CHAPITRE I

L'ARITHMÉTIQUE DES ℓ-EXTENSIONS ABÉLIENNES

LA THÉORIE DE KUMMER ET LE K_2 DES CORPS DE NOMBRES

SOMMAIRE

1.- L'ARITHMÉTIQUE DES ℓ-EXTENSIONS ABÉLIENNES.

2.- LA THÉORIE DE KUMMER ET LE K_2 DES CORPS DE NOMBRES.

APPENDICE

L'ARITHMÉTIQUE DES ℓ-EXTENSIONS ABÉLIENNES

La théorie du corps de classes global, telle qu'elle fut développée par Takagi, Artin et Chevalley, a pour but la description de l'arithmétique des extensions abéliennes d'un corps de nombres donné, à l'aide des seuls éléments de ce corps. Dans sa formulation plus ancienne, celle de Takagi, elle décrit le groupe de Galois d'une extension abélienne finie L/K de corps de nombres comme groupe de congruences attaché à un diviseur $\mathfrak{f}_{L/K}$ construit sur les places ramifiées dans cette extension. Ce point de vue, aujourd'hui encore le plus efficace lorsqu'il s'agit d'apprécier numériquement une situation donnée, souffre cependant d'être limité au seul cas des extensions finies. La réinterprétation par Chevalley de l'ensemble des résultats de la théorie à l'aide des groupes d'idèles permet de pallier agréablement cette difficulté. Mais deux autres problèmes surgissent alors : D'abord l'application de réciprocité ψ du groupe des classes d'idèles $C_K = J_K/K^\times$ du corps K dans le groupe de Galois $Gal(K^{ab}/K)$ de l'extension abélienne maximale de K n'est jamais injective : Si $[K:\mathbb{Q}] = r_K + 2\,c_K$ est la décomposition canonique du degré de K en ses contributions réelle et imaginaire, le noyau $\overset{\circ}{C}_K$ de ψ, qui est la composante connexe de l'élément unité dans C_K, est le produit d'une droite réelle $\mathbb{R}$, de $(r_K + c_K - 1)$ solénoïdes $(\mathbb{R} \oplus \hat{\mathbb{Z}})/\mathbb{Z}$, et de c_K tores $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (*). L'existence de normes universelles dans la théorie est donc une première source de complications. Ensuite, la décomposition canonique du groupe de Galois $\mathcal{G}_K = Gal(K^{ab}/K)$ comme produit direct de ses p-composantes $\mathcal{G}_K^{(p)} = \varprojlim_k \mathcal{G}_K/\mathcal{G}_K^{p^k}$, pour tous les premiers p, ne se traduit pas commodément en termes de classes d'idèles, puisque ni le numérateur J_K, ni le dénominateur $K^\times$ ne sont des $\hat{\mathbb{Z}}$-modules.

(*) Le groupe $\hat{\mathbb{Z}}$ est le complété profini de $\mathbb{Z}$ pour la topologie définie par ses sous-groupes d'indice fini.

Pour l'ensemble de ces raisons, nous proposons ici une présentation de la théorie du corps de classes, directement inspirée de celle de Chevalley, mais mieux adaptée, nous semble-t-il, à l'étude spécifique des ℓ-extensions abéliennes d'un corps de nombres.

1.- PRÉLIMINAIRES A LA THÉORIE DU CORPS DE CLASSES.

a.- Définition des ℓ-groupes fondamentaux.

ℓ étant un nombre premier fixé, nous désignons par $\mathbb{Z}_\ell = \varprojlim_k \mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers ℓ-adiques. A chaque corps de nombres K (de degré fini sur $\mathbb{Q}$), nous allons associer deux $\mathbb{Z}_\ell$-modules : Le premier $\mathcal{R}_K$, global, défini à partir du groupe multiplicatif $K^\times$ des éléments non nuls de K ; le second $\mathcal{J}_K$, semi-local, défini à partir des groupes multiplicatifs $K_\mathfrak{p}^\times$ des complétés non complexes de K.

DÉFINITION I.1.1.- Etant donné un corps de nombres K, nous appelons ℓ-groupe des éléments généralisés de K, et nous notons $\mathcal{R}_K$, le tensorisé ℓ-adique du groupe de ses éléments non nuls :

$$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times .$$

Le groupe $\mathcal{R}_K$ est la réunion des ℓ-groupes de S-unités généralisées $\mathcal{E}_K^S = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} E_K^S$, lorsque S parcourt les ensembles finis de places de K. Chacun des $\mathcal{E}_K^S$ est compact pour sa topologie naturelle de $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien, et $\mathcal{R}_K$ est lui-même un $\mathbb{Z}_\ell$-module topologique pour la limite inductive des topologies des $\mathcal{E}_K^S$.

Par définition de la topologie limite inductive, les sous-modules ouverts de $\mathcal{R}_K$ sont exactement ceux qui intersectent chacun des $\mathcal{E}_K^S$ suivant un sous-module relatif ouvert, c'est-à-dire (puisque les $\mathcal{E}_K^S$ sont de type fini sur $\mathbb{Z}_\ell$) suivant un sous-module d'indice fini. La topologie ainsi obtenue sur $\mathcal{R}_K$ est strictement plus fine que celle définie par ses sous-modules d'indice fini.

Remarques.- (i) L'application canonique de $K^\times$ dans $\mathcal{R}_K$ n'est pas généralement injective. Plus précisément, son noyau est le sous-groupe μ_K' des racines de l'unité dans K d'ordre étranger à ℓ. Le quotient $K^\times/\mu_K'$, qui s'injecte dans $\mathcal{R}_K$, s'identifie ainsi à un sous-groupe partout dense de $\mathcal{R}_K$.

(ii) Convenons d'ordonner les places de K en posant $S_n = \{\mathfrak{p} \in Pl_K \mid N\mathfrak{p} \le n\}$, avec la convention $N\mathfrak{p} = \pm 1$ pour les places archimédiennes. Nous avons évidemment $K^\times = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_K^S$, et chacun des $E_K^S = \{x \in K^\times \mid v_\mathfrak{p}(x) = 0,\ \forall \mathfrak{p} \in S_n\}$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini. En particulier $\mathcal{R}_K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_K^S$ est réunion dénombrable de $\mathbb{Z}_\ell$-modules compacts (*).

(iii) Désignons par $\mathcal{K}^\times = \varprojlim_k K^\times/K^{\times \ell^k}$ la limite projective des quotients d'exposant ℓ-primaire du groupe $K^\times$. Par passage à la limite à partir des surjections canoniques $\mathcal{R}_K \twoheadrightarrow \mathcal{R}_K/\mathcal{R}_K^{\ell^k} \simeq K^\times/K^{\times \ell^k}$, le groupe $\mathcal{R}_K$ s'identifie à un sous-module strict de $\mathcal{K}^\times$. Cependant, la topologie de $\mathcal{R}_K$ n'est pas la restriction à $\mathcal{R}_K$ de la topologie naturelle de $\mathcal{K}^\times$ définie par les sous-modules $\mathcal{K}^{\times \ell^k}$.

<u>DÉFINITION I.1.2.</u>- Pour chaque place $\mathfrak{p}$ du corps K, nous appelons ℓ-groupe des éléments généralisés du complété $K_\mathfrak{p}^\times$, la limite projective

$$\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times = \varprojlim_k K_\mathfrak{p}^\times/K_\mathfrak{p}^{\ell^k}$$

des quotients d'exposant ℓ-primaire du groupe multiplicatif $K_\mathfrak{p}^\times$. Le groupe $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien donc compact pour la topologie définie par ses sous-modules d'indice fini.

(i) Si $\mathfrak{p}$ est une place archimédienne, deux cas se présentent :

- ou bien $\mathfrak{p}$ est complexe, et le groupe $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ est toujours nul.
- ou bien $\mathfrak{p}$ est réelle, et le groupe $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $\ell = 2$, nul sinon.

(ii) Si $\mathfrak{p}$ est une place ultramétrique, le choix d'une uniformisante $\pi_\mathfrak{p}$ permet d'écrire formellement

$$\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times = \mathcal{U}_\mathfrak{p} \cdot \pi_\mathfrak{p}^{\mathbb{Z}_\ell},$$

en désignant par $\mathcal{U}_\mathfrak{p} = \varprojlim_k U_\mathfrak{p}/U_\mathfrak{p}^{\ell^k}$ la limite projective des quotients d'exposant ℓ-primaire du groupe des unités du corps local $K_\mathfrak{p}$.

(*) Pour une définition des valuations $v_\mathfrak{p}$ attachées aux places archimédiennes, voir Ch. III.1, 1 § 2.

- Lorsque $\mathfrak{p}$ divise ℓ, le groupe $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ n'est autre que le groupe des unités principales de $K_{\mathfrak{p}}$.

- Lorsque $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ, il s'identifie au ℓ-sous-groupe de Sylow $\mu_{\mathfrak{p}}$ du groupe des racines de l'unité dans $K_{\mathfrak{p}}$.

Dans les deux cas nous disons que $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ est le groupe des unités de $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ (*).

Démonstration :

(i) Si $\mathfrak{p}$ est une place archimédienne, le groupe multiplicatif $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$ est soit divisible, lorsque $\mathfrak{p}$ est complexe, soit le produit de $\{\pm 1\}$ par un groupe divisible, lorsque $\mathfrak{p}$ est réelle. La limite projective $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ est donc nulle dans le premier cas, isomorphe à $\mathbb{Z}_{\ell}/2\mathbb{Z}_{\ell}$ dans le second.

(ii) Si $\mathfrak{p}$ est une place ultramétrique, la décomposition du groupe multiplicatif $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$

$$K_{\mathfrak{p}}^{\times} = \mu_{\mathfrak{p}}^{\circ} . U_{\mathfrak{p}}^{1} . \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_{\ell}}$$

fait intervenir le groupe $\mu_{\mathfrak{p}}^{\circ}$ des racines de l'unité d'ordre étranger à $\mathfrak{p}$, le sous-groupe $U_{\mathfrak{p}}^{1}$ des unités principales, et une uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}}$ de $K_{\mathfrak{p}}$.

- Si $\mathfrak{p}$ est au-dessus de ℓ, le groupe $\mu_{\mathfrak{p}}^{\circ}$ est ℓ-divisible, et le groupe $U_{\mathfrak{p}}^{1}$ est un $\mathbb{Z}_{\ell}$-module noethérien, isomorphe comme tel à la limite projective de ses quotients finis. Il vient donc :

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim_{k} U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{\ell^k} = \varprojlim_{k} U_{\mathfrak{p}}^{1}/U_{\mathfrak{p}}^{1\,\ell^k} \simeq U_{\mathfrak{p}}^{1}, \text{ comme annoncé.}$$

- Si $\mathfrak{p}$ est étrangère à ℓ, le groupe $\mu_{\mathfrak{p}}^{\circ}$ est le composé direct de son ℓ-Sylow $\mu_{\mathfrak{p}}$ et de son sous-groupe ℓ-divisible $\mu'_{\mathfrak{p}}$. Enfin, le groupe $U_{\mathfrak{p}}^{1}$ est un $\mathbb{Z}_{p}$-module (pour un $p \neq \ell$), donc ℓ-divisible, et il vient

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} = \varprojlim_{k} U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{\ell^k} = \mu_{\mathfrak{p}}, \text{ comme annoncé.}$$

Dans les deux cas, le groupe $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ est le produit direct de $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ et du $\mathbb{Z}_{\ell}$-module libre de dimension 1 engendré par l'uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}}$.

<u>DÉFINITION I.1.3.</u>- Par ℓ-groupe des idèles généralisés d'un corps de nombres K, nous entendons le produit :

(*) On a toujours $\mu_{\mathfrak{p}} \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ lorsque $\mathfrak{p}$ est ultramétrique mais non lorsque $\mathfrak{p}$ est réelle. Dans ce dernier cas, en effet, $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ est identiquement nul, et $\mu_{\mathfrak{p}} = \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ égal à $\mathbb{Z}_{\ell}/2\mathbb{Z}_{\ell}$.

$$\mathcal{J}_K = \prod^*_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \mathcal{K}^\times_{\mathfrak{p}}$$

des complétés profinis des groupes multiplicatifs des corps locaux $K_{\mathfrak{p}}$, restreint aux familles $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in Pl_K}$ dont tous les éléments sont des unités, à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

Le groupe $\mathcal{J}_K$ est la réunion des ℓ-groupes $\mathcal{U}_K^S = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathcal{K}^\times_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$, lorsque S parcourt les ensembles finis de places de K. Chacun des $\mathcal{U}_K^S$ est compact pour sa topologie naturelle de $\mathbb{Z}_\ell$-module produit, et $\mathcal{J}_K$ est lui-même un $\mathbb{Z}_\ell$-module topologique pour la limite inductive des topologies des $\mathcal{U}_K^S$.

Par définition de la topologie limite inductive, les sous-modules ouverts de $\mathcal{J}_K$ sont ceux qui intersectent chacun des $\mathcal{U}_K^S$ suivant un sous-module relatif ouvert. De fait, il est possible d'exhiber une base de sous-modules ouverts de $\mathcal{J}_K$ en procédant comme suit : Pour chaque place ultramétrique $\mathfrak{p}$ de K, faisons choix d'une uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{K}^\times_{\mathfrak{p}}$; si $\mathfrak{p}$ est réelle, prenons $\pi_{\mathfrak{p}} = -1$; et, si $\mathfrak{p}$ est complexe, $\pi_{\mathfrak{p}} = 1$. Cela posé, le groupe $\mathcal{J}_K$ s'écrit comme somme directe topologique du sous-module compact $\mathcal{U}_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$, formé des éléments unités, et du $\mathbb{Z}_\ell$-module $\bigoplus_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}$, engendré par les $\pi_{\mathfrak{p}}$, qui s'identifie au ℓ-groupe $\mathcal{D}_K$ des diviseurs de K. Les produits

$$\Big(\prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \mathcal{U}'_{\mathfrak{p}}\Big) \cdot \Big(\bigoplus_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \pi_{\mathfrak{p}}^{\ell^{n_{\mathfrak{p}}} \mathbb{Z}_\ell}\Big),$$

où, pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K, $\mathcal{U}'_{\mathfrak{p}}$ est un sous-module d'indice fini de $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ égal à $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ pour presque tout $\mathfrak{p}$, et $n_{\mathfrak{p}}$ un entier naturel arbitraire, forment une base de sous-modules ouverts de $\mathcal{J}_K$.

<u>Remarques</u>.- (i) L'application canonique du groupe des idèles J_K dans le ℓ-groupe $\mathcal{J}_K$ des idèles généralisés n'est jamais injective. Son noyau est le produit $\prod_{\mathfrak{p} | \infty} K_{\mathfrak{p}}^{\times 2} \cdot \prod_{\mathfrak{p} | \ell} \mu^\circ_{\mathfrak{p}} \cdot \prod_{\mathfrak{p} | \infty} \mu'_{\mathfrak{p}} U^1_{\mathfrak{p}}$; son image est un sous-groupe partout dense de $\mathcal{J}_K$.

(ii) Convenons d'ordonner les places de K en posant $S_n = \{\mathfrak{p} \in Pl_K \mid N\mathfrak{p} \leq n\}$, avec la convention $N\mathfrak{p} = 1$ pour les places archimédiennes. Nous avons évidemment $\mathcal{J}_K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_K^{S_n}$, ce qui nous montre que $\mathcal{J}_K$ est réunion dénombrable de $\mathbb{Z}_\ell$-modules compacts.

(iii) On peut regarder le groupe $\mathcal{J}_K$ comme sous-module strict du produit $\prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$. Cependant, la topologie de $\mathcal{J}_K$ n'est pas la restriction du produit des topologies des $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$.

b.- Présentation du ℓ-groupe des classes d'idèles.

THÉORÈME & DÉFINITION I.1.4.- L'application naturelle du tensorisé ℓ-adique $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\times}$ du groupe multiplicatif du corps K dans le ℓ-groupe $\mathcal{J}_K$ des idèles généralisés, induite par l'injection diagonale de $K^{\times}$ dans J_K, est un monomorphisme continu. Le groupe quotient

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$$

est un $\mathbb{Z}_\ell$-module compact. Nous disons que c'est le ℓ-groupe des classes d'idèles du corps K.

Démonstration : Partons de l'injection diagonale $K^{\times} \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} K_{\mathfrak{p}}^{\times}$ du groupe multiplicatif de K dans le produit de ceux de ses complétés. Par passage au quotient, nous en déduisons, pour chaque entier k, un morphisme naturel

$$K^{\times}/K^{\times \ell} \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} K_{\mathfrak{p}}^{\times}/K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell} ,$$

qui est injectif lorsque ℓ est impair, et dont le noyau est d'ordre 1 ou 2 dans tous les cas (cf. [AT], Ch. X, § 1, th. 1). Par passage à la limite projective, nous obtenons par conséquent un morphisme injectif :

$$\mathcal{K}^{\times} = \varprojlim_k K^{\times}/K^{\times \ell} \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \varprojlim_k K_{\mathfrak{p}}^{\times}/K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell} = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times} .$$

Sa restriction au départ à $\mathcal{R}_K$, à l'arrivée à $\mathcal{J}_K$ est le $\mathbb{Z}_\ell$- morphisme cherché. Comme il est injectif d'après ce qui précède, nous identifierons désormais $\mathcal{R}_K$ avec son image canonique dans $\mathcal{J}_K$. Cela étant, nous allons établir successivement :

(i) que l'application naturelle de $\mathcal{R}_K$ dans $\mathcal{J}_K$ est continue (*);

(ii) que $\mathcal{R}_K$ est fermé dans $\mathcal{J}_K$;

(iii) que le quotient $\mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module compact.

(i) Le premier point résulte de la définition de la topologie limite inductive : Pour chaque ensemble fini S de places de K, le groupe $\mathcal{E}_K^S = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{U}_K^S$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini, donc d'une façon et d'une

---

(*) En fait, on a mieux, puisque la topologie de $\mathcal{R}_K$ est induite par celle de $\mathcal{J}_K$.

seule un $\mathbb{Z}_\ell$-module topologique. En particulier la topologie de $\mathcal{E}_K^S$ est induite par celle de $\mathcal{U}_K^S$. Si donc $\mathcal{O}_K$ est un sous-module ouvert de $\mathcal{J}_K$, les sous-modules $\mathcal{O}_K \cap \mathcal{U}_K^S$ étant ouverts dans les $\mathcal{U}_K^S$, il en est de même des sous-modules $\mathcal{O}_K \cap \mathcal{E}_K^S$ dans les $\mathcal{E}_K^S$; ce qui veut dire que $\mathcal{O}_K \cap \mathcal{R}_K$ est un sous-module ouvert de $\mathcal{R}_K$. En particulier l'injection canonique de $\mathcal{R}_K$ dans $\mathcal{J}_K$ est bien continue.

(ii) Le second point s'établit comme suit : Etant donné un idèle généralisé $\mathfrak{x}$ de $\mathcal{J}_K$ qui n'est pas dans $\mathcal{R}_K$, fixons S assez grand, contenant les places archimédiennes, pour avoir $\mathfrak{x} \in \mathcal{U}_K^S$; puis, pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K n'appartenant pas à S, choisissons $n_\mathfrak{p}$ assez grand, de telle sorte que le diviseur $\mathfrak{p}^{\ell^{n_\mathfrak{p}}}$ soit principal (dans le ℓ-groupe $\mathcal{D}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} D_K$ des diviseurs de K). Cela étant, comme $\mathcal{E}_K^S$ est fermé dans $\mathcal{U}_K^S$, il existe un sous-module ouvert $\mathcal{O}^S$ de $\mathcal{U}_K^S$ dont le translaté $\mathfrak{x}\mathcal{O}^S$ ne rencontre pas $\mathcal{E}_K^S$. Le $\mathbb{Z}_\ell$-module $\mathcal{O}$ engendré dans $\mathcal{J}_K$ par $\mathcal{E}_K^S$ et les éléments $\pi_\mathfrak{p}^{\ell^{n_\mathfrak{p}}}$ pour $\mathfrak{p} \in S$ est alors un sous-module ouvert de $\mathcal{J}_K$ dont le translaté $x\mathcal{O}$ ne rencontre pas $\mathcal{R}_K$.

(iii) Pour établir le troisième point, nous allons montrer que l'image $\mathcal{U}_K \mathcal{R}_K / \mathcal{R}_K \simeq \mathcal{U}_K / \mathcal{E}_K$ dans $\mathcal{C}_K$, du sous-module compact $\mathcal{U}_K$ de $\mathcal{J}_K$ formé des idèles unités, en est un sous-module d'indice fini (de sorte que $\mathcal{C}_K$ sera compact comme réunion finie de compact). Or, cela résulte de la proposition :

<u>PROPOSITION I.1.5.</u>- Le quotient $\mathcal{J}_K / \mathcal{U}_K \mathcal{R}_K$ du ℓ-groupe des classes d'idèles du corps K par le sous-groupe formé des classes des idèles unités s'identifie canoniquement au ℓ-groupe fini des classes de diviseurs de K :

$$\mathcal{J}_K / \mathcal{U}_K \mathcal{R}_K \simeq Cl_K .$$

Démonstration : Le groupe des diviseurs d'un corps de nombres est le groupe abélien libre construit sur ses valuations : Comme la valuation $v_\mathfrak{p}$ associée à une place de K est triviale si $\mathfrak{p}$ est complexe, à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $\mathfrak{p}$ est réelle, et dans $\mathbb{Z}$ si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique, le groupe D_K est le produit direct de r_K exemplaires de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et du groupe Id_K des idéaux de K. Son quotient D_K/P_K par le sous-groupe des diviseurs principaux (i.e. par l'image canonique de $K^\times$ dans D_K) est fini, d'après la géométrie des nombres : dans la terminologie des idéaux , c'est le groupe des classes au sens restreint (cf. Ch.III.I, 1 § a) . Son ℓ-Sylow $Cl_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} (D_K/P_K)$ est donc canoniquement le quotient $\mathcal{D}_K/\mathcal{P}_K$ du tensorisé ℓ-adique $\mathcal{D}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} D_K$ du groupe des diviseurs par celui $\mathcal{P}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} P_K$ du sous-groupe principal P_K. Maintenant, $\mathcal{D}_K$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{J}_K/\mathcal{U}_K$, et $\mathcal{P}_K$ est l'image canonique de $\mathcal{R}_K$ dans $\mathcal{D}_K$.

La correspondance entre ℓ-groupes de classes d'idèles et de diviseurs peut ainsi se résumer par le diagramme commutatif exact (où toutes les flêches sont des $\mathbb{Z}_\ell$-morphismes) :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{P}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} P_K \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{U}_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \mathcal{U}_\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{J}_K = \prod^*_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} D_K \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{U}_K/\mathcal{E}_K \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}_K \arrow[r] \arrow[d] & Cl_K \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

<u>SCOLIE I.1.6.</u>- Pour tout ensemble fini S de places de K , le quotient $Cl_K^S = \mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K\, \mathcal{U}_K^S$ du ℓ-groupe des classes d'idèles $\mathcal{C}_K$ par le sous-groupe $\mathcal{C}_K(S) \simeq \mathcal{U}_K^S/\mathcal{E}_K^S$ des classes des idèles unités en dehors de S , s'identifie canoniquement au quotient $\mathcal{C}\ell_K/\mathcal{C}\ell_K(S)$ du ℓ-groupe des classes de diviseurs du corps K par le sous-groupe engendré par les classes des diviseurs construits sur les places de S . Nous disons que $\mathcal{C}\ell_K$ est le ℓ-groupe des S-classes de diviseurs du corps K .

c.- Valeurs absolues ℓ-adiques principales et formule du produit .

On pourrait craindre que la ℓ-adification des groupes d'idèles fasse disparaitre la classique formule du produit pour les valeurs absolues . Il n'en est rien , à condition naturellement de remplacer les valeurs absolues habituelles par des valeurs absolues ℓ-adiques convenables .

Désignons pour cela par $\mathbb{Z}_\ell^\times$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau des nombres ℓ-adiques, par $U_\ell = 1 + \ell\mathbb{Z}_\ell$ le sous-groupe des unités principales de $\mathbb{Z}_\ell$, et par $u \mapsto \langle u \rangle$ la surjection canonique de $\mathbb{Z}_\ell^\times$ sur U_ℓ (de sorte que, pour ℓ impair, le quotient $u/\langle u \rangle$ est l'unique racine de l'unité dans $\mathbb{Z}_\ell$ qui est congrue à u modulo ℓ ; tandis que si ℓ vaut 2 , $\langle u \rangle$ est toujours égal à u) . Cela étant , nous avons :

DEFINITIONS I.1.7.- Etant donnée une place $\mathfrak{p}$ d' un corps de nombres K , nous appelons valeur absolue ℓ-adique principale d'un élément $x_\mathfrak{p}$ du groupe $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$, et nous notons $|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}$, l'élément du $\mathbb{Z}_\ell$-module multiplicatif $U_\ell = 1 + \ell\mathbb{Z}_\ell$ défini par :

$|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = 1$, si $\mathfrak{p}$ est complexe ;

$|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = \langle sg(x_\mathfrak{p}) \rangle$, si $\mathfrak{p}$ est réelle ;

$|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = \langle N\mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(x)} \rangle$, si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique et étrangère à ℓ ;

$|x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = \langle N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p}(x) \,.\, N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x)} \rangle$, si $\mathfrak{p}$ est au-dessus de ℓ .

Enfin , nous appelons valeur absolue ℓ-adique principale d'un élément x de $\mathcal{R}_K$ relativement à la place $\mathfrak{p}$, et nous notons $|x|_\mathfrak{p}$ la valeur absolue ℓ-adique principale de l'élément $s_\mathfrak{p}(x)$, où $s_\mathfrak{p}$ est la surjection canonique de $\mathcal{R}_K$ dans $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$, induite par l'injection naturelle de $K^\times$ dans $K_\mathfrak{p}^\times$.

Remarques.- (i) La définition donnée ici diffère de celle de Tate (cf. [TBS] , Ch. VI , § 1 , déf. 1.1) , qui ne s'étend pas aux $\mathbb{Z}_\ell$-modules . Plus précisément , pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K , la quantité $|x|_\mathfrak{p}$ est le crochet de la valeur absolue de Tate ; c'est pourquoi nous parlons de valeur absolue principale .

(ii) L'application $x_\mathfrak{p} \mapsto |x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}$ est trivialement un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme de $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ dans U_ℓ . En particulier , elle est continue et fermée pour la topologie naturelle de ces deux modules. Si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique, son image $|\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}|_{\mathfrak{p}}$ est, en outre, un sous-module d'indice fini de U_{ℓ}.

PROPOSITION I.1.8.- (Formule du produit pour les valeurs absolues principales) - L'application

$$\mathfrak{x} = (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} |x_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} = \|\mathfrak{x}\|$$

est un $\mathbb{Z}_{\ell}$-morphisme continu du ℓ-groupe $\mathcal{J}_K$ des idèles généralisés du corps K sur le groupe U_{ℓ} des unités principales de l'anneau $\mathbb{Z}_{\ell}$. Son noyau est un sous-module fermé de $\mathcal{J}_K$, qui contient le tensorisé ℓ-adique $\mathcal{R}_K$ du groupe multiplicatif $K^{\times}$.

Démonstration : Remarquons d'abord que la quantité $\prod |x_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}}$ est bien définie puisque, pour chaque idèle $\mathfrak{x}$ de $\mathcal{J}_K$, les composantes $x_{\mathfrak{p}}$ étant des unités pour presque tout $\mathfrak{p}$, le produit infini n'a en fait qu'un nombre fini de facteurs distincts de 1. Cela étant, pour montrer que l'application $\mathfrak{x} \mapsto \|\mathfrak{x}\|$ est continue sur $\mathcal{J}_K$, il nous suffit, d'après la propriété universelle de la topologie limite inductive, de vérifier la continuité de sa restriction au sous-module $\mathcal{U}_K^S$, pour chaque ensemble fini S assez grand de places de K. Pour cela, nous pouvons supposer que S contient les places au-dessus de ℓ, auquel cas nous avons $\|\mathfrak{x}\| = \prod_{\mathfrak{p} \in S} |x_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}}$, pour chaque $\mathfrak{x}$ de $\mathcal{U}_K^S$; et la continuité de $\|.\|$ résulte de celle des applications $|.|_{\mathfrak{p}}$ sur chacun des facteurs $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$.

Enfin, pour établir la formule du produit, il suffit de noter qu'elle est trivialement vérifiée sur le corps des rationnels, puis d'écrire que l'on a, pour tout x de $\mathcal{R}_K$:

$$\|x\|_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} |x|_{\mathfrak{p}} = \prod_{p \in Pl_{\mathbb{Q}}} \prod_{\mathfrak{p}|p} |x|_{\mathfrak{p}} = \prod_{p \in Pl_{\mathbb{Q}}} \prod_{\mathfrak{p}|p} |N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}(x)|_p =$$

$$= \prod_{p \in Pl_{\mathbb{Q}}} |N_{K/\mathbb{Q}}(x)| = \|N_{K/\mathbb{Q}}(x)\|_{\mathbb{Q}} = 1 .$$

PROPOSITION I.1.9.- Soit $\mathfrak{p}$ une place de K, et $|\ |_{\mathfrak{p}}$ la valeur absolue ℓ-adique principale associée.

(i) Si $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ, le noyau de l'application $|.|_{\mathfrak{p}}$ est le sous-module des unités de $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$:

$$|x_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} = 1 \Leftrightarrow x_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{p}} .$$

(ii) Si $\mathfrak{p}$ divise ℓ, le noyau $\mathcal{K}^*_{\mathfrak{p}}$ de l'application $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ est caractérisé par la condition :

$$|x_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Log}_{\ell} N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\ell}}(x_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Tr}_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\ell}} \mathrm{Log}_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = 0 .$$

Le groupe $\mathcal{K}^*_{\mathfrak{p}}$ est le produit direct du sous-groupe $\mu_{\mathfrak{p}}$ des racines de l'unité dans $\mathcal{K}^{\times}_{\mathfrak{p}}$, et d'un $\mathbb{Z}_{\ell}$-module libre de rang $[K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{\ell}]$.

Démonstration :

(i) Lorsque $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ, la condition $|x_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} = 1$ s'écrit tout aussi bien $v_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = 0$; elle caractérise donc les unités de $\mathcal{K}^{\times}_{\mathfrak{p}}$ (On notera que, du fait des conventions utilisées, (-1) n'est pas une unité dans $\mathcal{K}^{\times}_{\mathfrak{p}}$, si $\mathfrak{p}$ est réelle et ℓ égal à 2).

(ii) Lorsque $\mathfrak{p}$ divise ℓ, la condition $|x_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} = 1$ s'écrit encore $\langle N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\ell}}(x_{\mathfrak{p}}) / N\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}})} \rangle = 1$. Elle affirme donc que la norme de $x_{\mathfrak{p}}$ s'écrit comme produit d'une puissance de ℓ (qui est nécessairement $N\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}})}$) et d'une racine de l'unité. Mais cette propriété caractérise précisément le noyau du logarithme d'Iwasawa dans $\mathbb{Q}_{\ell}$, ce qui conduit à l'équivalence annoncée. Enfin, comme $|\mathcal{K}^{\times}_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}}$ est d'indice fini dans U_{ℓ}, il vient immédiatement (*) :

$$\dim_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathcal{K}^*_{\mathfrak{p}} = \dim_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathcal{K}^{\times}_{\mathfrak{p}} - 1 = \dim_{\mathbb{Z}_{\ell}} \mathcal{U}_{\ell} = [K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{\ell}] .$$

<u>COROLLAIRE I.1.10</u>.- Le noyau dans $\mathcal{J}_K$ des valeurs absolues principales est le sous-module compact :

$$\mathcal{J}^*_K = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell_\infty} \mu_{\mathfrak{p}} \cdot \prod_{\mathfrak{l} | \ell} \mathcal{K}^*_{\mathfrak{l}} .$$

Le groupe $\mathcal{J}^*_K$ est composé direct du sous-groupe $\prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \mu_{\mathfrak{p}}$ des idèles unités qui sont localement des racines de l'unité, et d'un $\mathbb{Z}_{\ell}$-module libre de dimension $\sum_{\mathfrak{l} | \ell} [K_{\mathfrak{l}} : \mathbb{Q}_{\ell}] = [K : \mathbb{Q}]$.

(*) Par dimension d'un $\mathbb{Z}_{\ell}$-module noethérien X, nous entendons la dimension du $\mathbb{Q}_{\ell}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}_{\ell}} X$.

2.- ISOMORPHISME DU CORPS DE CLASSES .

a.- Enoncé des théorèmes fondamentaux .

Nous rappelons sans démonstration les résultats fondamentaux du corps de classes local pour les ℓ-extensions , puisqu'ils sont essentiellement bien connus sous cette forme (cf. par exemple , [La], Ch. VI , § 4) . Nous donnons en revanche la preuve des résultats globaux .

THEOREME I.1.11.- (Corps de classes local) - Etant donné un corps local $K_{\mathfrak{p}}$, l'application de réciprocité induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell$ -modules topologiques du complété profini $\mathcal{K}^\times(K_{\mathfrak{p}}) = \varprojlim_k K_{\mathfrak{p}}^\times / K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^k}$ sur le groupe de Galois $D_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{p}}^{ab}/K_{\mathfrak{p}})$ de la ℓ-extension abélienne maximale du corps $K_{\mathfrak{p}}$. Dans cet isomorphisme le groupe d'inertie $I_{\mathfrak{p}} = \mathrm{In}(K_{\mathfrak{p}}^{ab}/K_{\mathfrak{p}})$ est l'image du sous-groupe $\mathcal{U}(K_{\mathfrak{p}})$ des unités de $\mathcal{K}^\times(K_{\mathfrak{p}})$.

- Si $\mathfrak{p}$ ne divise pas ℓ , la ramification est modérée , et le groupe $I_{\mathfrak{p}}$ est fini , isomorphe au ℓ-Sylow $\mu_{\mathfrak{p}}$ du groupe des racines de l'unité dans $K_{\mathfrak{p}}$.

- Si $\mathfrak{p}$ divise ℓ , la ramification est sauvage , et le groupe $I_{\mathfrak{p}}$ est infini . Dans ce cas , la suite des sous-groupes supérieurs de ramification est l'image dans $D_{\mathfrak{p}}$ de la filtration canonique $(U_{\mathfrak{p}}^i)_{i \geq 1} = (1 + \mathfrak{p}^i)_{i \geq 1}$ du groupe $\mathcal{U}(K_{\mathfrak{p}})$.

Remarques.- (i) L'application de réciprocité locale établit une correspondance bijective entre les sous-modules fermés de $\mathcal{K}^\times(K_{\mathfrak{p}})$ et les ℓ-extensions abéliennes de $K_{\mathfrak{p}}$. Plus précisément toute sous-extension $L_{\mathfrak{P}}$ de $K_{\mathfrak{p}}^{ab}$ est le corps des points fixes d'un unique sous-module fermé de $\mathcal{K}^\times(K_{\mathfrak{p}})$. En particulier , si H est un sous-groupe quelconque de $\mathcal{K}^\times(K_{\mathfrak{p}})$, et $L_{\mathfrak{P}}$ son corps des invariants , la fermeture de H dans $\mathcal{K}^\times(K_{\mathfrak{p}})$ est le sous-module de $\mathcal{K}^\times(K_{\mathfrak{p}})$ associé à $L_{\mathfrak{P}}$.

(ii) Dans la correspondance obtenue , les ℓ-extensions abéliennes finies de $K_{\mathfrak{p}}$ sont associées aux sous-modules fermés d'indice fini de $\mathcal{K}^\times(K_{\mathfrak{p}})$, c'est-à-dire aux sous-modules ouverts de $\mathcal{K}^\times(K_{\mathfrak{p}})$. Ces sous-modules sont donc caractérisés comme groupes de normes associés aux ℓ-extensions finies de $K_{\mathfrak{p}}$:

<u>SCOLIE I.1.12.</u>- Si $L_{\mathfrak{P}}$ est une ℓ-extension finie quelconque de $K_{\mathfrak{p}}$, le sous-module ouvert de $\mathcal{K}^{\times}(K_{\mathfrak{p}})$ associé par le corps de classes local à la sous-extension maximale $L_{\mathfrak{P}}^{ab}$ de $L_{\mathfrak{P}}$, qui est abélienne sur $K_{\mathfrak{p}}$, est l'image de $\mathcal{K}^{\times}(L_{\mathfrak{P}})$ par la norme arithmétique. Il vient ainsi :

$$D_{\mathfrak{p}}^{ab}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}^{ab}/K_{\mathfrak{p}}) \simeq \mathcal{K}^{\times}(K_{\mathfrak{p}})/\mathcal{N}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{K}^{\times}(L_{\mathfrak{P}}))$$

$$I_{\mathfrak{p}}^{ab}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{In}(L_{\mathfrak{P}}^{ab}/K_{\mathfrak{p}}) = \mathcal{U}(K_{\mathfrak{p}})/\mathcal{N}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{U}(L_{\mathfrak{P}})) .$$

Ce résultat s'étend sans difficulté aux extensions infinies, si l'on convient de dire qu'un élément de $\mathcal{K}^{\times}(K_{\mathfrak{p}})$ est norme dans une telle extension lorsqu'il est norme dans chacune de ses sous-extensions finies. Dans ce cas, le théorème d'existence du corps de classes local affirme que tout sous-module fermé de $\mathcal{K}^{\times}(K_{\mathfrak{p}})$ est le groupe des normes d'une unique ℓ-extension abélienne de $K_{\mathfrak{p}}$.

<u>THEOREME I.1.13.</u>- (Corps de classes global) - Etant donné un corps de nombres K, l'application de réciprocité induit un épimorphisme continu du ℓ-groupe $\mathcal{J}_K$ des idèles généralisés de K sur le groupe de Galois $G_K = \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ de la ℓ-extension abélienne maximale de K ; le noyau de ce morphisme est le sous-groupe $\mathcal{R}_K$ formé des idèles principaux. Dans la correspondance obtenue, le sous-groupe de décomposition $D_{\mathfrak{p}}$ d'une place $\mathfrak{p}$ de K est l'image dans G_K du sous-module $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ de $\mathcal{J}_K$; et son sous-groupe d'inertie $I_{\mathfrak{p}}$ est celle du sous-groupe $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ des unités de $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$.

Démonstration : D'après Artin-Tate (cf. [AT], Ch. XIV, prop. 10), le morphisme surjectif du groupe des idèles de K sur le groupe de Galois G_K de la ℓ-extension abélienne maximale de K est nul sur le sous-groupe ℓ-divisible J_K^{div} de J_K. Comme le ℓ-groupe généralisé $\mathcal{J}_K$ contient canoniquement le quotient J_K/J_K^{div} (cf. déf. 3, rem.(i)), il s'agit donc d'établir que le morphisme quotient $J_K/J_K^{div} \longrightarrow G_K$ se prolonge de façon unique en un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme ψ de $\mathcal{J}_K$ sur G_K, que ce prolongement est continu, et que son noyau est le groupe $\mathcal{R}_K$ des idèles principaux.

(i) existence du prolongement : Pour chaque place ultramétrique $\mathfrak{p}$ de K , faisons choix d'une uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}}$; prenons $\pi_{\mathfrak{p}} = 1$, si $\mathfrak{p}$ est complexe ; $\pi_{\mathfrak{p}} = -1$, si $\mathfrak{p}$ est réelle . Puisque le sous-groupe $\mathcal{U}_K$ des unités de $\mathcal{J}_K$ est contenu , par construction , dans celui U_K de J_K , l'application ψ cherchée est bien définie sur le sous-groupe dense $\mathcal{U}_K \cdot \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}}$. Ecrivant alors $\psi(u \cdot \prod_{\mathfrak{p}} \pi_{\mathfrak{p}}^{\alpha}) = \psi(u) \prod_{\mathfrak{p}} \psi(\pi_{\mathfrak{p}})^{\alpha}$, pour chaque famille $(\alpha_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ d'entiers ℓ-adiques presque tous nuls, nous obtenons le prolongement cherché .

(ii) continuité de l'application obtenue : Si H est un sous-groupe ouvert de G_K , le corps des points fixes qui lui correspond par la théorie de Galois est une ℓ-extension abélienne finie de K ; elle est ramifiée en un nombre fini de places . Par suite , si S est la réunion des places ramifiées et de celles au-dessus de ℓ , nous avons évidemment $\psi(\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}) \subset H$, pour chaque $\mathfrak{p} \in S$. De plus , le quotient G_K/H étant un ℓ-groupe fini , il existe un sous-module ouvert $\mathcal{U}'_{\ell}$ de $\mathcal{U}_{\ell} = \prod_{\mathfrak{l} | \ell} \mathcal{U}_{\mathfrak{l}}$, et , pour chaque place $\mathfrak{p}$, un sous-module ouvert $\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell^{n_{\mathfrak{p}}}\mathbb{Z}_\ell}$ de $\pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}$ dont l'image par ψ est contenue dans H . Le produit $\prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathcal{U}'_{\ell} \cdot \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \pi_{\mathfrak{p}}^{\ell^{n_{\mathfrak{p}}}\mathbb{Z}_\ell}$ est alors un sous-module ouvert de $\mathcal{J}_K$ contenu dans $\overset{-1}{\psi}(H)$; ce qui prouve que ψ est continue .

(iii) noyau : Nous savons déjà que le noyau de ψ est un sous-module fermé de $\mathcal{J}_K$, qui contient l'image de $K^{\times}$. Il contient donc la fermeture de cette image , qui est $\mathcal{R}_K$. Pour voir qu'il n'a pas d'autres éléments , il suffit de remarquer que la construction des idèles généralisés a tué le sous-groupe des normes universelles , dont la structure est bien connue (cf. [AT] , Ch. IX , § 1) , et qui est le noyau dans $J_K/K^{\times}$ de l'application de réciprocité .

Enfin , le lien entre le corps de classes global et le corps de classes local ne pose aucune difficulté particulière puisque, pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K , le $\mathbb{Z}_\ell$-module compact $\mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ s'identifie (algébriquement et topologiquement) avec son image canonique dans le quotient $\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K$. Plus généralement :

<u>LEMME I.1.14.</u>- Si S est un ensemble fini de places de K , la surjection naturelle $\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{\times} \longrightarrow \left(\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} \mathcal{R}_{\mathfrak{p}}^{\times}\right) \mathcal{R}_K/\mathcal{R}_K \subset \mathcal{C}_K$

est un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell$-modules compacts (*) .

Démonstration : Puisqu'un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini est d'une façon et d'une seule un $\mathbb{Z}_\ell$-module topologique , il suffit de vérifier l'injectivité, c'est-à-dire le fait que $\mathcal{R}_K$ rencontre trivialement chaque somme finie $\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} \mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$. Or cela résulte directement du fait que l'unité est le seul élément de hauteur infinie dans $\mathcal{R}$. En effet , si $\mathfrak{x} = (x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ est un idèle principal contenu dans une somme finie $\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} \mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$, les conditions $x_\mathfrak{p} = 1$ pour $\mathfrak{p} \in S$, montrent que $\mathfrak{x}$, qui est puissance ℓ^k-ième locale en dehors de S , pour tout k , est puissance ℓ^k-ième globale pour tout k (cf. [AT] , Ch. IX , § 1 , th. 1) , i.e. de hauteur infinie dans $\mathcal{R}_K$.

Remarques .- (i) L'application de réciprocité globale établit un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell$-modules topologiques du ℓ-groupe $\mathcal{C}_K$ des idèles de K sur le groupe de Galois G_K de la ℓ-extension abélienne maximale de K . Elle met ainsi en bijection les sous-modules fermés de $\mathcal{J}_K$ qui contiennent $\mathcal{R}_K$ avec les ℓ-extensions abéliennes de K , chaque sous-extension de K^{ab} étant le corps des points fixes d'un unique sous-module fermé de $\mathcal{J}_K$ contenant $\mathcal{R}_K$.

(ii) Dans la correspondance obtenue , les ℓ-extensions abéliennes finies de K sont associées aux sous-modules fermés d'indice fini de $\mathcal{J}_K$ contenant $\mathcal{R}_K$, c'est-à-dire aux sous-modules ouverts de $\mathcal{J}_K$ qui contiennent $\mathcal{R}_K$. Ces sous-modules sont donc caractérisés comme groupes de normes attachés aux ℓ-extensions finies de K :

SCOLIE I.1.15.- Si L est une ℓ-extension finie quelconque de K , le sous-module ouvert de $\mathcal{C}_K$ associé par le corps de classes global à la sous-extension maximale L^{ab} de L qui est abélienne sur K est l'image de $\mathcal{C}_L$ par la norme arithmétique :

$$\mathrm{Gal}(L^{ab}/K) \simeq \mathcal{C}_K / \mathcal{N}_{L/K}(\mathcal{C}_L) = \mathcal{J}_K / \mathcal{N}_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K .$$

(*) Ce résultat n'est pas vrai dans la théorie classique du corps de classes , puisque l'application $\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} K_\mathfrak{p}^\times \longrightarrow \left(\bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} K_\mathfrak{p}^\times\right) K^\times / K^\times \subset J_K / K^\times$ n'est pas un homéomorphisme pour les topologies habituelles de ces deux groupes , dès que S contient plus d'une place .

Dans cette description, les sous-groupes de décomposition et d'inertie d'une place $\mathfrak{p}$ dans l'extension abélienne L^{ab}/K sont donnés par les isomorphismes :

$$D_{\mathfrak{p}}(L^{ab}/K) \simeq \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}/\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times} \cap \mathcal{N}_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K \quad \& \quad I_{\mathfrak{p}}(L^{ab}/K) \simeq \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}/\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \cap \mathcal{N}_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K$$

Remarque.- Lorsque L est une extension abélienne de K, les groupes de décomposition et d'inertie d'une place $\mathfrak{p}$ dans L/K s'identifient respectivement aux groupes de Galois et d'inertie de l'extension abélienne locale $L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$. La correspondance entre le corps de classes local et le corps de classes global se traduit alors par les identités :

$$\mathcal{N}_{L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{K}^{\times}(L_{\mathfrak{p}})) = \mathcal{K}^{\times}(K_{\mathfrak{p}}) \cap \mathcal{N}_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K$$

$$\& \qquad \mathcal{N}_{L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{U}(L_{\mathfrak{p}})) = \mathcal{U}(K_{\mathfrak{p}}) \cap \mathcal{N}_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K .$$

Dans le cas général, en revanche, il n'en est pas de même : Si L est une ℓ-extension quelconque de K, l'extension galoisienne locale qui lui correspond est l'intersection $L_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{P}}$ des complétés de L pour les places au-dessus de $\mathfrak{p}$ (pris dans une même clôture algébrique de $K_{\mathfrak{p}}$). D'après le corps de classes local, le groupe de Galois $D_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K) = \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{p}}^{ab}/K_{\mathfrak{p}})$ de la sous-extension abélienne $L_{\mathfrak{p}}^{ab}$ de $L_{\mathfrak{p}}$ est donné par l'isomorphisme :

$$D_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K) = \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{p}}^{ab}/K) \simeq \mathcal{K}^{\times}(K_{\mathfrak{p}})/\,\mathcal{N}_{L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{K}^{\times}(L_{\mathfrak{p}}))$$

$$= \mathcal{K}^{\times}(K_{\mathfrak{p}}) \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathcal{N}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{K}^{\times}(L_{\mathfrak{P}})) .$$

Mais il peut arriver que l'on ait $D_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K) \neq D_{\mathfrak{p}}(L^{ab}/K)$, puisque l'extension abélienne locale $L_{\mathfrak{p}}^{ab}$ peut contenir strictement la localisée de l'extension abélienne globale L^{ab}.

b.- <u>Description des ℓ-extensions abéliennes fondamentales d'un corps de nombres</u>.

Nous définissons ici quelques unes des principales ℓ-extensions abéliennes d'un corps de nombres étudiées dans cette thèse. Elles sont définies le plus souvent sous une condition maximale de plongement, de décomposition ou de ramification. Précisons d'abord ce que nous entendons par là :

DÉFINITION I.1.16.- Etant donnés deux ensembles finis (disjoints) S et T de places d'un corps de nombres, nous disons qu'une extension L de K est T-ramifiée et S-décomposée lorsqu'elle est non ramifiée aux places (finies) étrangères à T , et complètement décomposée aux places de S ; autrement dit, lorsque pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K et chaque place $\mathfrak{P}$ de L au-dessus de $\mathfrak{p}$, l'extension locale $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ est non ramifiée si $\mathfrak{p}$ n'appartient pas à T , et triviale si $\mathfrak{p}$ appartient à S .

Convention : Lorsque $\mathfrak{p}$ est une place réelle, le groupe multiplicatif $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ est égal à $\mathbb{Z}_{\ell}/2\mathbb{Z}_{\ell}$, et son sous-groupe des unités $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ est trivial d'après la définition 2 . La place $\mathfrak{p}$ peut donc se *décomposer* dans une ℓ-extension (abélienne) de K , mais non se *ramifier* , sans contredire le théorème 11 . Lorsqu'une place réelle n'est pas complètement décomposée dans une ℓ-extension de K , nous disons qu'elle se *complexifie*. Nous parlons donc de *complexification* là où d'autres auteurs parlent de *ramification à l'infini* , et nous réservons le concept de ramification aux seules places finies . En particulier , une extension est S-ramifiée dès qu'elle est non ramifiée aux places finies (= ultramétriques) n'appartenant pas à S , quel que soit le comportement des places à l'infini (= archimédiennes) .

EXEMPLE I.1.17.- (Extension ℓ-ramifiée maximale M) - Nous disons qu'une ℓ-extension abélienne d'un corps de nombres K est ℓ-ramifiée , lorsqu'elle est non ramifiée aux places (finies) étrangères à ℓ .

D'après la théorie du corps de classes , le groupe de normes associé à la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale M d'un corps K est l'image dans $\mathcal{C}_K$ du produit

$$\mathcal{J}_K^M = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell\infty} \mu_{\mathfrak{p}}$$

des groupes d'unités locales attachés aux places étrangères à ℓ . Le groupe de Galois Gal(M/K) s'identifie par conséquent au quotient :

$$\mathrm{Gal}(M/K) \simeq \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K \prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}} .$$

C'est un $\mathbb{Z}_{\ell}$-module noethérien et infini .

EXEMPLE I.1.18.- (Extension hilbertienne maximale H) - Nous disons qu'une ℓ-extension abélienne d'un corps de nombres K est hilbertienne , lorsque chacune de ses sous-extensions cycliques peut se plonger dans une ℓ-extension cyclique de degré arbitrairement grand .

D'après Artin-Tate (cf. [AT], Ch. X , § 2 , th. 6) , le groupe de normes associé à la ℓ-extension hilbertienne maximale H d'un corps K est l'image dans $\mathcal{C}_K$ du produit

$$\mathcal{J}_K^H = \prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}}$$

des ℓ-groupes de racines de l'unité des complétés non complexes de K. L'inclusion $\mathcal{J}_K^M \subset \mathcal{J}_K^H$ montre que H est contenue dans M . Plus précisément , M est une ℓ-extension abélienne finie de H , de groupe de Galois :

$$\mathrm{Gal}(M/H) \simeq \prod_{\mathfrak{p} | \ell\infty} \mu_{\mathfrak{p}} / \Big(\prod_{\mathfrak{p} | \ell\infty} \mu_{\mathfrak{p}} \cap \mathcal{R}_K \Big) = \prod_{\mathfrak{p} | \ell\infty} \mu_{\mathfrak{p}} / \mu \quad .$$

<u>EXEMPLE I.1.19</u>.- (Corps de classes de valeurs absolues N) - Nous disons qu'une ℓ-extension abélienne d'un corps de nombres K est un corps de classes de valeurs absolues , lorsqu'elle est fixée par le noyau

$$\mathcal{J}_K^* = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \cdot \prod_{\mathfrak{p} | \ell} \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^*$$

dans $\mathcal{J}_K$ des valeurs absolues ℓ-adiques . Comme $\mathcal{J}_K^*$ est un sous-module compact de $\mathcal{J}_K$, son image $\mathcal{C}_K^*$ dans $\mathcal{C}_K$ est le groupe des normes associé à la ℓ-extension abélienne maximale N de K qui est fixée par $\mathcal{J}_K^*$. Nous disons que N est le ℓ-corps des classes de valeurs absolues de K . Son groupe de Galois

$$\mathrm{Gal}(N/K) \simeq \mathcal{J}_K / \mathcal{J}_K^* \mathcal{R}_K \simeq \mathrm{v.a.}(\mathcal{J}_K)/\mathrm{v.a.}(\mathcal{R}_K)$$

s'identifie, en effet, au quotient du groupe $\mathrm{v.a.}(\mathcal{J}_K) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Pl_K} |\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^\times|_{\mathfrak{p}}$ des valeurs absolues sur K par le sous-groupe $\mathrm{v.a.}(\mathcal{R}_K)$ des valeurs absolues des éléments de $\mathcal{R}_K$. C'est un $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien et infini .

<u>EXEMPLE I.1.20</u>.- (Extension non ramifiée maximale C) - D'après la définition 16, une ℓ-extension abélienne d'un corps de nombres est non ramifiée lorsqu'elle est non ramifiée aux places finies . Le groupe de normes associé à la ℓ-extension abélienne maximale C de K qui est non ramifiée est l'image dans $\mathcal{C}_K$ du groupe $\mathcal{U}_K = \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ des idèles unités .

D'après la proposition 5 , le groupe de Galois Gal(C/K) s'identifie par conséquent au ℓ-groupe fini des classes de diviseurs de K :

$$\mathrm{Gal}(C/K) \simeq \mathcal{D}_K/\mathcal{P}_K = \mathcal{C}\ell_K \,.$$

<u>EXEMPLE I.1.21</u>.- (Extension non ramifiée ℓ-décomposée maximale C') - Nous disons qu'une ℓ-extension abélienne de K est ℓ-décomposée lorsque les places de K au-dessus de ℓ s'y décomposent complètement. Le groupe de normes associé à la ℓ-extension abélienne maximale de K qui est non ramifiée et ℓ-décomposée est donc le produit

$$\mathcal{J}_K^{C'} = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{p} \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\ell} K_\mathfrak{p}^\times \,.$$

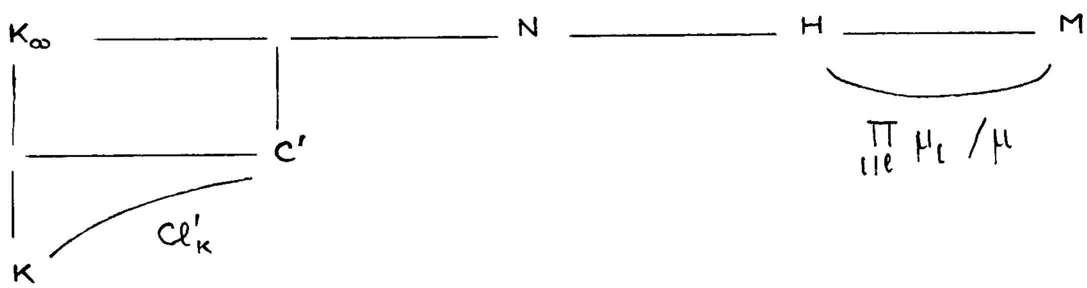
Enfin, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(C'/K)$ s'identifie au quotient $\mathcal{C}\ell'_K = \mathcal{C}\ell_K/\mathcal{C}\ell_K(\ell)$ du ℓ-groupe des classes de diviseurs de K par le sous-groupe engendré par les classes des diviseurs construits sur les places au-dessus de ℓ :

$$\mathrm{Gal}(C'/K) \simeq \mathcal{D}'_K/\mathcal{P}'_K = \mathcal{C}\ell'_K \,.$$

Le groupe $\mathcal{C}\ell'_K$ est le ℓ-groupe des ℓ-classes de diviseurs du corps K.

Les trois extensions M, H, et N contiennent la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique K_∞ de K. En effet, d'un côté H contient par définition la composée Z des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K, et en particulier K_∞ ; il en est donc de même pour M. Et d'un autre côté, nous avons trivialement $N_K \supset N_F$ pour chaque sous-corps F de K donc, en particulier $N = N_K \supset N_\mathbb{Q}$. Maintenant, si ℓ est impair, $N_\mathbb{Q}$ est précisément la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $\mathbb{Q}_\infty$ de $\mathbb{Q}$; et, si ℓ vaut 2, c'est une extension quadratique de $\mathbb{Q}_\infty$ (*).

Lorsque ℓ est impair, nous obtenons ainsi le schéma de corps :



(*) Plus généralement, le corps N s'interprète comme ℓ-corps des ℓ-genres associé à l'extension procyclique K_∞/K.

En revanche , lorsque ℓ vaut 2 , il peut arriver que H ne contienne ni N ni C' lorsque ces deux extensions se complexifient sur K . Pour conserver le même schéma de corps , il faut alors imposer une condition de décomposition à l'infini .

c.- Les conjectures de Leopoldt et de Gross .

Les dimensions respectives (*) des groupes de Galois Gal(M/K), associé à la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de K , et Gal(N/K) , associé au ℓ-corps des classes de valeurs absolues de K , sont gouvernées par les conjectures de Leopoldt et de Gross, ou plutôt par des généralisations convenables de ces conjectures excluant toute hypothèse restrictive sur le corps de base . Leopoldt a, en effet, énoncé sa conjecture sur la non nullité du régulateur ℓ-adique dans le seul cas des corps de nombres totalement réels , et Gross dans celui des extensions quadratiques totalement imaginaires d'un tel corps . Nous donnons ici les deux énoncés (**) valables pour tout corps , que nous continuons par abus à appeler conjectures de Leopoldt et de Gross , l'important étant que le premier énoncé soit bien équivalent à celui de Leopoldt lorsque K est totalement réel , et le second à celui de Gross lorsque K est une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps F totalement réel vérifiant la conjecture de Leopoldt .

THÉORÈME & DÉFINITION I.1.22.- Nous disons qu'un corps de nombres K satisfait la conjecture de Leopoldt, lorsque les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Le groupe de Galois Gal(M/K) de la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de K est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de dimension c_K+1 , où c_K est le nombre de places complexes de K .

(ii) L'image $\mathcal{E}_\ell$ du groupe $\mathcal{E} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E$ des unités généralisées du corps K dans le groupe $\mathcal{U}_\ell = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{l}$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de dimension $r_K + c_K + 1$, où r_K est le nombre de places réelles et c_K le nombre de places complexes de K .

(*) c'est-à-dire les dimensions sur $\mathbb{Q}_\ell$ des espaces vectoriels produits associés : $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell}$ Gal .

(**) Ces deux énoncés sont discutés au chapitre II.1 .

(iii) L'application de semi-localisation $s_\ell = (s_{\mathfrak{l}})_{\mathfrak{l} | \ell}$ induit un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme injectif du groupe $\mathcal{E} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E$ des unités généra - lisées de K dans le produit $\mathcal{U}_\ell = \prod_{\mathfrak{l} | \ell} \mathcal{U}_{\mathfrak{l}} \subset \mathcal{J}$ des groupes d'unités attachés aux places $\mathfrak{l}$ divisant ℓ.

(iv) Le quotient $\prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}} / \mu$ du produit des ℓ-groupes de racines locales de l'unité dans $\mathcal{J}$ par le sous-groupe des racines globales s'injecte canoniquement dans le ℓ-groupe des classes d'idèles $\mathcal{C}$ du corps K.

(v) Pour qu'une unité généralisée $\varepsilon \in \mathcal{E}$ du corps K soit une racine de l'unité, il faut et il suffit qu'elle soit localement partout une racine de l'unité, ce qui s'écrit :

$$\mathcal{E} \cap \prod_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}} = \mathcal{E} \cap \mu .$$

Remarque.- Lorsque le corps K est totalement réel, la condition (i) s'écrit $\dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathrm{Gal}(M/K) = 1$. Elle exprime qu'il n'est d'autre $\mathbb{Z}_\ell$-extension de K que la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique ; et cet énoncé est bien équivalent à celui de Leopoldt.

Démonstration des équivalences :

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : D'après l'exemple 17, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(M/K)$ s'identifie au quotient $\mathcal{J} / \mathcal{R} \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$. Nous obtenons donc un $\mathbb{Z}_\ell$-module de même dimension en remplaçant $\mathcal{J}$ par le sous-module d'indice fini $\mathcal{R} \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ (cf. proposition 5). Il vient alors :

$$\mathcal{R} \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}} / \mathcal{R} \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \simeq \prod_{\mathfrak{l} | \ell} \mathcal{U}_{\mathfrak{l}} / \Big(\prod_{\mathfrak{l} | \ell} \mathcal{U}_{\mathfrak{l}} \cap \mathcal{R} \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \Big) = \mathcal{U}_\ell / s_\ell(\mathcal{E}) = \mathcal{U}_\ell / \mathcal{E}_\ell .$$

Maintenant, $\mathcal{U}_\ell$ a pour dimension le degré $[K : \mathbb{Q}] = r_K + 2 c_K$ de K, et $\mathcal{E}$ le nombre de Dirichlet $r_K + c_K - 1$. Nous obtenons donc, comme annoncé :
$\dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathrm{Gal}(M/K) = c_K + 1 \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{E}_\ell = r_K + c_K - 1 \Leftrightarrow s_\ell |_{\mathcal{E}}$ est injectif.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) : Dans l'identification de $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ avec son image canonique dans $\mathcal{J}$, l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{U}_\ell$ induite par l'homomorphisme de semi-localisation n'est autre que la restriction à $\mathcal{E}$ de la projection canonique de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}_\ell = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{l}$. Il vient donc :

$$s_\ell|_\mathcal{E} \text{ injectif } \Leftrightarrow \mathcal{E} \cap \prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{p} = 1 .$$

Et la condition de droite peut encore s'écrire $\mathcal{E} \cap \prod_\mathfrak{p} \mu_\mathfrak{p} = \mathcal{E} \cap \mu$, puisque le groupe $\prod_{\mathfrak{p}|\ell\infty} \mu_\mathfrak{p}$ est fini .

Bien entendu , si ℓ est impair , cette dernière identité s'écrit tout simplement : $\mathcal{E} \cap \prod_\mathfrak{p} \mu_\mathfrak{p} = \mu$. Cependant , si ℓ vaut 2 , la racine de l'unité (-1) n'est pas une unité dès que K possède des places réelles , de sorte que , dans ce cas , $\mathcal{E} \cap \prod_\mathfrak{p} \mu_\mathfrak{p}$ peut être strictement contenu dans μ . Pour pallier cette difficulté , il est commode de reécrire la condition précédente sous la forme plus générale

$$\mathfrak{R} \cap \prod_\mathfrak{p} \mu_\mathfrak{p} = \mu$$

qui exprime que l'application naturelle du quotient $\prod_\mathfrak{p} \mu_\mathfrak{p}/\mu$ dans le ℓ-groupe $\mathcal{C} = \mathcal{J}/\mathfrak{R}$ des classes d'idèles de K est un monomorphisme .

<u>DÉFINITION I.1.23.</u>- Le noyau Δ_{Leopoldt} de l'application naturelle du groupe $\mathcal{E} \cap \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} E$ des unités généralisées du corps K dans le groupe $\mathcal{U}_\ell = \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{l}$ des unités semi-locales attaché aux places divisant ℓ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension finie . Nous disons que Δ_{Leopoldt} est le groupe de défaut de la conjecture de Leopoldt dans le corps K , et que sa dimension δ_{Leopoldt} est le défaut dans K de cette conjecture.

<u>THÉORÈME & DÉFINITION I.1.24.</u>- Nous disons qu'un corps de nombres K satisfait la conjecture de Gross , lorsque les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Le groupe de Galois Gal(N/K) du ℓ-corps des classes de valeurs absolues de K est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de dimension 1 . Autrement dit , N est une ℓ-extension finie de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K .

(ii) Le noyau $\mathcal{E}'^*$ des applications valeurs absolues $|\ |_\mathfrak{l}$ attachées aux places de K au-dessus de ℓ , restreintes au tensorisé

ℓ-adique $\mathcal{E}' = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'$ du groupe des ℓ-unités de K , est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de dimension $r_K + c_K$, où r_K est le nombre de places réelles , et c_K le nombre de places complexes du corps K .

(iii) L'image $|\mathcal{E}'|_\ell$ du groupe $\mathcal{E}' = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'$ des ℓ-unités généralisées du corps K dans le groupe $\mathcal{V}_\ell = \bigoplus_{I|\ell} |\mathcal{K}_I^\times|_I$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de dimension $g-1$, où g est le nombre de places de K au-dessus de ℓ .

(iv) La famille $|\ |_\ell = (|\ |_I)_{I|\ell}$ des valeurs absolues ℓ-adiques attachées aux places au-dessus de ℓ envoie le groupe $\mathcal{E}' = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'$ des ℓ-unités généralisées de K sur un sous-groupe d'indice fini de la somme directe $\tilde{\mathcal{V}}_\ell = \tilde{\bigoplus}_{I|\ell} |\mathcal{K}_I^\times|_I$ restreinte aux familles $(\sigma_I)_{I|\ell}$ qui vérifient la formule du produit .

(v) La famille $(|\ |_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ des valeurs absolues ℓ-adiques attachées aux places de K envoie le ℓ-groupe $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ des idèles principaux sur un sous-module d'indice fini de la somme directe $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\bigoplus}_\mathfrak{p} |\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times|_\mathfrak{p}$ restreinte aux familles $(\sigma_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ qui vérifient la formule du produit $\prod_\mathfrak{p} \sigma_\mathfrak{p} = 1$.

Remarque.- Si K est une extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps F totalement réel , le groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}(K/F)$ est un groupe d'ordre 2 , engendré par la conjugaison complexe $\bar{\tau}$. Il est alors possible d'écrire tout $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien $\mathcal{X}$ comme somme directe $\mathcal{X}^+ \oplus \mathcal{X}^-$ de ses sous-modules propres pour l'action de $\bar{\tau}$, et ce, de façon exacte si ℓ est impair , à un fini près si ℓ vaut 2 . La conjecture de Leopoldt pour F permet ainsi d'affirmer que l'application de $\mathcal{E}^+$ dans $\tilde{\mathcal{V}}^+$ induite par les valeurs absolues est presque surjective , et la condition (iv) postule alors que le même résultat vaut de $\mathcal{E}'^-$ dans $\tilde{\mathcal{V}}^-$. Compte-tenu de l'égalité des dimensions , ceci revient à dire que la restriction des valeurs absolues $(|\ |_I)_{I|\ell}$ à $\mathcal{E}'^-$ est injective , ce qui est précisément la conjecture de Gross .

Démonstration des équivalences :

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : D'après l'exemple 19 , le groupe de Galois Gal(N/K) s'identifie au quotient $\mathcal{J}/\mathcal{R}\,\mathcal{J}^* = \mathcal{J}/\mathcal{R} \prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathcal{U}_\mathfrak{p} . \prod_{I|\ell} \mathcal{K}_I^*$.

Nous obtenons donc un $\mathbb{Z}_\ell$-module de même dimension en remplaçant $\mathcal{J}$ par le sous-module d'indice fini $\mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell}\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}\cdot\prod_{\mathfrak{l}|\ell}\mathcal{K}_{\mathfrak{l}}^{\times}$. Il vient alors :

$$\mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}\nmid\ell}\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}\prod_{\mathfrak{l}|\ell}\mathcal{K}_{\mathfrak{l}}^{\times}/\mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}|\ell}\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}\prod_{\mathfrak{l}|\ell}\mathcal{K}_{\mathfrak{l}}^{*}\simeq\prod_{\mathfrak{l}|\ell}\mathcal{K}_{\mathfrak{l}}^{\times}/\prod_{\mathfrak{l}|\ell}\mathcal{K}_{\mathfrak{l}}^{*}\Big[\Big(\mathcal{R}.\prod_{\mathfrak{p}|\ell}\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}\Big)\cap\prod_{\mathfrak{l}|\ell}\mathcal{K}_{\mathfrak{l}}^{\times}\Big]$$

$$=\mathcal{K}_{\ell}^{\times}/\mathcal{K}_{\ell}^{*}\mathcal{E}'_{\ell}\simeq\mathcal{V}_{\ell}/|\mathcal{E}'|_{\ell},$$

et $\mathcal{E}'_\ell$ désigne l'image dans $\mathcal{K}_\ell^\times$ du groupe $\mathcal{E}'=\mathbb{Z}_\ell\otimes_{\mathbb{Z}}E'$ des ℓ-unités généralisées, et $|\ |_\ell$ l'application de $\mathcal{K}_\ell^\times$ dans $\mathcal{V}_\ell$ composée des valeurs absolues ℓ-adiques attachées aux places divisant ℓ.

Maintenant, $\mathcal{V}_\ell=|\mathcal{K}_\ell^\times|_\ell$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de dimension g ; l'image $|\mathcal{E}'|_\ell$ de $\mathcal{E}'$ est contenue dans son sous-module $\widetilde{\mathcal{V}}_\ell$ de dimension $g-1$; et $\mathcal{E}'$ lui-même est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de dimension r_K+c_K-1+g. Nous avons donc, comme annoncé :

$\dim_{\mathbb{Z}_\ell}\mathrm{Gal}(N/K)=1\Leftrightarrow\dim_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{E}'^{*}=r_K+c_K\Leftrightarrow\dim_{\mathbb{Z}_\ell}|\mathcal{E}'|_\ell=g-1$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) : L'assertion (iii) affirme que la dimension de $|\mathcal{E}'|_\ell$ est celle, $g-1$, du sous-module noethérien $\widetilde{\mathcal{V}}_\ell$ de $\mathcal{V}_\ell$ formé des familles $(\sigma_{\mathfrak{l}})_{\mathfrak{l}|\ell}$ qui vérifient la formule du produit. D'après la proposition 8, elle exprime donc que $|\mathcal{E}'|_\ell$ est d'indice fini dans $\widetilde{\mathcal{V}}_\ell$, ce qui est l'assertion (iv). Enfin, l'assertion (v) affirme que le même résultat vaut pour $|\mathcal{R}|$ dans $\widetilde{\mathcal{V}}$, ce qui est encore équivalent, puisque le quotient $\mathcal{V}/|\mathcal{R}|\mathcal{V}_\ell\simeq\mathcal{J}/\mathcal{R}\prod_{\mathfrak{p}|\ell}\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}\prod_{\mathfrak{l}|\ell}\mathcal{K}_{\mathfrak{l}}^{\times}$ est fini, qui s'identifie par l'isomorphisme du corps de classes au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathcal{C}'/K)$ de la ℓ-extension abélienne non ramifiée ℓ-décomposée maximale de K.

<u>DÉFINITION I.1.25.</u>- Le noyau $\Delta_{Gross}=\widetilde{\mathcal{V}}_\ell/\sqrt{|\mathcal{E}'|_\ell}$ du sous-groupe $\widetilde{\mathcal{V}}_\ell$ de la somme directe $\bigoplus_{\mathfrak{l}|\ell}|\mathcal{K}_{\mathfrak{l}}^\times|_{\mathfrak{l}}$ formé des familles $(\sigma_{\mathfrak{l}})_{\mathfrak{l}|\ell}$ qui vérifient la formule du produit, par le radical $\sqrt{|\mathcal{E}'|_\ell}$ de l'image du groupe $\mathcal{E}'_\ell$ des unités ℓ-unités généralisées du corps K, est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension finie. Nous disons que Δ_{Gross} est le groupe de défaut de la conjecture de Gross dans K, et que sa dimension δ_{Gross} est le défaut dans K de cette conjecture.