equiv u_6 \bmod p$, avec $u_t = \binom{42}{t} + \binom{42}{t+14} + \binom{42}{t+28}$ et ces congruences ne permettent pas de former le déterminant d'ordre 3 égal à δ (δ devrait être construit à partir de $u_4 - u_2 \equiv 0 \bmod p$ et $u_5 - u_1 \equiv 0 \bmod p$) . Par contre , si on forme un déterminant δ' à partir des congruences $u_4 - u_2 \equiv 0 \bmod p$, $u_5 - u_3 \equiv 0 \bmod p$ et $u_6 - u_4 \equiv 0 \bmod p$, on obtient un déterminant d'ordre 3 qui vaut

$$\delta' = \det\left(\binom{42}{i+4+14j} - \binom{42}{i+2+14j}\right)_{i,j=0,1,2} .$$

$$\text{Or } \binom{42}{i+4+14j} - \binom{42}{i+2+14j} = \frac{42\ldots(41-i-14j)}{1\ldots(i+4+14j)}\, 2.43.(18-i-14j)\ ;$$

comme dans le e), on met en facteur dans chaque colonne $\frac{42\ldots(41-14j)}{1\ldots(6+4j)}$, et ces quantités sont inversibles modulo p , $p \geq 43$; on obtient

$$\delta' = w.43^3 \begin{vmatrix} 5.\ 6.18 & 19.20.4 & 33.34.(-10) \\ 40.\ 6.17 & 26.20.3 & 12.34.(-11) \\ 40.39.16 & 26.25.2 & 12.11.(-12) \end{vmatrix}$$

$$= w.43^3.2^7.3^3.5^2.7^3.11^2.61 \text{ , d'où } \mathcal{P}_7 = \{43\} \text{ ; donc :}$$

<u>Proposition 4</u> : Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension cyclique de degré $3\ell^r$, ℓ premier ≥ 5 . Soit K le sous-corps de E de degré ℓ^r sur $\mathbb{Q}$. S'il existe un nombre premier p, $p \equiv 1 \bmod \ell^r$, totalement ramifié dans $K/\mathbb{Q}$ et vérifiant $p \neq 2\ell^r + 1$ et $p \neq 6\ell^r + 1$, alors Z_E n'est pas monogène .

d) <u>Extensions abéliennes de degré 5m , $m \in \mathbb{N}^*$</u> .

Si on reprend les notations du a) , et si $p \in \mathcal{P}_\ell$, alors $(1+\zeta_\ell)^{2m\ell} \equiv 1 \bmod p\,\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$; mais $(1+\zeta_\ell)^{2m\ell}$ est une unité de $\mathbb{Q}_o^{(\ell)}$, ce qui fait que la congruence $(1+\zeta_\ell)^{2m\ell} \equiv 1 \bmod p\,\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$ a lieu si et seulement si $(\ell-3)/2$ entiers rationnels sont congrus à zéro modulo p . Le cas $\ell = 5$ est donc particulier , car alors $p \in \mathcal{P}_5$ si et seulement si p divise un entier rationnel que l'on va calculer explicitement en fonction de m .

Soit $\zeta = \exp(2i\pi/5)$; on pose

$$(5) \qquad \mathcal{R}_m = \left\{ p \text{ premier tel que } (1+\zeta)^{10m} \equiv 1 \bmod p\,\mathbb{Z}[\zeta] \right\} .$$

Au lieu d'exprimer , comme dans b) , $(1+\zeta)^{10m}$ en fonction des coefficients $\binom{10m}{x}$, on va calculer cette quantité en fonction des nombres de Lucas et Fibonnaci . En effet , pour tout entier m , on a

$$(1+\zeta)^{10m} = (\zeta^2+\zeta^3)^{10m} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10m} = \frac{L_{10m} + F_{10m}\sqrt{5}}{2} \ ,$$

où les suites $(L_j)_{j\geq 0}$ et $(F_j)_{j\geq 0}$ sont définies par :

$L_o = 2 \qquad L_1 = 1 \qquad L_{j+2} = L_{j+1} + L_j$,

$F_o = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_{j+2} = F_{j+1} + F_j$.

Donc $(1+\zeta)^{10m} \equiv 1 \bmod p\,\mathbb{Z}[\zeta]$ si et seulement si $L_{10m} - 2 \equiv 0 \bmod p$ et $F_{10m} \equiv 0 \bmod p$.

Mais $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10m}$ est une unité de norme 1 de $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, et donc $L_{10m}^2 - 5F_{10m}^2 = 4$; il en résulte que si $L_{10m} - 2 \equiv 0 \bmod p$, alors $F_{10m} \equiv 0 \bmod p$; donc

(6) $\quad p \in \mathcal{R}_m$ si et seulement si p divise $L_{10m} - 2$.

Les identités vérifiées par les nombres de Lucas et Fibonnaci vont permettre de préciser (6) . En effet les relations

$$\frac{L_{10m} + F_{10m}\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{L_{5m} + F_{5m}\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad L_{5m}^2 - 5F_{5m}^2 = 4(-1)^m$$

permettent de montrer que si m est impair , $L_{10m} - 2 = L_{5m}^2$ et que si m est pair , $L_{10m} - 2 = 5F_{5m}^2$. D'où , en tenant compte de (2) :

Proposition 5 : Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension abélienne de degré 5m , $m \in \mathbb{N}^*$. Une condition nécessaire pour que Z_E soit monogène est , que pour tout nombre premier p ne divisant pas m , $p \equiv 1 \bmod 5$ et p ramifié dans $E/\mathbb{Q}$ avec un indice de ramification multiple de 5 , on ait

p divise L_{5m} si m est impair ,

p divise F_{5m} si m est pair .

Remarque 5 : En utilisant la relation $\frac{L_{5m}+F_{5m}\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{L_m+F_m\sqrt{5}}{2}\right)^5$, on montre que :

si m est impair , $\quad L_{5m} = L_m(5F_m^2 + 5F_m + 1)(5F_m^2 - 5F_m + 1)$

et si m est pair $\quad F_{5m} = F_m(L_m^2 + L_m - 1)(L_m^2 - L_m - 1)$,

ce qui permet de factoriser plus facilement L_{5m} et F_{5m} .

Si m varie de 1 à 25 , la liste des nombres premiers p , $p \equiv 1 \bmod 10$, $p \in \mathcal{R}_m$, est la suivante :

m	p
1	11
2	11
3	11 , 31
4	11 , 41
5	11 , 101 , 151
6	11 , 31 , 61
7	11 , 71 , 911
8	11 , 41 , 2161
9	11 , 31 , 181 , 541
10	11 , 101 , 151 , 3001
11	11 , 331 , 39161
12	11 , 31 , 41 , 61 , 2521
13	11 , 131 , 521 , 2081 , 24571
14	11 , 71 , 911 , 141961
15	11 , 31 , 101 , 151 , 12301 , 18451
16	11 , 41 , 1601 , 2161 , 3041
17	11 , 3571 , 1158551 , 12760031
18	11 , 31 , 61 , 181 , 541 , 109441
19	11 , 191 , 41611 , 87382901
20	11 , 41 , 101 , 151 , 401 , 3001 , 570601
21	11 , 31 , 71 , 211 , 911 , 21211 , 767131
22	11 , 331 , 661 , 39161 , 474541
23	11 , 461 , 1151 , 5981 , 324301 , 686551
24	11 , 31 , 41 , 61 , 241 , 2161 , 2521 , 20641
25	11 , 101 , 151 , 251 , 112128001 , 28143378001

Cette table montre qu'il existe des nombres premiers p, $p \equiv 1 \bmod 10$, $p > 10m + 1$, tels que $(1 + \zeta)^{10m} \equiv 1 \bmod p\mathbb{Z}[\zeta]$ (cf. remarque 2) . Pour les corps correspondants , on a $\Delta_{2m}(\psi)/\Delta_m(\psi) \equiv 1 \bmod p$ pour tout $\psi \in Z_E$. Ces exemples montrent que le résultat trouvé dans la proposition 1 peut être faux si ℓ et m ne vérifient pas les hypothèses (i) ou (ii).

Pour conclure cette partie , donnons deux exemples qui illustrent à la fois le cas 5m et le théorème de finitude .

Exemple 1 : Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension (cyclique) de degré 5ℓ, ℓ premier ≥ 7. Soit K le sous-corps de E de degré 5 sur $\mathbb{Q}$ et soit L le sous-corps de E de degré ℓ sur $\mathbb{Q}$.

D'après les résultats concernant le cas " 5 m " , si Z_E est monogène , les nombres premiers p qui peuvent se ramifier dans $K/\mathbb{Q}$ sont : 5 , ℓ (si $\ell \equiv 1 \bmod 5$) , 11 et les p , $p \equiv 1 \bmod 10\ell$ (cf. prop 2) qui divisent le nombre de Lucas $L_{5\ell}$.

D'après le théorème 2 , si $\ell \geq 2 \times 5 + 3 = 13$, les nombres premiers q qui peuvent se ramifier dans $L/\mathbb{Q}$, si Z_E est monogène , sont $q = \ell$, $q = 2\ell + 1$ et $q = 10\ell + 1$.

Il reste à étudier les cas $\ell = 7$ et $\ell = 11$.

Si $\ell = 7$, on cherche les nombres premiers q , $q \equiv 1 \bmod 70$ (d'après la proposition 2) , $q \in \mathcal{P}_{5,7}$. D'après (4') , q divise $u_6 - u_4$, avec

$$u_6 = \binom{70}{6} + \binom{70}{20} + \binom{70}{34} + \binom{70}{48} + \binom{70}{62} \quad \text{et}$$

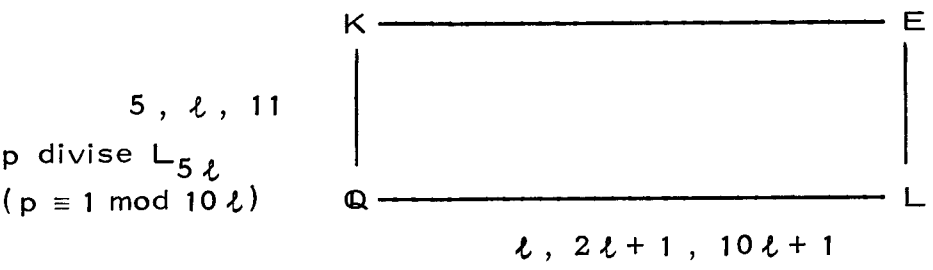
$$u_4 = \binom{70}{4} + \binom{70}{18} + \binom{70}{32} + \binom{70}{46} + \binom{70}{60} \quad ; \quad \text{on calcule}$$

$$u_6 - u_4 = 19519808413970050410$$
$$= 2.3.5.7.67.71.2819.74797.92671 ,$$

et le seul nombre premier congru à 1 modulo 70 qui divise $u_6 - u_4$ est 71 . Le résultat est donc le même que dans le cas général .

Si $\ell = 11$, alors $10\ell + 1 = 111$, et on vérifie numériquement qu'il n'y a pas de nombre premier q , $q > 111$, qui divise tous les $u_{t+1} - u_{t-1}$, $t = 2, \ldots, 9$ (cf. (4')) .

En conclusion , si Z_E est monogène , les nombres premiers qui peuvent se ramifier dans $K/\mathbb{Q}$ et $L/\mathbb{Q}$ sont indiqués sur le schéma ci-dessous :



Exemple 2 : Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension abélienne de degré 125 . Tout nombre premier p , $p \neq 5$, qui est ramifié dans $E/\mathbb{Q}$ vérifie $p \equiv 1 \bmod 5$, et l'indice de ramification de p est multiple de 5 . D'après les résultats obtenus dans la table précédente , avec $m = 25$, s'il existe p ramifié dans $E/\mathbb{Q}$, $p \neq 5$, 11 , 101 , 151 , 251 , p_1 et p_2 , avec $p_1 = 112128001$ et $p_2 = 28143378001$, alors Z_E n'est pas monogène .

Détaillons le cas cyclique de degré 125 ; les nombres premiers qui peuvent se ramifier dans $E/\mathbb{Q}$, si Z_E est monogène , sont indiqués sur le schéma ci-dessous :

E

| 251, 5, 11, 101, 151, p_1, p_2

L

| 251, 5

K

| 251

$\mathbb{Q}$

Les raisons en sont les suivantes :

(i) D'après [G(MN)2] , seul 251 peut se ramifier totalement dans $E/\mathbb{Q}$;

(ii) les nombres premiers suivants ne peuvent pas avoir un indice de ramifi - cation égal à 25 :

11 car $11 \not\equiv 1 \bmod 25$,

101 et 151 d'après la proposition 2 ; en effet $101 = 2 \times 50 + 1$ et $(2,5) = 1$, $151 = 3 \times 50 + 1$ et $(3,5) = 1$;

p_1 et p_2 d'après le théorème 2 ; en effet celui-ci s'applique car $\ell^r = 25$, $m = 5$ et donc $\frac{\ell - 1}{2} \ell^{r-1} = 10 \geq m+1$.

e) Calcul d'un déterminant .

Lemme : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2n = \lambda\mu$, $\lambda \geq 2\mu + 2$, et soit x vérifiant $\mu + 1 \leq x \leq \lambda - \mu - 1$ et $\lambda \neq 2x$. Soit $p \geq 2n + 1$ un nombre premier , et soit

$$\delta = \det \left(\binom{2n}{x + i + j\lambda} - \binom{2n}{x - i + j\lambda} \right)_{\substack{i = 1, \ldots, \mu \\ j = 0, \ldots, \mu - 1}} ;$$

alors $\delta = w(2n+1)^{\mu} \prod_{k=1}^{\mu-1} \left[(2n + 2k)(2n + 2k + 1) \right]^{\mu - k}$,

où w est inversible modulo p .

Démonstration : Les hypothèses faites entrainent que $1 \leq x - i + j\lambda \leq x + i + j\lambda \leq 2n - 1$ pour tout $i = 1, \ldots, \mu$ et $j = 0, \ldots, \mu - 1$.

Désignons par a_{ij} le terme général du déterminant δ, et pour simplifier, posons $x' = x + j\lambda$. En ajoutant à la ligne n° i une combinaison linéaire convenable des lignes n° 1 à i-1, et $\binom{2i-1}{i}$ fois le terme $\binom{2n}{x'} - \binom{2n}{x'}$, on obtient $\det(a_{ij}) = \det(b_{ij})$, avec

$$b_{ij} = \sum_{k=0}^{2i-1} \binom{2i-1}{k} \binom{2n}{x'+i-k} - \sum_{k=0}^{2i-1} \binom{2i-1}{k} \binom{2n}{x'-i-k} ;$$

on utilise les relations $\binom{2n+a}{x' \pm i - k} + \binom{2n+a}{x' \pm i - k - 1} = \binom{2n+a+1}{x' \pm i - k}$, $k, a = 0, \ldots, 2i-2$, pour en déduire que :

$$b_{ij} = \binom{2n+2i-1}{x'+i} - \binom{2n+2i-1}{x'+i-1} .$$

On calcule

$$b_{ij} = \frac{(2n+2i-1) \ldots (2n+i-x')}{1 \ldots (x'+i)} - \frac{(2n+2i-1) \ldots (2n+i-x'+1)}{1 \ldots (x'+i-1)}$$

$$= \frac{(2n+2i-1) \ldots (2n+1)\,2n \ldots (2n-x'+i+1)}{1 \ldots (x'+i)} (2n-2x')$$

$$= (2n+2i-1) \ldots (2n+1)\, c(x')\, f_i(x') , \text{ avec}$$

$$c(x') = \frac{2n \ldots (2n-x'+\mu+1)}{1 \ldots (x'+\mu)} (2n-2x') \quad \text{et}$$

$$f_i(x') = [(2n-x'+\mu) \ldots (2n-x'+i+1)]\,[(x'+i+1) \ldots (x'+\mu)] .$$

On met en facteur dans chaque ligne le terme $(2n+2i-1) \ldots (2n+1)$, puis dans chaque colonne le terme $c(x')$. Mais toutes les quantités $\frac{2n \ldots (2n-x'+\mu+1)}{1 \ldots (x'+\mu)}$ sont inversibles modulo p, et l'hypothèse $\lambda \neq 2x$ entraine $2n - 2x' = 2n - 2x - 2j\lambda \neq 0$, et donc $2(n-x')$ est inversible modulo p ; d'où $\delta = v\left[\prod_{i=1}^{\mu} (2n+1) \ldots (2n+2i-1)\right] \delta'$, où v est inversible modulo p et où $\delta' = \det\left(f_i(x+j\lambda)\right)_{\substack{i=1,\ldots,\mu \\ j=0,\ldots,\mu-1}}$.

Or $(2n - x - j\lambda + k)(x + j\lambda + k) = -(x + j\lambda - n)^2 + (n+k)^2$;
on pose $y_j = -(x + j\lambda - n)^2$ et alors $\delta' = \det\left(g_i(y_j)\right)$,

avec $g_i(y_j) = \prod_{k=i+1}^{\mu} (y_j + (n+k)^2)$

$$= y_j^{\mu-i} + \sum_{k=0}^{\mu-i-1} c_{ik}\, y_j^{\mu-i-k} \quad , \quad c_{ik} \in \mathbb{N} \ ,$$

et donc $\left(g_i(y_j)\right) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & c_{ik} \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0^{\mu-1} & \cdots & y_{\mu-1}^{\mu-1} \\ \vdots & & \vdots \\ y_0 & & y_{\mu-1} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

le deuxième déterminant est un déterminant de Vandermonde ; c'est un produit de termes de la forme

$$(x + k\lambda - n)^2 - (x + j\lambda - n)^2 = (k-j)\lambda(2n - 2x - (k+j)\lambda), \ j \neq k,$$

et l'hypothèse $\lambda \neq 2x$ entraine que tous ces termes sont inversibles modulo p , d'où le résultat .

2) Sous-corps de $\mathbb{Q}^{(p)}$, p premier .

Le cas des sous-corps de $\mathbb{Q}^{(p)}$ est contenu dans le résultat plus général suivant :

Théorème 4 : Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension cyclique de degré $n \geq 4$. On suppose que tout nombre premier p ramifié dans $E/\mathbb{Q}$ vérifie les hypothèses suivantes : $p \equiv 1 \bmod n$ et p est totalement ramifié dans $E/\mathbb{Q}$.

Alors l'anneau des entiers Z_E de E n'est pas monogène sauf si

$E = \mathbb{Q}^{(n+1)}$ lorsque $n+1$ est un nombre premier ,

ou $E = \mathbb{Q}_o^{(2n+1)}$ lorsque $2n+1$ est un nombre premier .

Démonstration : On reprend les notations de l'introduction . On suppose que Z_E est monogène , et on appelle θ un entier de E tel que $Z_E = \mathbb{Z}[\theta]$. Les hypothèses faites entrainent que tous les sous-corps (différents de $\mathbb{Q}$) de E ont le même conducteur f (égal au produit des nombres premiers ramifiés dans $E/\mathbb{Q}$) , que le discriminant de E est égal à f^{n-1} et que pour tout $g \in Gal(E/\mathbb{Q})$, $g \neq 1$, $\Delta_g(\theta) = N_{E/\mathbb{Q}}(\theta - \theta^g) = \pm f$.

Soit p , $p \equiv 1 \bmod n$, l'un des nombres premiers divisant f ; p est totalement ramifié dans $E/\mathbb{Q}$, donc $e = n$, et le groupe d'inertie de p est égal à $Gal(E/\mathbb{Q})$; on en désigne toujours par σ un générateur .

En écrivant que tous les rapports $\Delta_{\sigma^\lambda}(\theta)/\Delta_{\sigma^\mu}(\theta)$ doivent être égaux à ± 1 , pour λ , $\mu = 1, \ldots, n-1$, on obtient que pour que Z_E soit monogène , il est nécessaire que pour tout $k = 1, \ldots, n-1$, on ait

$$\left(\frac{1 - \zeta_n^k}{1 - \zeta_n}\right)^{2n} \equiv 1 \bmod p\mathbb{Z}[\zeta] .$$

On pose $\zeta = \zeta_n = \exp(2i\pi/n)$, alors pour tout $k = 1, \ldots, n-1$, on a $(1 - \zeta^k)^{2n} \equiv (1 - \zeta)^{2n} \bmod p\,\mathbb{Z}[\zeta]$. Il en résulte qu'il existe $c \in \mathbb{Z}$ $\left(c \equiv \frac{1}{\varphi(n)} Tr_{\mathbb{Q}(n)/\mathbb{Q}}(1 - \zeta)^{2n} \bmod p\right)$, tel que pour tout $k = 1, \ldots, n-1$, on ait :

$$(1 - \zeta^k)^{2n} \equiv c \bmod p\mathbb{Z}[\zeta] . \tag{7}$$

Puisque $p \equiv 1 \bmod n$, p est totalement décomposé dans $\mathbb{Q}^{(n)}$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal fixé au-dessus de p dans $\mathbb{Q}^{(n)}$; on identifie le corps résiduel en $\mathfrak{p}$ à $\mathbb{F}_p$, et on désigne par $\overline{u}$ l'image de $u \in \mathbb{Z}[\zeta]$ dans $\mathbb{F}_p$.

On considère le polynome

$$P = (1 - X)^{2n} - c \text{ de } \mathbb{Z}[X]$$

et son image $\overline{P}$ dans $\mathbb{F}_p[X]$.

D'après (7) , on a $\overline{P}(\overline{\zeta}^k) = \overline{0}$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$. Or $\overline{\zeta}, \overline{\zeta}^2, \ldots, \overline{\zeta}^{n-1}$ sont les n-1 racines (deux à deux distinctes) du polynome $\overline{\phi} = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + \overline{1}$ de $\mathbb{F}_p[X]$; donc $\overline{P} = \overline{\phi}\,\overline{h}$ dans $\mathbb{F}_p[X]$, et donc $P = \phi h + ph'$, $h , h' \in \mathbb{Z}[X]$.

Soit R le reste de la division de P par ϕ ; on doit avoir

$R \equiv 0 \bmod p\mathbb{Z}[X]$.

Or $(1-X)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j}$. On en déduit que

$R = a_o + \sum_{j=1}^{n-2} a_j X^j$, avec pour tout $j \geq 1$,

$$a_j = (-1)^j \left[\binom{2n}{j} + (-1)^n \binom{2n}{j+n} \right] - \left[(-1)^{n-1} \binom{2n}{n-1} - \binom{2n}{2n-1} \right] .$$

La suite des calculs est alors analogue au calcul fait lorsque n est un nombre premier . Il faut distinguer deux cas :

$\underline{1^{er} \text{ cas}}$: $\underline{n \text{ est impair}}$, $\underline{n = 2t+1}$, $\underline{t \geq 2}$

On exprime que $a_t \equiv 0 \bmod p$ et $a_{t-1} \equiv 0 \bmod p$; on en déduit que

$$u = \binom{2n}{t+1} - \binom{2n}{t} + \binom{2n}{t+2} - \binom{2n}{t-1} \equiv 0 \bmod p .$$

Or $u = \dfrac{(4t+2) \ldots (3t+4)}{1 \cdot 2 \ldots (t+2)} 4(t+1)(2t+1)(4t+3)$. Puisque p est un nombre premier, et que $p \equiv 1 \bmod 2n$, tous les entiers λ , $1 \leq \lambda \leq 4t+2$, sont inversibles modulo p ; donc $u \equiv 0 \bmod p$, c'est-à-dire que $a_t \equiv a_{t-1} \bmod p$ si et seulement si $\underline{2n+1 \equiv 0 \bmod p}$.

$\underline{2^{ème} \text{ cas}}$: $\underline{n \text{ est pair}}$, $\underline{n = 2t}$, $\underline{t \geq 2}$

On suppose que $a_t \equiv 0 \bmod p$ et $a_{t-1} \equiv 0 \bmod p$; on en déduit que

$$u = \binom{2n}{t} + \binom{2n}{t} + \binom{2n}{t-1} + \binom{2n}{t+1} \equiv 0 \bmod p .$$

Or $u = \dfrac{4t \ldots (3t+2)}{1.2 \ldots (t+1)} 2(2t+1)(4t+1)$. Puisque p est un nombre premier, et que $p \equiv 1 \bmod n$, tous les entiers λ , $1 \leq \lambda \leq 2t$, $2t+2 \leq \lambda \leq 4t$ sont inversibles modulo p ; donc $u \equiv 0 \bmod p$, c'est-à-dire que $a_t \equiv a_{t-1} \bmod p$ si et seulement si $\underline{(n+1)(2n+1) \equiv 0 \bmod p}$.

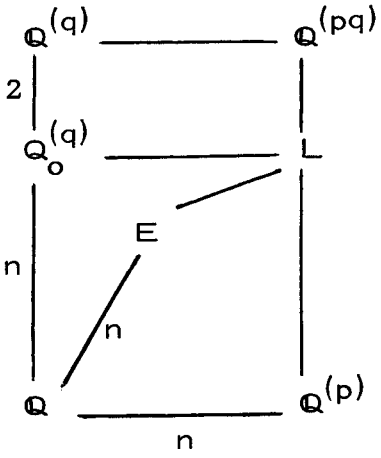
On a donc montré que si $E/\mathbb{Q}$ vérifie les hypothèses du théorème 4, une condition nécessaire pour que Z_E soit monogène est que les seuls nombres premiers totalement ramifiés soient égaux à $n+1$ ou $2n+1$; il y a donc 3 cas :

(i) n est pair , $n+1$ est un nombre premier , $2n+1$ ne l'est pas , et alors $E = \mathbb{Q}^{(n+1)}$ est le seul corps qui convienne .

(ii) n est pair ou impair , $2n + 1$ est un nombre premier , $n + 1$ ne l'est pas , et alors $E = \mathbb{Q}_o^{(2n+1)}$ est le seul corps qui convienne .

(iii) n est pair , $n + 1$ est un nombre premier p , $2n + 1$ est un nombre premier q , et E est un sous-corps cyclique de degré n de $\mathbb{Q}^{(pq)}$, avec p et q totalement ramifiés dans E (une telle situation existe : par exemple $n = 6$, $p = 7$, $q = 13$; $n = 18$, $p = 19$, $q = 37$; $n = 30$, $p = 31$, $q = 61$; etc ...) . Il reste à montrer que pour cette famille de corps , Z_E n'est pas monogène .

Montrons d'abord que $E \not\subset \mathbb{R}$.



Soit $\mathbb{Q}_o^{(q)}$ le sous-corps réel maximal de $\mathbb{Q}^{(q)}$ et soit $L = \mathbb{Q}_o^{(q)}\,\mathbb{Q}^{(p)}$.

Soit $F = E\,\mathbb{Q}^{(p)}$; puisque p et q sont totalement ramifiés dans E et que seul p est ramifié dans $\mathbb{Q}^{(p)}$, $E \cap \mathbb{Q}^{(p)} = \mathbb{Q}$, les extensions sont linéairement disjointes, et donc $[F : \mathbb{Q}] = n^2$. Mais F est une extension de $\mathbb{Q}^{(p)}$, et $\mathbb{Q}^{(pq)}/\mathbb{Q}^{(p)}$ qui est cyclique contient une unique sous-extension d'indice 2 ; donc $F = L$ et $E \subset L$.

Mais pour les mêmes raisons que ci-dessus , E et $\mathbb{Q}_o^{(q)}$ sont linéairement disjointes ; donc $L = \mathbb{Q}_o^{(q)}\,E$; puisque $L = \mathbb{Q}_o^{(q)}\,\mathbb{Q}^{(p)}$, $L \not\subset \mathbb{R}$; donc $E \not\subset \mathbb{R}$.

Mais , si une extension $E/\mathbb{Q}$ est telle que $E \not\subset \mathbb{R}$, alors pour tout $k = 1, \ldots, n - 1$, on a $\Delta_{\sigma^k}(\theta) > 0$ et Z_E est monogène si et seulement si pour tout $k = 1, \ldots, n - 1$, $\Delta_{\sigma^k}(\theta) = f$.

On refait un raisonnement analogue au précédent , mais cette fois avec le polynôme $P = (1 - X)^n - c$. Avec les mêmes notations que celles du cas $n = 2t$, on obtient que $a_t \equiv a_{t-1} \bmod p$ si et seulement si

$u = \binom{n}{t} + \binom{n}{t-1} \equiv 0 \bmod p$. Or $\binom{2t}{t} + \binom{2t}{t-1} = \frac{2t \ldots (t+2)}{1 \ldots t}(2t+1)$

et donc si $E \not\subset \mathbb{R}$, et si Z_E est monogène , seul le nombre premier $n + 1$ peut totalement se ramifier .

Donc pour les extensions vérifiant (iii) , on a bien , pour tout $\psi \in Z_E$, $\Delta^2_{\sigma^k}(\psi) \equiv \Delta^2_{\sigma^j}(\psi) \bmod q$, pour tout k , j variant de 1 à n - 1, mais on n'a pas $\Delta_{\sigma^k}(\psi) \equiv \Delta_{\sigma^j}(\psi) \bmod q$, pour tout k , j . Puisque les extensions (iii) ne sont pas réelles , elles ne sont pas monogènes , ce qui achève la démonstration du théorème 4 .

Remarque 6 : Soit $E/\mathbb{Q}$ une extension cyclique de degré premier $\ell \geq 5$; si $E/\mathbb{Q}$ est modérément ramifiée , elle vérifie les hypothèses du théorème 4 ; si $E/\mathbb{Q}$ est sauvagement ramifiée, puisque son degré est premier , la démonstration du théorème 4 est encore valable si $E \not\subset \mathbb{Q}^{(\ell^2)}$. On retrouve ainsi le résultat démontré dans [G(MN)1] .

Soit maintenant E un sous-corps de $\mathbb{Q}^{(p)}$, p nombre premier impair ; alors $E/\mathbb{Q}$ est cyclique et vérifie les hypothèses du théorème 4 ; il en résulte :

Théorème 5 : Soit p un nombre premier impair et soit E un sous-corps de $\mathbb{Q}^{(p)}$. Soit Z_E l'anneau des entiers de E .
Alors :

(i) Si $E = \mathbb{Q}^{(p)}$, $\mathbb{Q}_o^{(p)}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}\, p})$ ou $\mathbb{Q}$, alors Z_E est monogène ;

(ii) Si $p \equiv 1 \bmod 3$ et si E est le sous-corps cubique de $\mathbb{Q}^{(p)}$, alors Z_E est monogène si et seulement s'il existe $x , y \in \mathbb{Z}$ tels que $bx(x^2 - 9y^2) + ay(x^2 - y^2) = 1$, où $p = (a^2 + 27b^2)/4$, a et b de même parité (cf. [G(MN)3]).

(iii) Dans tous les autres cas , Z_E n'est pas monogène .

BIBLIOGRAPHIE

[G(MN)1] M.-N. GRAS , Non monogénéité de l'anneau des entiers des extensions cycliques de $\mathbb{Q}$ de degré premier $\ell \geq 5$,
Journal of Number Theory , à paraître .

[G(MN)2] M.-N. GRAS , Condition nécessaire de monogénéité de l'anneau des entiers d'une extension abélienne de $\mathbb{Q}$,
Sém. de théorie des Nombres Paris , Birkhaüser , 1984-85 , à paraître.

[G(MN)3] M.-N. GRAS , Sur les corps cubiques cycliques dont l'anneau des entiers est monogène ,
C.R. Acad. Sc. Paris, t.278 (1974) , série A , 59-62 .

[L] H.-W. LEOPOLDT , Über die Hauptordnung der ganzen Elemente eines abelschen Zahlkörpers ,
J. reine angew. Math., 201 (1979) , 119-149 .

[P] J.-J. PAYAN , Sur les classes ambiges et les ordres monogènes d'une extension cyclique de degré premier impair sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps quadratique imaginaire ,
Arkiv för Math., 11 (1973) , 239-244 .

Marie-Nicole GRAS
Université de Besançon et C.N.R.S.
Equipe de Mathématiques
U.A. n° 040741
Faculté des Sciences
F - 25030 BESANÇON CEDEX