THÉORIE DES NOMBRES

BESANÇON

Année 1983 - 1984

REPRÉSENTATIONS ℓ-ADIQUES ET INVARIANTS CYCLOTOMIQUES

Jean-François JAULENT

REPRÉSENTATIONS ℓ-ADIQUES ET INVARIANTS CYCLOTOMIQUES

Par

Jean-François JAULENT
Université de Franche-Comté
Faculté des Sciences et des Techniques
25030 Besançon Cedex

Cet article explore un certain nombre de relations liées à la dualité :

- La première met en balance la ℓ-extension abélienne maximale ℓ-ramifiée M d'un corps de nombres K avec celle, C', qui est non ramifiée et ℓ-décomposée.
- La seconde relie l'extension C' à la sous-extension H de M, composée des ℓ-extensions cycliques de K qui peuvent se plonger dans une ℓ-extension cyclique de degré arbitrairement grand.
- La troisième s'appuie sur la réinterprétation par la K-théorie des radicaux associés aux extensions M et H.

Les relations obtenues proviennent de la comparaison de trois points de vue :

- La théorie du corps de classes, qui interprète les groupes de Galois des extensions considérées comme groupes de classes d'idéaux (au sens ordinaire dans le cas fini, au sens infinitésimal dans le cas infini) ;
- La théorie de Kummer, qui décrit le radical de ces extensions à l'aide du groupe multiplicatif du corps K, mais qui requiert l'existence dans K de racines de l'unité en nombre suffisant ;
- La théorie de Tate, qui présente le ℓ-Sylow du groupe $K_2(K)$ à l'aide des symboles universels associés aux racines de l'unité d'ordre ℓ-primaire.

Les trois dualités annoncées ne s'expriment donc pleinement qu'en présence de toutes les racines ℓ-primaires de l'unité, c'est-à-dire au sommet $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ de la tour cyclotomique engendrée sur K par ces mêmes racines. Cependant, elles se traduisent à chaque niveau fini K_n de la tour, par des relations précises entre certains sous-groupes ou quotients finis attachés aux groupes de classes, de radicaux, ou de symboles des corps K_n. Leur mise en évidence pose deux séries de problèmes :

- Le premier est dû aux limites mêmes de la théorie classique d'Iwasawa : les formules bien connues donnant l'ordre des quotients $X/(\gamma^{\ell^n}-1)X$ associés à un $\mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$-module noethérien X ne s'appliquent qu'aux $\mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$-modules de torsion pour lesquels ces quotients sont finis. Or, la plupart des groupes X_n étudiés ici ne peuvent pas être obtenus comme quotients $X/(\gamma^{\ell^n}-1)X$ associés à un tel module. Pour rendre compte de leur comportement, il est indispensable de sortir du cadre habituel donné par Iwasawa, en introduisant un paramètre supplémentaire : Nous disons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels est paramétrée par les entiers $\rho\geq 0$, λ, et μ, si et seulement si la quantité

$$u_n - [\rho\, n\, \ell^n + \mu\, \ell^n + \lambda\, n]$$

reste bornée indépendamment de n. Les groupes étudiés ici sont tous des modules paramétrés, au sens de cette définition.

- Le deuxième problème est galoisien : Pour obtenir les identités de dualité, il est nécessaire d'introduire les racines de l'unité d'ordre ℓ-primaire, et donc, si le corps de base F ne contient pas les racines d'ordre ℓ, de faire d'abord une extension abélienne K de degré $[K:F]$ étranger avec ℓ, avant de monter la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K. Pour retrouver les invariants attachés au corps F (ou à ses ℓ-extensions F_n) à partir de ceux attachés au corps K (ou à ses ℓ-extensions K_n) il convient de prendre en compte l'action du groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}\,(K/F)$ sur les $\mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$-modules étudiés. Le plus simple est de raisonner en termes de représentations ℓ-adiques, en convenant de dire qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules finis est paramétrée par les caractères virtuels $\rho\geq 0$, λ, et μ, lorsque, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{x_n^\varphi}$ de la φ-composante de X_n est donnée par la formule

$$x_n^\varphi \sim \langle \rho, \varphi\rangle\, n\, \ell^n + \langle \mu, \varphi\rangle\, \ell^n + \langle \lambda, \varphi\rangle\, n,$$

où nous écrivons $u_n \sim v_n$ pour exprimer que la différence $u_n - v_n$ est bornée.

Le résultat essentiel de cette étude est que les paramètres associés aux divers modules évoqués plus haut s'expriment tous en fonction des seuls paramètres λ_C et μ_C du groupe de Galois C' de la ℓ-extension abélienne non ramifiée ℓ-décomposée maximale du corps K_∞, et de quelques paramètres galoisiens très simples du schéma d'extensions.

Lorsque le corps F est totalement réel, nous montrons que les paramètres λ_C et μ_C vérifient un spiegelungssatz plus fort que celui de Leopoldt ; enfin, en appendice, nous illustrons les résultats obtenus en calculant explicitement le caractère de défaut d'une conjecture de Coates.

SOMMAIRE

1 - RESULTATS PRELIMINAIRES

§ a - Description de l'algèbre de Galois $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$

§ b - Structures des $\Lambda[\Delta]$-modules noethériens

§ c - Suites paramétrées de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules finis.

2 - ETUDE DU GROUPE DE GALOIS DE LA ℓ-EXTENSION ABELIENNE NON RAMIFIEE ℓ-DECOMPOSEE MAXIMALE DE K_∞

§ a - Définition du groupe $C\ell'$

§ b - Description kummerienne des ℓ-extensions non ramifiées ℓ-décomposées C'_n / K_n

§ c - Interprétation des facteurs cyclotomiques.

3 - ETUDE DU GROUPE DE GALOIS DE LA ℓ-EXTENSION ABELIENNE ℓ-RAMIFIEE MAXIMALE DE K_∞

§ a - Définition du groupe $\mathfrak{G}$

§ b - Etude du sous-groupe de torsion $\mathfrak{T}$, et interprétation des facteurs cyclotomiques

§ c - Inégalités du miroir.

4 - APPLICATION AU GROUPE $K_2(K_\infty)$ ET AUX DIVERS NOYAUX ASSOCIES AUX SYMBOLES CLASSIQUES

§ a - Description du noyau modéré et du noyau hilbertien dans $K_2(K)$

§ b - Description du noyau modéré et du noyau hilbertien dans les groupes $\mathfrak{K}_n$

§ c - Comparaison avec le groupe des classes au sens ordinaire.

5 - APPENDICE

Sur une conjecture de J. Coates.

6 - TABLEAU DES RESULTATS

1 - RESULTATS PRELIMINAIRES

§ a - Description de l'algèbre de Galois $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$:

Nous considérons, dans tout ce qui suit, le schéma de corps suivant : ℓ désigne un nombre premier impair, ζ une racine primitive ℓ-ième de l'unité, K/F une extension abélienne de corps de nombres, contenant ζ et de degré d étranger à ℓ (par exemple $K = F[\zeta]$), F_∞ enfin la tour cyclotomique construite sur F, et $K_\infty = KF_\infty$ celle construite sur K.

Nous nous intéressons au groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}(K/F)$, que nous identifions à son relèvement naturel $\mathrm{Gal}(K_\infty/F_\infty)$ dans $\mathrm{Gal}(K_\infty/F)$. Son ordre $d = [K:F]$ étant supposé inversible dans $\mathbb{Z}_\ell$, à chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ correspond un idempotent primitif

$$e_\varphi = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau)\,\tau^{-1}$$

de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$, et le facteur isotypique associé $Z_\varphi = \mathbb{Z}_\ell[\Delta]\,e_\varphi$ s'identifie à l'anneau local des entiers d'une extension cyclotomique non ramifiée de $\mathbb{Q}_\ell$, qui a pour degré le degré $d_\varphi = [Z_\varphi : \mathbb{Z}_\ell]$ du caractère φ. En particulier tout $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module noethérien sans $\mathbb{Z}_\ell$-torsion est somme directe d'exemplaires des Z_φ, donc $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-projectif.

Introduisons le semi-groupe $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ des caractères des $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules noethériens et projectifs, puis le groupe $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ des caractères virtuels du groupe Δ sur l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$. Le groupe $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ est muni d'un produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau)\,\psi(\tau^{-1})$$

(pour lequel les caractères irréductibles sont deux à deux orthogonaux, et de carré scalaire $\langle \varphi, \varphi \rangle = d_\varphi$), ainsi que d'une involution naturelle, que l'on peut définir comme suit : Pour chaque naturel n, notons K_n l'unique sous-corps de K_∞ qui est de degré ℓ^n sur K, écrivons $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(K_n/K)$ son groupe de Galois et μ_n le groupe des racines d'ordre ℓ-primaire de l'unité contenues dans K_n, puis notons $\mu_\ell = \varinjlim \mu_n$ la réunion des μ_n et $\mathbb{T}_\ell = \varprojlim \mu_n$ le module de Tate, qui est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module de dimension 1 sur $\mathbb{Z}_\ell$. Si ω désigne le caractère du module $\mathbb{T}_\ell$, l'application $\chi \mapsto \chi^*$, définie par

$$\chi^* = \omega\chi^{-1} \quad \text{(avec la convention } \chi^{-1}(\tau) = \chi(\tau^{-1})\text{, pour tout } \tau \text{ de } \Delta\text{)},$$

est une involution du groupe $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$, appelée involution du miroir. Nous disons que ω est le caractère cyclotomique et χ^* le reflet du caractère χ.

Plusieurs éléments de $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ nous intéressent plus particulièrement :

<u>PROPOSITION 1</u> : Pour chaque entier naturel n, le quotient $(\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_n)/\mu_n$ du tensorisé ℓ-adique du groupe E_n des unités de K_n par son sous-groupe de torsion μ_n est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module projectif de caractère $\ell^n\chi_\infty - 1$, où $\chi_\infty = \sum_{p_\infty} \chi_{p_\infty}$ désigne la somme, sur toutes les places à l'infini p_∞ du corps F, des induits à Δ des caractères unités de leurs sous-groupes de décomposition respectifs Δ_{p_∞} dans l'extension abélienne K/F.

<u>PROPOSITION 2</u> : Pour chaque n assez grand, le tensorisé ℓ-adique $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} (E_n'/E_n)$ du quotient E_n'/E_n du groupe des ℓ-unités de K_n par le sous-groupe des unités est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module dont le caractère χ_ℓ, indépendant de n, est donné par la formule :

$$\chi_\ell = \sum_{\mathfrak{l}|\ell} g_{\mathfrak{l}}\, \chi_{\mathfrak{l}}\,.$$

Dans celle-ci, la sommation porte sur les places $\mathfrak{l}$ de F au-dessus de ℓ, l'entier $g_{\mathfrak{l}}$ est l'indice de décomposition de $\mathfrak{l}$ dans la tour cyclotomique F_∞/F, et $\chi_{\mathfrak{l}}$ est l'induit à Δ du caractère de la représentation unité du sous-groupe de décomposition $\Delta_{\mathfrak{l}}$ de la place $\mathfrak{l}$ dans l'extension K/F.

Démonstration des propositions : Le groupe $(\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_n)/\mu_n$ étant sans torsion, la première proposition résulte directement du théorème de représentation de Herbrand (cf. [5]). Commes les places à l'infini se décomposent complètement dans la tour cyclotomique, il vient en effet :

$$\mathbb{Z}_\ell \oplus (\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_n)/\mu_n \simeq \bigoplus_{p_\infty} \mathbb{Z}_\ell[\Gamma_n \times \Delta/\Delta_{p_\infty}].$$

Pour établir la seconde proposition, introduisons le sous-groupe $I_n(\ell)$ engendré dans le groupe I_n des idéaux de K_n par les idéaux premiers au-dessus de ℓ. Pour chaque $\mathfrak{l}$ de F au-dessus de ℓ, le groupe quotient $\Delta/\Delta_{\mathfrak{l}}$ opère fidèlement sur les places $\mathfrak{L}$ de K au-dessus de $\mathfrak{l}$, et il y a exactement $g_{\mathfrak{l}}$ places de K_n au-dessus de chaque $\mathfrak{L}$ dès que n est supérieur ou égal à $g_{\mathfrak{l}}$. Le quotient E_n'/E_n s'identifiant au sous-groupe d'indice fini des idéaux principaux de $I_n(\ell)$, il vient ainsi :

$$\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} (E_n'/E_n) \simeq \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} I_n(\ell) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{l}|\ell} \mathbb{Z}_\ell[\Gamma_{g_{\mathfrak{l}}} \times \Delta/\Delta_{\mathfrak{l}}],$$ comme

attendu.

§ b - Structure des $\Lambda[\Delta]$-modules noethériens :

Faisons choix d'un générateur topologique γ du groupe $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, écrivons $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$ ce groupe de Galois, et introduisons l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$. La décomposition directe $\mathbb{Z}_\ell[\Delta] = \oplus \mathbb{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi$ de l'algèbre de Galois $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ se propage en une décomposition directe $\Lambda[\Delta] = \oplus \Lambda[\Delta]e_\varphi$ de l'algèbre $\Lambda[\Delta]$, où chaque facteur isotypique $\Lambda_\varphi = \mathbb{Z}_\varphi[[\gamma-1]]$ est un anneau local régulier complet de dimension 2, et un Λ-module libre de dimension d_φ. Si donc M est un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien (noté additivement), les résultats de Serre (cf. [12], § 5) permettent d'affirmer que chaque composante isotypique $M_\varphi = e_\varphi M$ est pseudo-isomorphe en tant que Λ_φ-module noethérien à une somme directe finie de Λ_φ-modules élémentaires ; ce qui s'écrit :

$$M_\varphi \sim \Lambda_\varphi^{\rho_\varphi} \oplus \Big(\bigoplus_{i=0}^{s_\varphi} \Lambda_\varphi / \mathfrak{f}_{\varphi,i}\Lambda_\varphi \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i=0}^{t_\varphi} \Lambda_\varphi / \ell^{m_{\varphi,i}} \Lambda_\varphi \Big).$$

Dans cette formule, les $\left(\mathfrak{f}_{\varphi,i}\right)_{i=0,\dots,s_\varphi}$ forment une suite décroissante de polynômes distingués de l'anneau $\mathbb{Z}_\varphi[\gamma-1]$, et les $\left(m_{\varphi,i}\right)_{i=0,\dots,t_\varphi}$ sont des entiers naturels non nuls. La pseudo-décomposition est d'ailleurs essentiellement unique sous les conditions énoncées. Autrement dit :

<u>THEOREME 1</u> : Tout $\Lambda[\Delta]$-module noethérien M est pseudo-isomorphe à une somme directe finie de $\Lambda[\Delta]$-modules isotypiques élémentaires. Plus précisément, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, il existe un unique triplet d'entiers naturels $(\rho_\varphi, s_\varphi, t_\varphi)$, une unique suite décroissante $\left(\mathfrak{f}_{\varphi,i}\right)_{i=0,\dots,s_\varphi}$ de polynômes distingués de l'anneau $\mathbb{Z}_\varphi[\gamma-1]$, et une unique suite décroissante $\left(m_{\varphi,i}\right)_{i=0,\dots,t_\varphi}$ d'entiers naturels non nuls, tels que la φ-composante $M_\varphi = e_\varphi M$ du module M soit $\Lambda[\Delta]$ pseudo-isomorphe à la somme directe :

$$M_\varphi \sim \Lambda_\varphi^{\rho_\varphi} \oplus \Big(\bigoplus_{i=0}^{s_\varphi} \Lambda_\varphi / \mathfrak{f}_{\varphi,i}\Lambda_\varphi \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i=0}^{t_\varphi} \Lambda_\varphi / \ell^{m_{\varphi,i}} \Lambda_\varphi \Big).$$

L'entier ρ_φ est la dimension $\dim_{\Lambda_\varphi} M_\varphi$ du Λ_φ-module M_φ, et le polynôme $\rho_\varphi = \prod_{i=0}^{t_\varphi} \ell^{m_{\varphi,i}} \cdot \prod_{i=0}^{s_\varphi} \mathfrak{f}_{\varphi,i}$ est le polynôme caractéristique de son sous-module de Λ_φ-torsion.

DEFINITION 1 : Nous appelons paramètres d'un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien M les caractères ℓ-adiques du groupe Δ définis à partir des invariants d'Iwasawa des composantes isotypiques de M par les formules

$$\rho = \sum_{\varphi} \rho_{\varphi}\varphi \quad , \quad \lambda = \sum_{\varphi} \lambda_{\varphi}\varphi \quad , \quad \text{et} \quad \mu = \sum_{\varphi} \mu_{\varphi}\varphi,$$

où, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ, les entiers $\rho_{\varphi}, \lambda_{\varphi}$, et μ_{φ} mesurent respectivement la dimension $\dim_{\Lambda_{\varphi}} M_{\varphi}$ de la φ-composante de M, ainsi que le degré $\sum_{i=0}^{s_{\varphi}} \deg \mathfrak{f}_{\varphi,i}$ et la ℓ-valuation $\sum_{i=0}^{t_{\varphi}} m_{\varphi,i}$ du polynôme caractéristique de son sous-module de Λ_{φ}-torsion.

L'algèbre Λ_{φ} étant elle-même un Λ-module libre de dimension $d_{\varphi} = \langle\varphi,\varphi\rangle$, un calcul direct montre ainsi que les invariants d'Iwasawa d'un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien M, considéré comme Λ-module, ne sont autres que les degrés respectifs des paramètres de sa $\Lambda[\Delta]$-structure. Ainsi :

$$\dim_{\Lambda} M = \sum_{\varphi} \dim_{\Lambda} \Lambda_{\varphi}^{\rho_{\varphi}} = \sum_{\varphi} \rho_{\varphi}\, d_{\varphi} = \deg \rho \,,$$

et un résultat analogue vaut pour les paramètres λ et μ.

§ c - Suites paramétrées de $\mathbb{Z}_{\ell}[\Delta]$-modules finis :

DEFINITION 2 : Nous disons qu'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}_{\ell}[\Delta]$-modules finis est paramétrée par les caractères ℓ-adiques virtuels $\rho = \sum_{\varphi} \rho_{\varphi}\varphi$, $\lambda = \sum_{\varphi} \lambda_{\varphi}\varphi$, et $\mu = \sum_{\varphi} \mu_{\varphi}\varphi$, lorsque, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{o_{\varphi}(n)}$ de la φ-composante $e_{\varphi}M_n$ du module M_n est donné asymptotiquement par la formule

$$o_{\varphi}(n) \sim \langle\rho,\varphi\rangle\, n\ell^n + \langle\mu,\varphi\rangle\,\ell^n + \langle\lambda,\varphi\rangle\, n = \rho_{\varphi} d_{\varphi}\, n\ell^n + \mu_{\varphi} d_{\varphi}\,\ell^n + \lambda_{\varphi} d_{\varphi}\, n,$$

où l'identité $u_n \sim v_n$ signifie ici que la différence $(u_n - v_n)$ est bornée indépendamment de n.

EXEMPLES :

1. La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des groupes de racines de l'unité d'ordre ℓ-primaire contenues dans les corps K_n, et la suite des quotients $(\mu_n/\mu_n^{\ell^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites paramétrées par les caractères $\rho=0$, $\lambda=\omega$, $\mu=0$.
2. D'après la proposition 1, la suite $(E_n/E_n^{\ell^n})_{n\in\mathbb{N}}$, construite à partir

des groupes d'unités des corps K_n, est paramétrée par les caractères $\rho = \chi_\infty$, $\lambda = \omega - 1$, $\mu = 0$. En particulier son paramètre λ n'est pas dans $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$, lorsque le corps F ne contient pas ζ.

3. D'après la proposition 2, la suite $\left(E'_n / E'^{\ell^n}_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, construite à partir des groupes de ℓ-unités des corps K_n, est paramétrée par les caractères $\rho = \chi_\infty$, $\lambda = \omega + \left(\chi_\ell - 1\right)$, $\mu = 0$.

Cela étant, le lien entre les deux définitions des paramètres est assuré par le théorème fondamental suivant :

<u>THEOREME 2</u> : Pour chaque naturel n, désignons par ω_n le polynôme $\left(\gamma^{\ell^n} - 1\right)$, et notons ∇_n l'idéal de l'algèbre d'Iwasawa Λ, engendré par ℓ^n et ω_n (i. e. $\nabla_n = \ell^n \Lambda + \omega_n \Lambda$). Alors, si M est un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien de paramètres ρ, λ, et μ, la suite des quotients $\left(M / \nabla_n M\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est paramétrée par les mêmes caractères ρ, λ, et μ.

<u>Démonstration</u> : Remarquons d'abord que les ∇_n forment une suite strictement décroissante d'idéaux d'indice fini de l'algèbre Λ, et que l'identité $\left(\gamma^{\ell^n} - 1\right) = \left(\gamma^{\ell^{n-1}} - 1\right)^\ell + \ell\left(\gamma^{\ell^{n-1}} - 1\right) R\left(\gamma^{\ell^{n-1}}\right)$ (pour un polynôme convenable R de $\mathbb{Z}[X]$) permet de montrer par récurrence que ∇_n est contenu dans la puissance n-ième $\mathfrak{M}^n$ de l'idéal maximal $\mathfrak{M} = \ell\Lambda + \omega_o \Lambda$ de l'algèbre d'Iwasawa. La première constatation nous prouve que, pour tout Λ-module noethérien M, les sous-modules $\nabla_n M$ sont bien d'indice fini ; la seconde nous assure que, si M est fini, le sous-module $\nabla_n M$ est réduit à 0, dès que n est assez grand.

Supposons maintenant que M soit $\Lambda[\Delta]$-pseudo-isomorphe à un module noethérien M'. De la suite exacte de $\Lambda[\Delta]$-modules (à noyau et conoyau finis)

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow M \xrightarrow{h} M' \longrightarrow C \longrightarrow 1,$$

nous déduisons alors, pour chaque naturel n, une suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules finis :

$$1 \longrightarrow N_n \longrightarrow M / \nabla_n M \longrightarrow M' / \nabla_n M' \longrightarrow C_n \longrightarrow 1,$$

Dans celle-ci, le conoyau $C_n = C / \nabla_n C$ coincide avec C dès que n est assez grand, et le noyau $N_n = {}^{-1}h[h(M) \cap \nabla_n M'] / \nabla_n M$ a un ordre borné : En effet, pour n assez grand, nous avons $\nabla_n M' \subset h(M)$, car $\nabla_n C$ est alors nul, donc $|N_n| = \left({}^{-1}h\left(\nabla_n M'\right) : \nabla_n M\right) \leq |N| \left(\nabla_n M' : \nabla_n h(M)\right) \leq |N|\;|C|^2$, puisque $\nabla_n M' / \nabla_n h(M)$ s'interprète comme quotient de la somme directe $\left(\ell^n M' / \ell^n h(M)\right) \oplus \left(\omega_n M' / \omega_n h(M)\right)$, donc finalement de $C \oplus C$.

Cela étant, le théorème 1 nous permet de resteindre notre démonstration au cas où M est un $\Lambda[\Delta]$-module isotypique élémentaire. Distinguons les trois éventualités :

(i) Pour $M = \Lambda_\varphi$, nous avons directement $M/\nabla_n M \simeq \left(Z_\varphi / \ell^n Z_\varphi\right)[\Gamma_n]$, avec $\Gamma_n \simeq \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, ce qui nous donne :

$$\left(M : \nabla_n M\right) = \ell^{d_\varphi n \ell^n}.$$

(ii) Pour $M = \Lambda_\varphi / \ell^m \Lambda_\varphi$, et $n \geq m$, nous obtenons $M/\nabla_n M \simeq \left(Z_\varphi/\ell^m Z_\varphi\right)[\Gamma_n]$, d'où :

$$\left(M : \nabla_n M\right) = \ell^{d_\varphi m \ell^n}.$$

(iii) Pour $M = \Lambda_\varphi / \mathfrak{f}\,\Lambda_\varphi$, avec $\mathfrak{f}$ distingué dans $Z_\varphi[\gamma - 1]$, un lemme facile (dont on peut trouver une démonstration dans [11], p. 18) montre que pour chaque m assez grand il existe des polynômes α_m et β_m de l'anneau $Z_\varphi[\gamma-1]$ tels que le polynôme cyclotomique $\xi_m = \dfrac{\omega_{m+1}}{\omega_m} = \gamma^{\ell^m(\ell-1)} + \ldots + \gamma^{\ell^m} + 1$ s'écrive encore $\xi_m = \ell(1 + \ell\alpha_m) + \beta_m \mathfrak{f}$. Comme $\mathfrak{f}$ annule M, et que $(1 + \ell\alpha_m)$ est inversible dans Λ_φ, il suit $\nabla_{m+1} M = \ell \nabla_m M$, d'où $\left(\nabla_m M : \nabla_{m+1} M\right) = \left(\nabla_m M : \ell \nabla_m M\right) = \ell^{d_\varphi . \deg \mathfrak{f}}$, car $\nabla_m M$, d'indice fini dans M, est un Z_φ-module libre de dimension $\deg \mathfrak{f}$. Ecrivant alors $(M : \nabla_n M) = \left(M : \nabla_{n_o} M\right) \prod_{m=n_o}^{n-1} \left(\nabla_m M : \nabla_{m+1} M\right)$, nous obtenons, comme attendu :

$$(M : \nabla_n M) = \left(M : \nabla_{n_o} M\right) \ell^{(n-n_o) d_\varphi \deg \mathfrak{f}} = c^{te} . \ell^{d_\varphi \deg \mathfrak{f} . n}.$$

2 - ETUDE DU GROUPE DE GALOIS DE LA ℓ-EXTENSION ABELIENNE NON RAMIFIEE ℓ-DECOMPOSEE MAXIMALE DE K_∞

§ a - Définition du groupe $\mathcal{C}\ell'$:

Désignons par C'_∞ le ℓ-corps des ℓ-classes de Hilbert de K_∞, i.e. la ℓ-extension abélienne maximale de K_∞ qui est non ramifiée et où les places au-dessus de ℓ se décomposent complètement. La notion d'extension non ramifiée, complètement décomposée en un nombre fini donné de places étant de caractère fini (cf. [12], § 2), C'_∞ est la réunion des ℓ-corps des ℓ-classes de Hilbert respectifs C'_n des corps K_n, et le groupe de Galois $\mathcal{C}' = \mathrm{Gal}\left(C'_\infty/K_\infty\right)$ s'identifie ainsi, via l'isomorphisme du corps de classes, à la limite du système projectif (pour les applications normes)

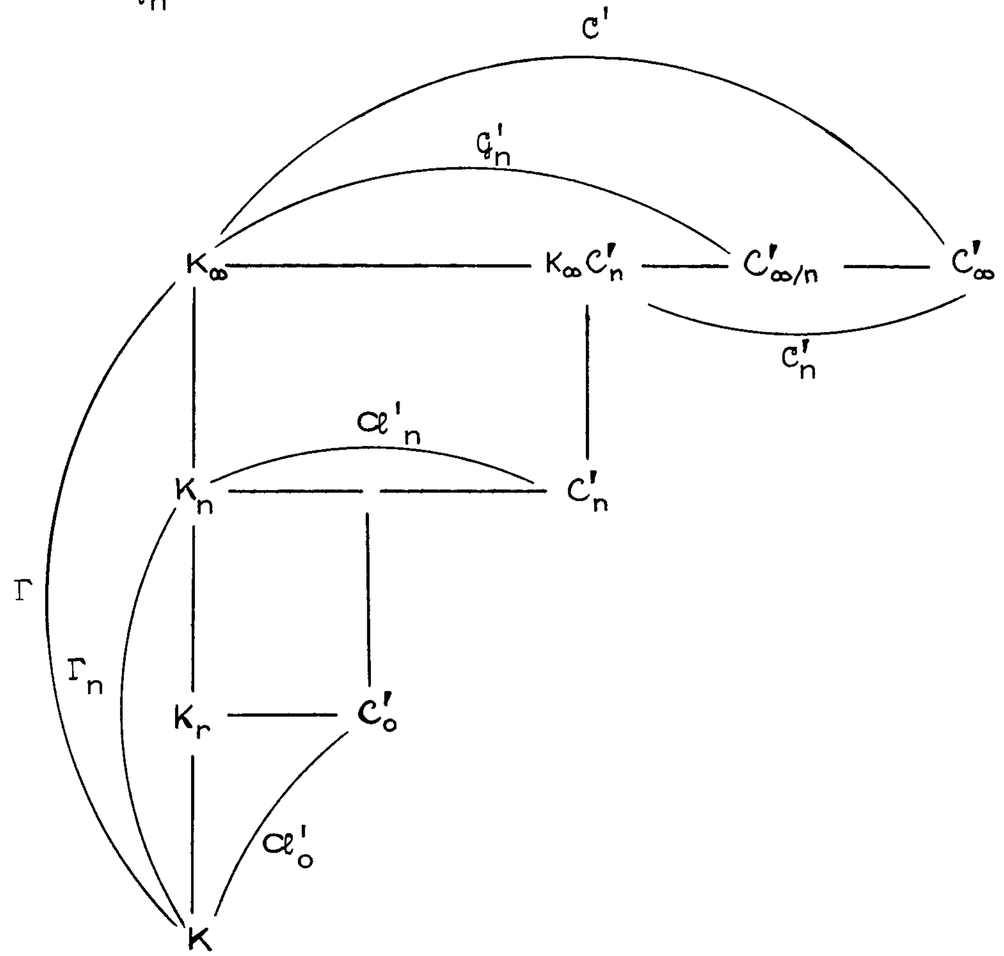
$$\mathcal{C}' = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_n$$

des ℓ-groupes de ℓ-classes des corps K_n (i. e. des quotients $\mathcal{C}\ell'_n$ des ℓ-groupes de classes d'idéaux au sens ordinaire des corps K_n, par leurs sous-groupes respectifs engendrés par les places au-dessus de ℓ).

<u>DEFINITION 3</u> : Par $\mathcal{C}'$ nous entendons le groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(C'_\infty/K_\infty\right)$ de la ℓ-extension abélienne non ramifiée ℓ-décomposée maximale de K_∞, qui s'identifie à la limite projective $\varprojlim \mathcal{C}\ell'_n$ des ℓ-groupes de ℓ-classes des corps K_n. Le groupe $\mathcal{C}'$ est un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien et de torsion, dont nous écrivons $\rho_{\mathcal{C}} = 0$, $\lambda_{\mathcal{C}}$, et $\mu_{\mathcal{C}}$ les paramètres dans $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$.

Naturellement, le premier problème de la théorie d'Iwasawa consiste à retrouver les groupes $\mathcal{C}\ell'_n$ à partir de leur limite projective $\mathcal{C}'$. Rappelons ce résultat classique (cf. [11], [12]) : Désignons par K_r l'intersection de K_∞ avec le ℓ-corps des ℓ-classes de Hilbert C'_0 de K (de sorte que K_r est la sous-extension maximale de K_∞, qui est ℓ-décomposée sur K), puis, pour chaque naturel $n \geq r$, introduisons le ℓ-corps des ℓ-genres $C'_{\infty/n}$ de l'extension procyclique K_∞/K_n (i. e. la ℓ-extension abélienne maximale de K_n, qui est non ramifiée et ℓ-décomposée sur K_∞). Le quotient des ℓ-genres $\mathcal{G}'_n = \mathrm{Gal}\left(C'_{\infty/n}/K_\infty\right) = \mathcal{C}'/\mathcal{C}'^{\omega_n}$, plus grand quotient de $\mathcal{C}'$ fixé par Γ_n, est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module noethérien, qui admet $\mathcal{C}\ell'_n$ comme quotient :

Sous la condition $n \geq r$ en effet, l'extension ℓ-décomposée C'_n/K_n est disjointe de la tour cyclotomique K_∞/K_n, et le groupe $\mathcal{C}\ell'_n$ s'identifie fie par conséquent au groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(K_\infty C'_n/K_\infty\right)$ qui est bien un quotient de $\mathcal{G}'_n$.



Reste à évaluer le groupe $\mathrm{Gal}\left(C'_\infty/K_\infty C'_n\right)$ ou son quotient $\mathrm{Gal}\left(C'_{\infty/n}/K_\infty C'_n\right)$. Un argument de projectivité (cf. [6], th. 8 ; [11], prop. 4.3 ; ou [12], th. 4) montre que, dès que K_n contient le composé K_m des sous-corps de décomposition des places de K au-dessus de ℓ dans la tour K_∞/K, le sous-groupe $\mathcal{C}'_n = \mathrm{Gal}\left(C'_\infty/K_\infty C'_n\right)$, qui fixe $K_\infty C'_n$, est l'image par l'opérateur norme $\frac{\omega_n}{\omega_m}$ de celui $\mathcal{C}'_m$ qui fixe $K_\infty C'_m$. Il vient ainsi (pour $n \geq m$) :

$$\mathcal{C}\ell'_n \simeq \mathcal{C}'/\mathcal{C}'^{\,\omega_n/\omega_m}_m = \mathcal{C}\ell'/\left(\mathcal{C}\ell'^{\,\omega_m}\mathcal{C}'_m\right)^{\omega_n/\omega_m},$$

puisque $\mathcal{C}'_m$ contient le ℓ-groupe des ℓ-genres $\mathcal{C}\ell'^{\,\omega_m}$ de K_∞/K_m (le quotient $\mathcal{C}'_m/\mathcal{C}\ell'^{\omega_m} = \mathrm{Gal}\left(\mathcal{C}'_{\infty/m}/K_\infty\mathcal{C}'_m\right)$ étant d'ailleurs un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module de type fini).

En particulier, il suit : $\left(\mathcal{C}\ell'_n : \mathcal{C}\ell'^{\ell^n}_n\right) = \left(\mathcal{C}' : \mathcal{C}'^{\nabla_n}\mathcal{C}'^{\omega_n/\omega_m}_m\right) = \dfrac{\left(\mathcal{C}' : \mathcal{C}'^{\nabla_n}\right)}{\left(\mathcal{C}'^{\omega_n/\omega_m}_m\mathcal{C}'^{\nabla_n} : \mathcal{C}'^{\nabla_n}\right)}$; et le dénominateur $\left(\mathcal{C}'^{\omega_n/\omega_m}_m\mathcal{C}'^{\nabla_n} : \mathcal{C}'^{\nabla_n}\right)$ est constant à partir d'un certain rang, puisque les quotients $\left(\mathcal{C}'^{\omega_n/\omega_m}_m\mathcal{C}'^{\nabla_n}/\mathcal{C}'^{\nabla_n}\right)_{n\geq m}$, images successives les uns des autres par les applications normes $\xi_n = \dfrac{\omega_{n+1}}{\omega_n}$, forment une suite décroissante de groupes finis. D'après le théorème **2**, nous avons donc :

<u>THEOREME 3</u> : La suite $\left(\mathcal{C}\ell'_n/\mathcal{C}\ell'^{\ell^n}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des quotients d'exposant ℓ^n des groupes de ℓ-classes d'idéaux respectifs des corps K_n est paramétrée par les caractères λ_c et μ_c attachés au groupe $\mathcal{C}' = \varprojlim \mathcal{C}\ell'_n$. Autrement dit, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{c'_\varphi(n)}$ de la φ-composante $\left(\mathcal{C}\ell'_n/\mathcal{C}\ell'^{\ell^n}_n\right)^{e_\varphi}$ est donné asymptotiquement par la formule :

$$c'_\varphi(n) \sim \langle\mu_c,\varphi\rangle\,\ell^n + \langle\lambda_c,\varphi\rangle\, n.$$

<u>SCOLIE</u> : Dans une $\mathbb{Z}_\ell$-extension, les ℓ-groupes $\mathcal{C}\ell'^{\ell^n}_n$ ont un ordre borné indépendamment de n.

D'après le théorème 3, en effet, l'ordre $\ell^{c(n)}$ du quotient $\mathcal{C}\ell'_n/\mathcal{C}\ell'^{\ell^n}_n$ est donné asymptotiquement par la même formule que celui du groupe entier $\mathcal{C}\ell'_n$ (cf. [12], th. 8).

§ b - <u>Description kummérienne des ℓ-extensions non ramifiées ℓ-décomposées $\mathcal{C}'_n/K_n$</u> :

Le corps K_n contenant les racines ℓ^n-ièmes de l'unité, la théorie de Kummer établit une bijection entre les ℓ-extensions abéliennes d'exposant ℓ^n de K_n et les sous-groupes finis du quotient $\mathfrak{K}_n = \left(\ell^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)\otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times$, isomorphe à $K_n^\times/K_n^{\times \ell^n}$. Pour décrire celles de ces extensions qui sont ℓ-décomposées, il est commode de faire appel à la notion d'infinitésimal introduite dans [8] , et que l'on peut définir comme suit : Désignons par $\mathcal{K}_n$ le tensorisé ℓ-adique $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times$ du groupe multiplicatif $K_n^\times$ (de sorte que nous avons un isomorphisme canonique $\mathfrak{K}_n \simeq \left(\ell^{-n}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{K}_n$), par $\mathcal{U}_n = \bigoplus_{\mathfrak{L}_n \mid \ell} (1+\mathfrak{L}_n)$ le groupe des unités principales semi-locales de K_n, qui est le produit direct des groupes d'unités principales des complétés $K_{n,\mathfrak{L}_n}$ de K_n au-dessus de ℓ, par $\hat{\mathcal{K}}_n = \varprojlim_m \bigoplus_{\mathfrak{L}_n \mid \ell} \left(K^\times_{n,\mathfrak{L}_n} / K^{\times \ell^m}_{n,\mathfrak{L}_n}\right)$ enfin, le complété profini de K_n au-dessus de ℓ (si, pour chaque place $\mathfrak{L}_n$ de K_n au-dessus de ℓ, on fait choix d'une uniformisante $\pi_{\mathfrak{L}_n}$ dans $\mathfrak{L}_n$, le groupe $\hat{\mathcal{K}}_n$ s'écrit, comme $\mathbb{Z}_\ell$-module : $\hat{\mathcal{K}}_n = \mathcal{U}_n \oplus \left(\bigoplus_{\mathfrak{L}_n \mid \ell} \pi_{\mathfrak{L}_n}^{\mathbb{Z}_\ell}\right)$). Alors (cf. [8] , § 1) :

<u>DEFINITION 4</u> : Par groupe des <u>éléments infinitésimaux</u> du corps K_n, nous entendons le noyau $\mathcal{K}_n^\infty$ de la surjection continue s_n du tensorisé ℓ-adique $\mathcal{K}_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times$ dans le complété profini $\hat{\mathcal{K}}_n$, induite par l'injection diagonale du groupe $K_n^\times$ dans le produit des groupes multiplicatifs $K^\times_{n,\mathfrak{L}_n}$ des complétés de K_n pour les places au-dessus de ℓ.

<u>PROPOSITION 3</u> : Le radical kummerien de l'extension abélienne maximale d'exposant ℓ^n de K_n qui est ℓ-décomposée est l'image dans $\mathfrak{K}_n = \left(\ell^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)\otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times \simeq \left(\ell^{-n}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{K}_n$ du sous-groupe infinitésimal $\mathcal{K}_n^\infty$ de $\mathcal{K}_n$.

<u>Démonstration</u> : L'extension $K_n[\sqrt[\ell^n]{x}]/K_n$, définie par l'élément $\ell^{-n}\otimes x$ de $\mathfrak{K}_n$, est ℓ-décomposée si et seulement si x est puissance ℓ^n-ième locale en chaque place $\mathfrak{L}_n$ de K_n au-dessus de ℓ, c'est-à-dire si et seulement si l'image $s_n(x)$ de x dans $\hat{\mathcal{K}}_n$ tombe dans $\hat{\mathcal{K}}_n^{\ell^n}$. Ecrivons donc $s_n(x) = u^{\ell^n}$ dans $\hat{\mathcal{K}}_n$, et relevons u en un élément y de $\mathcal{K}_n$. L'élément $z = xy^{-\ell^n}$, qui vérifie $s_n(z) = u^{\ell^n} s_n(y)^{-\ell^n} = 1$, est infinitésimal et a même image que x dans $\mathfrak{K}_n$.

Considérons maintenant un élément $\ell^{-n}\otimes x$ de $\mathfrak{K}_n$. La proposition 3, ci-dessus, affirme que l'extension $K_n[\sqrt[\ell^n]{x}]/K_n$ est ℓ-décomposée si et seulement si x peut être pris infinitésimal. Il est bien connu, par ailleurs, qu'elle est ℓ-ramifiée (i. e. non ramifiée aux places en dehors de ℓ) si et seulement si l'idéal (x) de K_n est une puissance ℓ^n-ième en dehors de ℓ, mais ceci suppose que x soit pris dans $K_n^{\times}$. Pour parler de l'idéal principal engendré par un élément de $\mathcal{K}_n$, il est nécessaire d'étendre la définition du groupe des idéaux :

PROPOSITION 4 : Désignons par $\mathcal{J}'_n$ le tensorisé ℓ-adique $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} J'_n$ du groupe des idéaux fractionnaires de l'anneau $\mathcal{O}'_n = \mathcal{O}_n[1/\ell]$, localisé en dehors de ℓ de l'anneau des entiers de K_n (le groupe J'_n s'identifie au sous-groupe des idéaux fractionnaires de $\mathcal{O}_n$ qui sont étrangers à ℓ), et convenons de noter $\mathcal{P}'_n$ le sous-module ℓ-principal de $\mathcal{J}'_n$, engendré par les images $(x)'$ des éléments de $\mathcal{K}_n$. Cela étant :

(i) Le groupe $\mathfrak{R}_n = \{\ell^{-n} \otimes x \in \mathcal{R}_n \mid (x)' \in \mathcal{J}'^{\ell^n}_n\}$ est le radical kummerien de la ℓ-extension $M_n^{(\ell^n)}$ abélienne maximale de K_n qui est d'exposant ℓ^n et ℓ-ramifiée.

(ii) Le groupe $\mathfrak{D}_n = \{\ell^{-n} \otimes x \in \mathcal{R}_n \mid x \in \mathcal{K}_n^{\infty}$ et $(x)' \in \mathcal{J}'^{\ell^n}_n\}$ est le radical kummerien de la ℓ-extension $C_n'^{(\ell^n)}$ abélienne maximale de K_n qui est d'exposant ℓ^n, non ramifiée, et ℓ-décomposée.

Cela étant, le comportement asymptotique du groupe $\mathfrak{D}_n$ est déterminé par le théorème 3, puisque l'application bilinéaire $(\ell^{-n} \otimes x, \sigma) \mapsto x^{\sigma-1}$ de $\mathfrak{D}_n \times \mathrm{Gal}\left(C_n'^{(\ell^n)}/K_n\right)$ dans μ_n, donnée par la théorie de Kummer, induit un isomorphisme, compatible avec l'action de Δ, de $\mathfrak{D}_n$ sur le groupe $\mathrm{Hom}\left(\mathrm{Gal}\left(C_n'^{(\ell^n)}/K_n\right), \mu_n\right)$. Compte tenu de l'isomorphisme du corps de classes $\mathrm{Gal}\left(C_n'^{(\ell^n)}/K_n\right) \simeq \mathcal{C}\ell'_n/\mathcal{C}\ell'^{\ell^n}_n$, nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION 5 : La suite $(\mathfrak{D}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des radicaux respectifs des ℓ-extensions $C_n'^{(\ell^n)}/K_n$ (sous-extensions d'exposant ℓ^n des ℓ-corps des ℓ-classes de Hilbert des corps K_n) est paramétrée par les reflets dans l'involution du miroir des caractères λ_C et μ_C attachés au groupe C'. Autrement dit, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{c^*_\varphi(n)}$ de la φ-composante $\mathfrak{D}_n^{e_\varphi}$ est donné asymptotiquement par la formule :

$$c^*_\varphi(n) \sim \langle \mu^*_C, \varphi \rangle \ell^n + \langle \lambda^*_C, \varphi \rangle n.$$

§ c - Interprétation des facteurs cyclotomiques :

Revenons sur la description $\mathcal{C}\ell'_n = \mathcal{C}'/\mathcal{C}'^{\omega_n/\omega_m}_m$ des groupes de ℓ-classes $\mathcal{C}\ell'_n$, donnée dans la section (a). Puisque $\mathcal{C}'_m$ est un sous-module de $\mathcal{C}'$, les groupes $\mathcal{C}'/\mathcal{C}'^{\omega_n/\omega_m}$ sont des quotients de $\mathcal{C}\ell'_n$, pour chaque $n \geq m$, donc finis, ce qui signifie que les polynômes caractéristiques Pc_φ des φ-composantes du $\Lambda[\Delta]$-module $\mathcal{C}'$ sont étrangers à chacun des $\frac{\omega_n}{\omega_m}$, c'est-à-dire à chacun des polynômes cyclotomiques $\xi_i = \sum_{j=0}^{\ell-1} \gamma^{j\ell^i}$, pour $i \geq m$ un résultat bien connu de la théorie d'Iwasawa). Qu'en est-il pour $i < m$? La définition $\mathcal{G}'_n = \mathcal{C}'/\mathcal{C}'^{\omega_n}$ du quotient des ℓ-genres montre que la participation des ξ_i dans les polynômes caractéristiques Pc_φ mesure la dimension des φ-composantes de ces quotients :

PROPOSITION 6 : Pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, écrivons $Pc_\varphi = \omega_0^{r_\varphi(o)} \prod_{i=0}^{m-1} \xi_i^{r_\varphi(i+1)} . Pc'_\varphi$ la factorisation dans l'anneau $Z_\varphi[\gamma-1]$ du polynôme caractéristique du $\Lambda[\Delta]$-module isotypique $\mathcal{C}'^{e_\varphi}$. Alors :

(i) Le polynôme Pc_φ est étranger à tous les ω_i, pour $i > m$ (et l'entier m est l'indice du composé K_m des sous-corps de décomposition des places de k au-dessus de ℓ dans la tour K_∞/K).

(ii) La dimension $\partial_\varphi(n) = \dim_{Z_\varphi} \mathcal{G}'^{e_\varphi}_n$ de la φ-composante du quotient des ℓ-genres est donnée, pour chaque naturel n, par la formule :

$$\partial_\varphi(n) = r_\varphi(o) + (\ell-1) \sum_{i=1}^{\inf(m,n)} r_\varphi(i)\, \ell^{i-1} .$$

Cela étant, comme un résultat de Greenberg (cf. [3]) affirme la finitude des groupes $\mathcal{G}'_n$ lorsque le corps k est abélien sur $\mathbb{Q}$, le problème se pose de décider pour quels corps k, les polynômes caractéristiques Pc_φ sont étrangers à tous les ω_n. Cette condition, qui équivaut à la finitude des groupes $\mathrm{Gal}\left(\mathbf{C}'_{\infty/n}/K_\infty \mathbf{C}'_n\right)$, s'interprète par la théorie des genres : Désignons par $\mathcal{E}'_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_n$ le tensorisé du groupe des ℓ-unités de k_n, et par $\mathcal{N}_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigcap_{p\geq m} N_{k_p/k_n}(K_p^\times)\right)$ celui du groupe des normes cyclotomiques ; pour chaque place $\mathfrak{L}_n$ de K_n au-dessus de ℓ, introduisons son groupe de décomposition $D_{\mathfrak{L}_n}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n)$ dans l'extension abélienne $\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n$; puis formons le sous-groupe $\widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{L}_n|\ell} D_{\mathfrak{L}_n}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n)$ de la somme directe des $D_{\mathfrak{L}_n}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n)$ constitué par les familles $(\sigma_{\mathfrak{L}_n})_{\mathfrak{L}_n}$ dont la restriction à K_∞ vérifie la formule du produit $\prod_{\mathfrak{L}_n|\ell} \sigma_{\mathfrak{L}_n}\big|_{K_\infty} = 1$.

D'après [7], th. 4, la famille $\mathfrak{h}'_n$ des symboles de Hasse $\left(\frac{\ ,\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n}{\mathfrak{L}_n}\right)_{\mathfrak{L}_n}$ et la formule du produit p'_n (prise dans $\mathrm{Gal}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n)$), donnent naissance à la suite exacte courte (dite des ℓ-genres) :

$$1 \longrightarrow \mathcal{E}'_n/\mathcal{E}'_n \cap \mathcal{N}_n \xrightarrow{\mathfrak{h}'_n} \widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{L}_n|\ell} D_{\mathfrak{L}_n}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n) \xrightarrow{p'_n} \mathrm{Gal}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_\infty\mathcal{C}'_n) \longrightarrow 1.$$

Il suit :

<u>PROPOSITION 7</u> : Pour chaque caractère irréductible φ du groupe Δ, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le polynôme caractéristique Pc_φ de la φ-composante du $\Lambda[\Delta]$-module $\mathcal{C}'$ est étranger à tous les ω_i.

(ii) La dimension asymptotique $\partial_\varphi = \dim_{Z_\varphi} \mathcal{G}_n'^{e_\varphi}$ de la φ-composante du quotient des ℓ-genres est nulle.

(iii) Pour chaque naturel n, la φ-composante $\mathcal{G}_n'^{e_\varphi} = (\mathcal{C}\ell'/\mathcal{C}\ell'^{\omega_n})^{e_\varphi}$ du quotient des ℓ-genres est un ℓ-groupe fini dont l'ordre $\ell^{g_\varphi(n)}$ est donné asymptotiquement par la même formule que celui du groupe $\mathcal{C}\ell_n'^{e_\varphi}$.

(iv) Pour chaque naturel n, l'image $\mathfrak{h}'_n(\mathcal{E}'_n)$ du tensorisé ℓ-adique $\mathcal{E}'_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_n$ du groupe des ℓ-unités du corps k_n, par la famille $\mathfrak{h}'_n = \left(\frac{\ ,\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n}{\mathfrak{L}_n}\right)_{\mathfrak{L}_n}$ des symboles de Hasse attachés aux places de K_n au-dessus de ℓ, est d'indice fini dans la somme $\widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{L}_n|\ell} D_{\mathfrak{L}_n}(\mathcal{C}'_{\infty/n}/K_n)$ des groupes de décomposition de ces places, restreinte aux familles $(\sigma_{\mathfrak{L}_n})_{\mathfrak{L}_n|\ell}$ dont la restriction à K_∞ vérifie la formule du produit

$$\prod_{\mathfrak{L}_n|\ell} \sigma_{\mathfrak{L}_n}\big|_{K_\infty} = 1.$$

<u>DEFINITION 5</u> : Nous disons que le caractère $\partial = \sum_{\varphi} \partial_\varphi \varphi$, défini à partir de la dimension asymptotique $\partial_\varphi = \dim_{\mathbb{Z}_\varphi} \mathcal{G}_n'^{\,e_\varphi}$ du quotient des ℓ-genres, est le <u>caractère de défaut de la théorie des genres</u> dans la tour cyclotomique K/k.

D'après la proposition 7, le caractère de défaut ∂ mesure l'écart entre le groupe des ℓ-classes $C\ell_n'$ et le quotient des ℓ-genres $\mathcal{G}_n'$. Lorsque K est une $\mathbb{Z}_\ell$-extension qui n'est pas cyclotomique, les résultats de [7] montrent qu'il est généralement non nul. En revanche :

<u>THEOREME 4</u> : Supposons que le corps K satisfasse les deux conditions suivantes :

(i) K est une extension galoisienne du corps des rationnels (de degré g, de groupe de Galois G).

(ii) Les groupes de décomposition des places de K au-dessus de ℓ sont distingués, et contiennent le sous-groupe dérivé G'.
Alors les conditions équivalentes de la proposition 7 sont vérifiées dans la tour cyclotomique K_∞/K.

<u>Démonstration</u> : Les hypothèses du théorème se propageant le long de la tour, il nous suffit de faire la démonstration pour $n=0$, i.e. de montrer que l'image $\mathfrak{h}(\mathcal{E}')$ du tensorisé du groupe des ℓ-unités de K est d'indice fini dans la somme restreinte $\widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{L}|\ell} D_{\mathfrak{L}}$ des groupes de décomposition des places de K au-dessus de ℓ dans l'extension abélienne $C'_{\infty/o}/K$.

Notons D le sous-groupe de décomposition de ℓ dans l'extension $/\mathbb{Q}$ (qui est indépendant par hypothèse de la place de K au-dessus de ℓ), d son ordre, 1_D^G l'induit à G du caractère unité de D, puis $e = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in D} \tau$ l'idempotent central de l'algèbre $\mathbb{Q}_\ell[G]$ qui lui correspond, et $\tilde{e} = e(1 - \frac{1}{g} \sum_{\tau \in G} \tau)$ celui correspondant au caractère $1_D^G - 1_G$. Par un argument déjà utilisé (cf. prop. 1 et 2), le groupe $\bigoplus_{\mathfrak{L}|\ell} D_{\mathfrak{L}}$ est un $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module de caractère 1_D^G, et le sous-groupe restreint $\widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{L}|\ell} D_{\mathfrak{L}}$ est donc un $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module de caractère $1_D^G - 1_G$. Le groupe $\bigoplus_{\mathfrak{L}|\ell} D_{\mathfrak{L}}$ est, d'autre part, l'image par les symboles locaux de reste normique du complété profini $\mathcal{K}$ de K (défini dans la section(b)).

Comme les éléments de $\mathcal{K}$ annulés par le logarithme ℓ-adique Log_ℓ sont des normes cyclotomiques, cette dernière application se factorise par le logarithme Log_ℓ, de sorte que le sous-groupe $\mathrm{Log}_\ell\, \mathcal{K}^{g\tilde{e}}$ de la somme directe $C(k) = \bigoplus_{\mathfrak{L}|\ell} k_{\mathfrak{L}}$ des complétés de K au-dessus de ℓ s'envoie dans $\bigoplus_{\mathfrak{L}|\ell} D_{\mathfrak{L}}$ avec un indice fini.

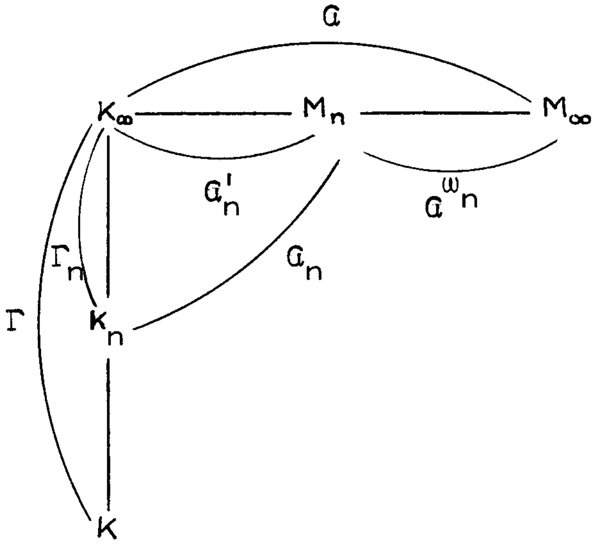
Choisissons maintenant un générateur $x \in E'$ d'une puissance principale $(x) = \mathfrak{L}^q$ de l'une quelconque des places $\mathfrak{L}$ de K au-dessus de ℓ. Posons $y = x^{g\tilde{e}}$, et considérons le sous-module $\mathfrak{Y}$ de $\mathcal{E}'$ engendré par y et ses conjugués. Il est clair que c'est un $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module de caractère $1_D^G - 1_G$. Cela étant, pour chaque caractère ℓ-adique absolument irréductible ψ représenté dans $1_D^G - 1_G$ (à valeurs dans une extension algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$), le nombre $\varepsilon_\psi = \sum_{\tau \in G} \psi(\tau^{-1}) \mathrm{Log}_\ell \circ s(y^\tau)$ ne peut être nul, en vertu du théorème de Baker-Brumer. Comme $1_D^G - 1_G$ est la somme des caractères absolument irréductibles qui le divisent (puisque le quotient G/D est supposé abélien), l'application logarithme Log_ℓ détermine une injection de $\mathfrak{Y}$ dans $\mathrm{Log}_\ell\, \mathcal{K}^{g\tilde{e}}$. De l'identité des caractères, nous concluons que cette injection est presque surjective, autrement dit, que $\mathfrak{Y}$ s'envoie dans $\widetilde{\bigoplus}_{\mathfrak{L}|\ell} D_{\mathfrak{L}}$ avec un indice fini ; ce qui constitue le résultat attendu.

3 - <u>ETUDE DU GROUPE DE GALOIS DE LA ℓ-EXTENSION ABELIENNE MAXIMALE ℓ-RAMIFIEE DE K_∞</u>

§ a - <u>Définition du groupe $\mathcal{G}$</u> :

Désignons par M_∞ la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de K_∞, et notons $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty)$ son groupe de Galois. L'extension M_∞ est évidemment la réunion des ℓ-extensions abéliennes ℓ-ramifiées maximales M_n des sous-corps de degré fini K_n de K_∞, et nous disons que M_n est le ℓ-corps des ℓ-classes infinitésimales de K_n, en accord avec les résultats de [12], qui interprètent le groupe de Galois $\mathcal{G}_n = \mathrm{Gal}(M_n/K_n)$ comme quotient du tensorisé $\mathcal{J}'_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} J'_n$ du groupe J'_n des idéaux de K_n par le sous-module $\mathcal{P}_n^\infty$ des idéaux principaux-infinitésimaux, image dans le sous-module $\mathcal{P}_n$ des idéaux principaux de $\mathcal{J}'_n$, du sous-groupe infinitésimal $\mathcal{K}_n^\infty$ de $\mathcal{K}_n$, défini dans la section **2 § b**. Autrement dit :

<u>DEFINITION 6</u> : Par $\mathcal{G}$ nous entendons le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty)$ de la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de K_∞, qui s'identifie à la limite projective $\varprojlim \mathcal{G}_n$ des ℓ-groupes de ℓ-classes infinitésimales $\mathcal{J}'_n/\mathcal{P}^\infty_n$ des corps K_n. Le groupe $\mathcal{G}$ est un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien, dont nous notons ρ_a, λ_a, et μ_a les paramètres dans $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$.



La tour cyclotomique K_∞/K étant ℓ-ramifiée, pour chaque naturel n, le corps des ℓ-classes infinitésimales M_n est la sous-extension maximale de M_∞ qui est abélienne sur K_n. Le groupe de Galois $\mathcal{G}'_n = \mathrm{Gal}(M_n/K_\infty)$, plus grand quotient de $\mathcal{G}$ fixé par Γ_n, est ainsi le quotient des ℓ-genres infinitésimaux $\mathcal{G}/\mathcal{G}^{\omega_n}$ de l'extension procyclique K_∞/K_n ; et le groupe $\mathcal{G}_n = \mathrm{Gal}(M_n/K_n)$ est donc isomorphe, comme $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module, à la somme directe :

$$\mathcal{G}_n \simeq \Gamma_n \oplus \mathcal{G}'_n = \Gamma_n \oplus \mathcal{G}/\mathcal{G}^{\omega_n},$$

puisque Γ_n se relève dans $\mathcal{G}_n$, par un argument de projectivité.

En particulier, il suit $\mathcal{G}_n/\mathcal{G}_n^{\ell^n} \simeq \Gamma_n/\Gamma_{2n} \oplus \mathcal{G}/\mathcal{G}^{\nabla_n}$; d'où, d'après le théorème **2** et la proposition 4 :

<u>PROPOSITION 8</u> : La suite $\left(\mathcal{G}_n/\mathcal{G}_n^{\ell^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des quotients d'exposant ℓ^n des groupes de ℓ-classes infinitésimales des corps K_n est paramétrée par les caractères ρ_a, λ_a+1 ; et μ_a. Autrement dit, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{a_\varphi(n)}$ de la φ-composante $\left(\mathcal{G}_n/\mathcal{G}_n^{\ell^n}\right)^{e_\varphi}$ est donné asymptotiquement par la formule :

$$a_\varphi(n) \sim \langle \rho_a, \varphi\rangle\, n\ell^n + \langle \mu_a, \varphi\rangle\, \ell^n + \langle \lambda_a+1, \varphi\rangle\, n.$$

PROPOSITION 9 : La suite $(\mathfrak{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des radicaux kummerien des sous-extensions maximales $M_n^{(\ell^n)}/K_n$ d'exposant ℓ^n des ℓ-corps des ℓ-classes infinitésimales M_n est paramétrée par les caractères $\rho_a^*, \lambda_a^*+\omega$, et μ_a^*.
L'ordre $\ell^{a_\varphi^*(n)}$ de la φ-composante $\mathfrak{R}_n^{e_\varphi}$ est ainsi donné asymptotiquement par la formule :

$$a_\varphi^*(n) \sim \langle \rho_a^*, \varphi\rangle\, n\,\ell^n + \langle \mu_a^*, \varphi\rangle\, \ell^n + \langle \lambda_a^*+\omega, \varphi\rangle\, n.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème :

THEOREME 5 : Les paramètres ρ_a, λ_a, et μ_a du groupe de Galois $\mathfrak{A}$ de la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale M_∞ de K_∞ sont donnés, en fonction de ceux λ_c et μ_c du groupe de Galois $\mathfrak{C}'$ de la sous-extension non ramifiée ℓ-décomposée maximale C'_∞, par les formules suivantes :

$$\rho_a = \chi_\infty^* = \omega\chi_\infty\,, \quad \lambda_a = \lambda_c^* + (\chi_\ell - 1)^* = \omega[\lambda_c^{-1} + (\chi_\ell - 1)]\,,$$

$$\mu_a = \mu_c^* = \omega\mu_c^{-1}\,.$$

Démonstration : Revenons sur la définition $\mathfrak{R}_n = \{\ell^{-n}\otimes x \in \mathfrak{R}_n \mid (x)' \in J_n'^{\ell^n}\}$ du radical kummerien $\mathfrak{R}_n$. L'application, qui à l'élément $\ell^{-n}\otimes x$ de $\mathfrak{R}_n$ associe la classe $c\ell'\left(\sqrt[\ell^n]{(x)'}\right)$ dans le groupe $\mathcal{C}\ell_n'$ de l'idéal $\sqrt[\ell^n]{(x)'}$ de J_n', est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-morphisme qui envoie $\mathfrak{R}_n$ sur le sous-groupe $\mathcal{C}\ell_n'^{(\ell^n)}$ d'exposant ℓ^n de $\mathcal{C}\ell_n'$. Quel est son noyau ? L'identité $(x)' = (y)'^{\ell^n}$, qui s'écrit encore $x = \varepsilon y^{\ell^n}$ pour une ℓ-unité ε, exprime que la classe $\ell^{-n}\otimes x$ de x dans $\mathfrak{R}_n$ est contenue dans l'image $(\ell^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} E_n'$ du groupe des ℓ-unités E_n'.
De la suite exacte obtenue :

$$1 \longrightarrow (\ell^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} E_n' \longrightarrow \mathfrak{R}_n \longrightarrow \mathcal{C}\ell_n'^{(\ell^n)} \longrightarrow 1\,,$$

nous déduisons sans peine les formules annoncées, l'ordre du premier groupe étant donné dans l'exemple 3 (section 1 § c), celui du dernier par le théorème 3, et l'ordre de $\mathfrak{R}_n$ par la proposition 9 ci-dessus. Enfin les identités $\chi_\infty^* = \omega\chi_\infty$ et $\chi_\ell^* = \omega\chi_\ell$ proviennent du fait que χ_∞ et χ_ℓ, sommes d'induits de caractères unités attachés à des sous-groupes de Δ, sont égaux à leurs "inverses" χ_∞^{-1} et χ_ℓ^{-1}.

§ b - Etude du sous-groupe de torsion $\mathcal{T}$ et interprétation des facteurs cyclotomiques :

D'après [8] une façon d'énoncer la conjecture de Leopoldt pour le corps K_n consiste à affirmer que le tensorisé $\mathcal{E}'_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_n$ du groupe des ℓ-unités de ce corps s'injecte canoniquement dans le complété profini $\hat{\mathcal{K}}_n$, défini dans la section 2 § b. Cela justifie la définition suivante (cf. [8], section 1 § a) :

DEFINITION 7 : Par groupe des unités infinitésimales du corps K_n, nous entendons le noyau $\mathcal{E}^\infty_n$ de la restriction au groupe $\mathcal{E}'_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_n$ (des ℓ-unités généralisées) de la surjection canonique s du tensorisé ℓ-adique $\mathcal{K}_n = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times_n$ sur le complété profini $\hat{\mathcal{K}}_n$. Le groupe $\mathcal{E}^\infty_n$ est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module projectif, et nous disons que son caractère $\delta(n)$ est le caractère de défaut de la conjecture de Leopoldt pour le corps K_n.

Naturellement, le groupe $\mathcal{E}^\infty_n$ est connu pour être nul dans un certain nombre de cas. Rappelons, sous une forme voisine de celle du théorème 4, le résultat dû à Emsalem, Kisilevsky et Wales (cf. [17]).

THEOREME 6 : Supposons que le corps K satisfasse les conditions suivantes :

(i) K est une extension galoisienne du corps des rationnels, de groupe de Galois G.

(ii) Les groupes de décomposition des places à l'infini de K sont distingués, et contiennent le sous-groupe dérivé G'. Alors la conjecture de Leopoldt est vraie dans la tour cyclotomique K

PROPOSITION 10 : Les caractères de défaut $\delta(n)$ de la conjecture de Leopoldt dans la tour cyclotomique K_∞/K forment une suite croissante et stationnaire, majorée par le paramètre λ^*_c des radicaux $\mathfrak{D}_n$.

Si δ désigne la valeur asymptotique du défaut $\delta(n)$, l'inégalité obtenue $(\delta \leq \lambda^*_c)$ est ainsi le pendant de celle $(\partial \leq \lambda_c)$ vérifiée par le caractère de défaut de la théorie des ℓ-genres.

Démonstration : Ce résultat étant essentiellement bien connu (cf. [2], [4] et [6]), vérifions le rapidement : Le fait que la suite $\left(\delta(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ aille croissant est évident. Cela étant, pour chaque naturel n, l'extension $K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{\mathcal{E}_n^\infty}]$ engendrée sur K_∞ par les racines d'ordre ℓ-primaire des unités infinitésimales de K_n est une extension abélienne non ramifiée ℓ-décomposée sur K_∞. Son groupe de Galois $\mathrm{Gal}\left(K_\infty[\sqrt[\ell^\infty]{\mathcal{E}_n^\infty}]/K_\infty\right)$ est donc un quotient de $\mathcal{C}\ell' = \mathrm{Gal}\left(C'_\infty/K_\infty\right)$, et un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module projectif qui a pour caractère le reflet $\delta(n)^*$ de $\delta(n)$. Il suit $\delta(n)^* \leq \lambda_c$, comme annoncé.

Les résultats de Gillard (cf. [2]) interprètent d'ailleurs le défaut (mesuré ici par le degré deg $\delta(n)$ du caractère $\delta(n)$) de la conjecture de Leopoldt à chaque étage fini de la tour cyclotomique, à partir de la participation des polynômes cyclotomiques à la factorisation irréductible du polynôme caractéristique du sous-module de Λ-torsion du groupe de Galois $\mathcal{G}$. Enonçons sans démonstration l'analogue de la proposition 6 :

<u>PROPOSITION 11</u> : Pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, écrivons $Pa_\varphi = \omega_o^{s_\varphi(o)} \prod_{i=0}^{m'} \xi_i^{s_\varphi(i+1)} Pb_\varphi$ la factorisation dans l'anneau $Z_\varphi[\gamma-1]$ du polynôme caractéristique de la φ-composante $\mathcal{T}^{e_\varphi}$ du sous-module de $\Lambda[\Delta]$-torsion du groupe de Galois $\mathcal{G}$. Alors, pour chaque naturel n, la φ-partie $\delta_\varphi(n)$ du caractère de défaut $\delta(n)$ est donnée par la formule : $\delta_\varphi(n) = s_\varphi(o) + (\ell-1) \sum_{i=1}^{\inf(n,m')} s_\varphi(i)\,\ell^{i-1}$.

D'après les propositions 10 et 11, le groupe $\mathcal{E}_n^\infty$ des unités infinitésimales de K_n est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module noethérien, qui est indépendant de n, lorsque n est assez grand. Désignons par $\sqrt[\ell^n]{\mathcal{E}_n^\infty}$ son ℓ^n-radical dans $\mathcal{K}_n$ (i.e. $\sqrt[\ell^n]{\mathcal{E}_n^\infty} = \{x \in \mathcal{K}_n \mid x^{\ell^n} \in \mathcal{E}_n^\infty\}$). Comme les seuls éléments ℓ-divisibles de $K_\infty^\times$ sont les racines de l'unité, le quotient $\sqrt[\ell^n]{\mathcal{E}_n^\infty}/\mathcal{E}_n^\infty\mu_n$ est donc un groupe fini qui ne dépend pas de n, pour n assez grand. Notons maintenant $\mathcal{e}_n^\infty = \{\ell^{-n} \otimes x \in \mathcal{R}_n \mid x \in \mathcal{E}_n^\infty\}$ l'image canonique de $\mathcal{E}_n^\infty$ dans le groupe $\mathcal{R}_n = \left(\ell^{-n}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{K}_n$. De l'exactitude de la suite courte de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules :

$$1 \longrightarrow \sqrt[\ell^n]{\mathcal{E}_n^\infty}/\mathcal{E}_n^\infty \mu_n^{(\ell^n)} \longrightarrow \left(\ell^{-n}\mathbb{Z}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}_n^\infty \longrightarrow \mathcal{e}_n^\infty \longrightarrow 1,$$

nous déduisons la proposition :

PROPOSITION 12 : La suite $\left(\mathcal{E}_n^\infty\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des sous-modules $\mathcal{E}_n^\infty = \{\ell^{-n}\otimes x \in \mathcal{R}_n \mid x\in \mathcal{E}_n^\infty\}$ de $\mathcal{D}_n$ engendrés par les unités infinitésimales est paramétrée par les caractères $\rho = 0$, $\lambda = \delta$, et $\mu = 0$. Autrement dit, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{e_\varphi^\infty(n)}$ de la φ-composante de $\mathcal{E}_n^\infty$ est donné asymptotiquement par la formule :

$$e_\varphi^\infty(n) \sim \langle \delta, \varphi\rangle n.$$

THEOREME 7 : La suite $\left(\mathcal{T}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des sous-groupes de torsion des groupes de ℓ-classes infinitésimales $\mathcal{C}_n$ des corps K_n, et la suite $\left(\mathcal{T}_n/\mathcal{T}_n^{\ell^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de leurs quotients d'exposant ℓ^n, sont paramétrés par les caractères $\rho_t = 0$, $\lambda_t = \lambda_a - \delta$, et $\mu_t = \mu_a$. En particulier, pour chaque caractère ℓ-adique φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{t_\varphi(n)}$ de la φ-composante $\left(\mathcal{T}_n/\mathcal{T}_n^{\ell^n}\right)^{\ell_\varphi}$ est donné asymptotiquement par la formule :

$$t_\varphi(n) \sim \langle \mu_c^*, \varphi\rangle\, \ell^n + \langle \left(\lambda_c^* - \delta\right) + \left(\chi_\ell - 1\right)^*, \varphi > n.$$

Démonstration : Nous allons donner deux démonstrations de ce résultat, l'une directe, l'autre par dualité.

(i) Ecrivons $\mathcal{C} \sim \mathcal{B} \oplus \mathcal{T}'$ la pseudo-décomposition du $\Lambda[\Delta]$-module $\mathcal{C}$, en désignant par $\mathcal{T}'$ le facteur élémentaire de $\mathcal{C}$ dont les composantes isotypiques ont pour polynômes caractéristiques les polynômes P_{a_φ}', définis à la proposition 11. Pour chaque naturel n, le sous-groupe de torsion $\mathcal{T}_n$ de $\mathcal{C}_n$ est aussi celui du quotient $\mathcal{C}_n' = \mathcal{C}/\mathcal{C}^{\omega_n}$. L'ordre de sa φ-composante $\mathcal{T}_n^{e_\varphi}$ est donc donné, à un facteur borné près, par celui du groupe $\left(\mathcal{T}'/\mathcal{T}'^{\omega_n}\right)^{e_\varphi}$, qui est paramétré par les caractères annoncés. D'après le théorème 2, le même résultat vaut pour les quotients $\left(\mathcal{T}'/\mathcal{T}'^{\nabla_n}\right)^{e_\varphi}$, donc pour ceux $\left(\mathcal{T}_n/\mathcal{T}_n^{\ell^n}\right)^{e_\varphi}$ du groupe $\mathcal{T}_n^{e_\varphi}$; ce qui établit la première assertion du théorème. La seconde résulte de l'expression des paramètres de $\mathcal{C}$, donnée par le théorème 5.

(ii) Désignons par $\mathcal{T}_n^{(\ell^n)}$ le sous-groupe d'exposant ℓ^n du groupe de torsion $\mathcal{T}_n$. Dans la description $\mathcal{C}_n = \mathcal{J}_n'/\mathcal{P}_n^\infty$ du groupe de Galois $\mathcal{C}_n$ comme groupe de ℓ-classes infinitésimales, les éléments de $\mathcal{T}_n^{(\ell^n)}$ sont représentés par les idéaux généralisés $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{J}_n'$ dont la puissance ℓ^n-ième est un idéal principal-infinitésimal $\mathfrak{a}^{\ell^n} = (x)$; et le générateur x de cet idéal est naturellement défini à une unité infinitésimale près. En associant à la classe $c\ell_\infty(\mathfrak{a})$ de l'idéal $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{A}_n$ celle de l'élément $\ell^{-n}\otimes x$ dans le quotient $\mathcal{R}_n/\mathcal{E}_n^\infty$, nous définissons donc un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-morphisme du sous-groupe $\mathcal{T}_n^{(\ell^n)}$ sur le quotient $\mathcal{D}_n/\mathcal{E}_n^\infty$. Quel est son noyau ? L'identité $\ell^{-n}\otimes x \in \mathcal{E}_n^\infty$ s'écrit $x = \varepsilon y^{\ell^n}$ pour un y de $\mathcal{K}_n$ (défini à une racine ℓ^n-ième de l'unité près) et une unité infinitésimale ε de $\mathcal{E}_n^\infty$. Les éléments du noyau sont donc les classes des idéaux principaux $\mathfrak{a} = (y)$ engendrés par les éléments y de $\mathcal{K}_n$ dont la puissance ℓ^n-ième est dans $\mathcal{K}_n^\infty$; c'està-dire par les éléments y de $\mathcal{K}_n$ dont l'image semi-locale $s(y)$ tombe dans le groupe $\hat{\mu}_n^{(\ell^n)} = \bigoplus_{\mathfrak{L}_n|\ell} \mu_{\mathfrak{L}_n}^{(\ell^n)}$ des racines ℓ^n-ièmes de l'unité dans $\hat{\mathcal{K}}_n$. En d'autres termes, le noyau lui-même n'est autre que l'image canonique dans le sous-groupe de torsion $\mathcal{T}_n$, du quotient $\hat{\mu}_n^{(\ell^n)}/s\left(\mu_n^{(\ell^n)}\right)$.

La formule finale du théorème résulte donc de l'exactitude de la suite de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules :

$$1 \longrightarrow \sqrt[\ell^n]{\mathcal{E}_n^\infty}/\mathcal{E}_n^\infty\mu_n^{(\ell^n)} \longrightarrow \hat{\mu}_n^{(\ell^n)}/s\left(\mu_n^{(\ell^n)}\right) \longrightarrow \mathcal{T}_n^{(\ell^n)} \longrightarrow \mathcal{D}_n/\mathcal{E}_n^\infty \longrightarrow 1.$$

Le groupe $\mathcal{D}_n$, en effet, est mesuré par la proposition 5 ; le sous-groupe $\mathcal{E}_n^\infty$ par la proposition 12 ; le quotient $\hat{\mu}_n^{(\ell^n)}/s\left(\mu_n^{(\ell^n)}\right)$ est paramétré par les caractères $\rho = 0, \lambda = \omega\left(\chi_\ell - 1\right)$, et $\mu = 0$; et le terme de gauche $\sqrt[\ell^n]{\mathcal{E}_n^\infty}/\mathcal{E}_n^\infty\mu_n^{(\ell^n)}$ a un ordre borné, indépendamment de n.

Réunissant (i) et (ii), nous obtenons en particulier une nouvelle démonstration du théorème 5.

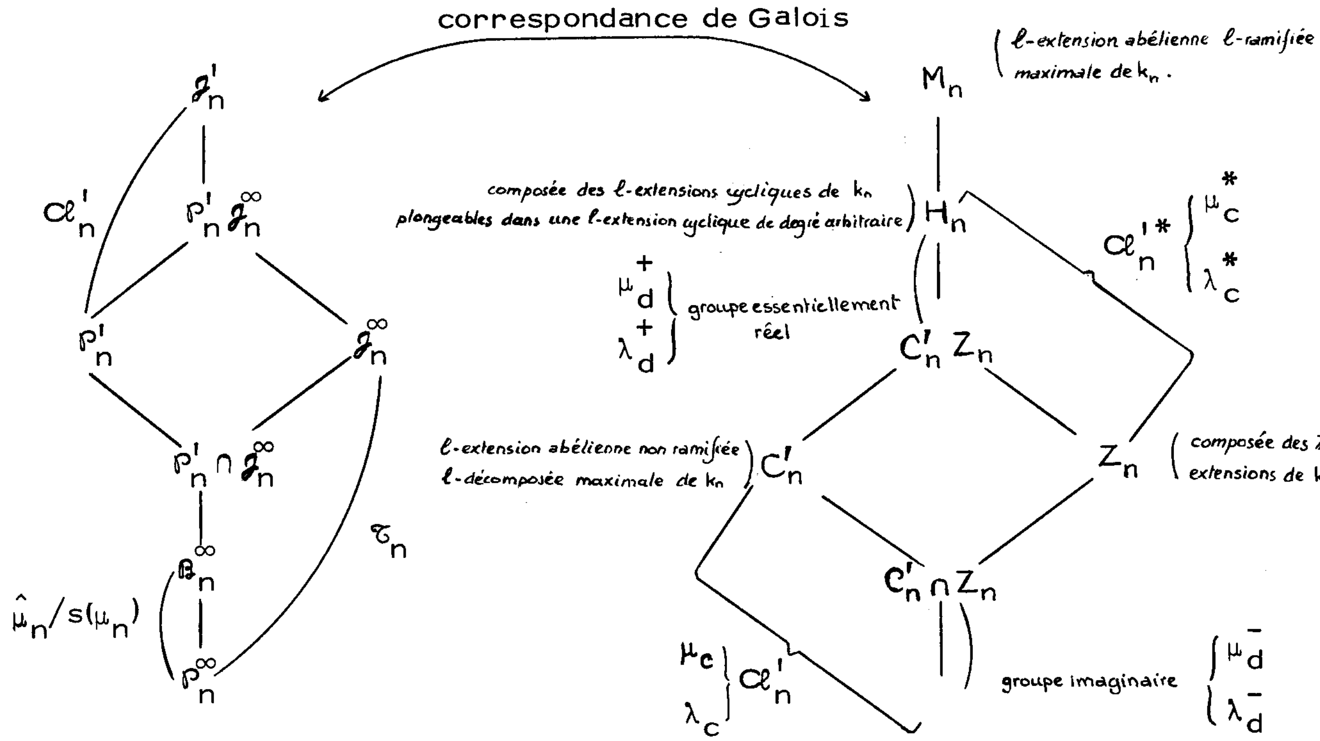
§ c - Inégalités du miroir :

Nous supposons, dans cette section, que le corps F est totalement réel, et que les places à l'infini $\mathfrak{p}_\infty$ de F ont le même sous-corps de décomposition, disons K^+, dans l'extension K/F. Dans ce cas, il est naturel d'écrire chaque caractère ℓ-adique χ du groupe Δ comme somme $\chi^+ + \chi^-$ d'un caractère réel et d'un caractère imaginaire, en posant :

<u>DEFINITION 8</u> : Lorsque le corps F est totalement réel, et K une extension quadratique d'un sur-corps K^+ de F, totalement réel, le sous-groupe de décomposition commun Δ_∞ des places à l'infini de F est le groupe d'ordre 2, engendré dans Δ par la conjugaison complexe. Nous disons qu'un <u>caractère</u> ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ est <u>réel</u> lorsqu'il est re-

présenté dans le caractère χ_∞, qu'il est <u>imaginaire</u> dans le cas contraire ; et qu'un caractère virtuel quelconque φ est réel (respectivement imaginaire) lorsque tous ses facteurs irréductibles sont réels (respectivement imaginaires). Les sous-groupes de $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$, engendrés, le premier par les caractères irréductibles réels, le second par ceux imaginaires, sont deux sous-groupes supplémentaires de $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$, images l'un de l'autre dans l'involution du miroir.

Introduisons maintenant les sous-groupes $\mathcal{B}_n^\infty = \{(x)' \in \mathcal{P}'_n \mid \exists\, p \in \mathbb{N}$ avec $x^{\ell^p} \in \mathcal{K}_n^\infty\}$ des idéaux ℓ-principaux généralisés $(x)'$ des corps K_n, respectivement engendrés par les éléments de $\mathcal{K}_n$ dont une puissance finie est infinitésimale (les groupes $\mathcal{B}_n^\infty$ ont déjà été rencontrés dans la partie (ii) du théorème 7) ; désignons par H_n la sous-extension de M_n associée à $\mathcal{B}_n^\infty$ par la théorie de Galois ; et considérons le schéma de corps :



Par un argument déjà utilisé (cf. th. 7 (ii)), le groupe $\mathcal{B}_n^\infty/\mathcal{P}_n^\infty$ s'identifie, via l'application $x \mapsto s(x)$, au quotient $\hat{\mu}_n/s(\mu_n)$ du groupe des racines de l'unité dans $\hat{\mathcal{K}}_n$ (le groupe des racines semi-locales de l'unité) par l'image diagonale du groupe des racines de l'unité dans $\mathcal{K}_n$ (le groupe des racines globales de l'unité) : c'est donc un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module fini, paramétré par les caractères $\lambda = \omega(\chi_\ell - 1)$, et $\mu = 0$. Cela étant, comme sous la