CHAPITRE III

LA FORMULE DES CLASSES AMBIGES ET SES GÉNÉRALISATIONS

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES GENRES

SOMMAIRE

1.- LA FORMULE DES CLASSES AMBIGES ET SES GÉNÉRALISATIONS.

2.- ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES GENRES.

LA FORMULE DES CLASSES AMBIGES ET SES GÉNÉRALISATIONS

Les calculs de classes invariantes remontent aux débuts mêmes de la théorie du corps de classes, et plus précisément aux travaux essentiels de Takagi sur cette question (cf., par exemple [Tk]). Toutefois, ils n'y apparaissent d'abord que comme une étape technique dans la démonstration des inégalités fondamentales de la théorie. Aussi, n'est-ce que dans la thèse de Chevalley, parue en 1933, que furent présentées pour la première fois l'ensemble des suites exactes qui conduisent à la formule des classes ambiges que nous connaissons aujourd'hui (cf. [Ch], p. 402-405), l'utilisation du tout récent théorème de Herbrand sur les unités (cf. [He_1]) ayant permis de passer du cas cyclique d'ordre premier au cas cyclique général. En fait, les idées essentielles de ce calcul se trouvaient déjà dans le Zahlbericht de Hilbert, qui les met en oeuvre dans la démonstration de son théorème 94 sur lequel nous reviendrons plus loin. Le fait qu'elles aient été si souvent redécouvertes depuis, jusque dans les périodes les plus récentes, à l'occasion de différents problèmes, tient sans aucun doute à la qualité des informations sur le comportement des groupes de classes d'idéaux que la suite exacte des classes ambiges apporte directement.

En 1956, Iwasawa, dans une courte note sur les unités (cf. [Iw_1]) donna une interprétation cohomologique de plusieurs morphismes intervenant dans la démonstration de Chevalley, permettant ainsi d'en produire une démonstration valable pour toute extension galoisienne, et non plus seulement dans le cas cyclique. C'est ce point de vue que nous adoptons ici, dans le cadre plus général des groupes de S-classes de diviseurs.

1.- LA FORMULE DE CHEVALLEY POUR LES GROUPES DE S- CLASSES DE DIVISEURS .

a.- Présentation du groupe des S-classes de diviseurs d'un corps de nombres .

A chaque place $\mathfrak{p}$ d'un corps de nombres est associée canoniquement une valuation $v_{\mathfrak{p}}$ qu'on peut définir comme suit :

– Pour une place ultramétrique , correspondant à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de l'anneau des entiers de K , la $\mathfrak{p}$-valuation $v_{\mathfrak{p}}(x)$ d'un élément x de $K^{\times}$ est l'exposant de $\mathfrak{p}$ dans la décomposition primaire de l'idéal principal engendré par cet élément. L'ensemble des valeurs de la valuation $v_{\mathfrak{p}}$ est donc le groupe $\mathbb{Z}$.

– Pour une place archimédienne , il y a lieu de distinguer deux cas : Si $\mathfrak{p}$ est réelle, la $\mathfrak{p}$-valuation d'un élément x de $K^{\times}$ est déterminée par son signe $sg_{\mathfrak{p}}(x)$ dans le complété $K_{\mathfrak{p}} \simeq \mathbb{R}$, i.e. $v_{\mathfrak{p}}(x) = 0$ si $x > 0$ dans $K_{\mathfrak{p}}$, et $v_{\mathfrak{p}}(x) = 1$ si $x < 0$ dans $K_{\mathfrak{p}}$; l'application $v_{\mathfrak{p}}$ prend alors ses valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $\mathfrak{p}$ est complexe, $v_{\mathfrak{p}}$ est la valuation triviale .

DÉFINITION III.1.1.- Par groupe des diviseurs d'un corps de nombres K , nous entendons le groupe abélien libre D_K engendré par les valuations attachées aux places de K . Le groupe D_K s'identifie à la somme directe du groupe Id_K des idéaux fractionnaires de K et du produit de r_K copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où r_K est le nombre de places réelles de K .

Cela posé , si l'on identifie le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ au groupe multiplicatif $\{-1 , +1\}$, l'application de $K^{\times}$ dans le groupe des diviseurs D_K , donnée par les valuations , prend la forme :

$$x \mapsto (x) = (x\mathcal{O}_K , \operatorname{sgn}(x)) ,$$

où $x\mathcal{O}_K$ est l'idéal principal engendré par x , et sgn (x) la signature de x , i.e. le r_K-uplet des signes de ses plongements réels . Nous disons que (x) est le diviseur principal engendré par l'élément x . Comme il existe dans $K^{\times}$ des éléments de toutes signatures (cf, par exemple , [Ch]), chaque classe du quotient $\mathcal{C}\ell_K = D_K/P_K$ du groupe des diviseurs D_K

par le sous-groupe P_K des diviseurs principaux peut être représentée par un idéal , et il existe donc un isomorphisme naturel

$$\mathcal{C}\ell_K \simeq Id_K / Pr_K^+$$

du groupe $\mathcal{C}\ell_K$ sur le quotient Id_K / Pr_K^+ du groupe des idéaux de K par le sous-groupe formé des idéaux principaux engendré par les éléments de $K^\times$ de signature unité . Autrement dit :

<u>PROPOSITION III.1.2</u>.- Le quotient $\mathcal{C}\ell_K = D_K / P_K$ du groupe des diviseurs du corps K par le sous-groupe des diviseurs principaux est un groupe fini , appelé groupe des classes de diviseurs , qui s'identifie au groupe des classes d'idéaux au sens restreint, c'est-à-dire au quotient Id_K / Pr_K^+ du groupe des idéaux de K par le sous-groupe des idéaux principaux engendrés par les éléments de $K^\times$ totalement positifs (i.e. de signature unité) . Son ordre diffère donc de celui du groupe des classes d'idéaux au sens ordinaire d'un facteur 2-primaire, égal à l'indice dans $\{-1 , +1\}^{r_K}$ de la signature $sgn(E_K^{ord})$ du groupe des unités au sens ordinaire de K .

Ce dernier point résulte directement du diagramme commutatif exact , où nous avons repéré par un + , le noyau de la signature :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & E_K \arrow[r] \arrow[d] & K^{\times +} \arrow[r] \arrow[d] & Pr_K^+ \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & E_K^{ord} \arrow[r] \arrow[d] & K^\times \arrow[r] \arrow[d] & Pr_K \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & sgn(E_K) \arrow[r] \arrow[d] & \{-1,+1\}^{r_K} \arrow[r] \arrow[d] & Pr_K / Pr_K^+ \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

<u>Convention</u> .- Dans tout ce qui suit, nous appelons groupe des unités du corps K, et nous notons E_K, le groupe

$$E_K = \{x \in K^\times \mid v_{\mathfrak{p}}(x) = 0\ ,\ \forall\, \mathfrak{p} \in Pl_K\}\ ,$$

c'est-à-dire le noyau de la surjection canonique de $K^\times$ dans P_K. Nous appelons groupe des unités au sens ordinaire, et nous notons E_K^{ord} le noyau de la surjection canonique de $K^\times$ dans Pr_K. Les unités de K (au sens des diviseurs) sont donc les unités au sens ordinaire (i.e. au sens des idéaux) qui sont totalement positives (i.e. de signature unité).

Bien entendu, lorsqu'on s'intéresse exclusivement au ℓ-Sylow du groupe des classes, pour un nombre premier ℓ, la distinction entre classes d'idéaux ou de diviseurs (i.e. entre classes au sens ordinaire ou au sens restreint) ne se pose que pour $\ell = 2$. Dans ce cas, il n'est pas indifférent de raisonner sur l'un ou l'autre groupe dès que la signature des unités (au sens ordinaire) n'épuise pas le groupe $\{-1,+1\}^{r_K}$. Nous allons voir que le point de vue des classes de diviseurs est préférable car plus fin :

<u>DÉFINITION III.1.3</u>.- Etant donné un ensemble fini S de places non complexes de K, nous appelons groupe des S-classes de diviseurs du corps K, et nous notons $\mathcal{Cl}_K^S$, le quotient $\mathcal{Cl}_K/\mathcal{Cl}_K(S)$ du groupe des classes de diviseurs de K par le sous-groupe de $\mathcal{Cl}_K$ engendré par les classes des places de K appartenant à S.

Lorsque l'ensemble S contient les places réelles de K, le groupe $\mathcal{Cl}_K^S$ s'identifie au groupe des S°-classes d'idéaux du corps K, i.e. au groupe des classes d'idéaux du localisé en-dehors de S^* de l'anneau des entiers de K, où S° est l'ensemble des places finies contenues dans S. En particulier, le groupe $\mathcal{Cl}_K^S$ s'identifie au groupe des classes d'idéaux au sens ordinaire lorsque S est exactement l'ensemble des places réelles de K.

Du point de vue de la théorie du corps de classes, le groupe $\mathcal{Cl}_K$ des classes de diviseurs du corps K correspond au groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de ce corps, qui est non ramifiée aux places finies (= ultramétriques). Son quotient $\mathcal{Cl}_K^S$

correspond ainsi au groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de K , qui est non ramifiée aux places finies et complètement décompo - sée aux places de S . En particulier , si S est l'ensemble des places réelles de K , le groupe $\mathcal{C}\ell_K^S$ (qui s'identifie alors au groupe des classes d'idéaux au sens ordinaire) correspond au groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de K qui est non ramifiée et décomposée à l'infini (i.e. non ramifiée aux places finies et non complexifiée aux places réelles) .

Cela dit, pour étudier les quotients $\mathcal{C}\ell_K^S$, il est commode d'introduire les deux groupes :

- le groupe des S-diviseurs $D_K^S = D_K/D_K(S)$, quotient du groupe des diviseurs par le sous-groupe $D_K(S)$ engendré par les places de S ;
- le groupe des S-diviseurs principaux $P_K^S = P_K D_K(S)/D_K(S)$ image canonique de P_K dans D_K^S .

Enfin, conformément aux conventions précédentes , nous no - tons E_K^S le groupe des S-unités de K :

$$E_K^S = \{x \in K^\times \mid v_\mathfrak{p}(x) = 0\ ,\ \forall\, \mathfrak{p} \notin S\}\ .$$

Nous obtenons alors les deux suites exactes canoniques (qui sont le point de départ de la démonstration de la formule des classes ambiges) :

$$\text{(a)} \qquad 1 \longrightarrow P_K^S \longrightarrow D_K^S \longrightarrow \mathcal{C}\ell_K^S \longrightarrow 1$$

$$\text{(b)} \qquad 1 \longrightarrow E_K^S \longrightarrow K^\times \longrightarrow P_K^S \longrightarrow 1\ .$$

b.- Démonstration de la formule des classes ambiges .

Une extension finie L/K de corps de nombres étant donnée , le prolongement des valeurs absolues définit un morphisme naturel du groupe des diviseurs D_K vers le groupe D_L , qui envoie le sous - groupe principal P_K sur celui P_L de D_L : Dans la décomposition ca - nonique $D = Id \oplus \{-1,+1\}^{r_K}$ du groupe des diviseurs , la restriction de cet homomorphisme au groupe Id correspond à l'extension des idéaux :

$$\mathfrak{a}_K \longrightarrow \mathfrak{a}_K \mathcal{O}_L \ ;$$

c'est pourquoi nous l'appelons homomorphisme d'extension , et nous le notons $d_{L/K}$. Contrairement à sa restriction aux idéaux , il n'est pas injectif dès lors qu'une au moins des places réelles de K se complexifie dans L . Si, maintenant, S_K est un ensemble fini de places non complexes de K , et S_L l'ensemble des places non complexes de L au-dessus des précédentes, l'homomorphisme d'extension envoie D_K^S dans D_L^S et P_K^S dans P_L^S , d'où , par passage au quotient , $C\ell_K^S$ dans $C\ell_L^S$. Nous notons $j_{L/K}^S$ cette dernière application , et $\mathrm{Cap}_{L/K}^S$ son noyau , qui représente donc la S-capitulation dans l'extension L/K .

Lorsque, de plus, l'extension L/K est galoisienne, de groupe de Galois G , l'homomorphisme d'extension $j_{L/K}^S$ envoie le groupe des S-classes de diviseurs de K dans le sous-groupe ambige $C\ell_L^{SG}$ de celui de L ; et le problème se pose d'évaluer l'indice correspondant $(C\ell_L^{SG} : j_{L/K}^S(C\ell_K^S))$, ainsi que l'ordre $|\mathrm{Cap}_{L/K}^S|$ de la S-capitulation . Nous avons besoin pour cela d'un résultat préliminaire :

<u>LEMME III.1.4.</u>- Dans une extension galoisienne L/K de corps de nombres, on a les isomorphismes, où G désigne le groupe Gal(L/K) :

(i) $P_L^{SG} / d_{L/K}^S(P_K^S) \simeq H^1(G, E_L^S)$.

(ii) $H^1(G, P_L^S) \simeq \mathrm{Ker}\,[H^2(G,E_L^S) \longrightarrow H^2(G, L^\times)]$.

(iii) $H^1(G, D_L^S) = 1$.

Démonstration : Partons de la suite exacte (b) appliquée au groupe P_L^S , et formons la suite exacte de cohomologie correspondante :

$$1 \to E_L^{SG} \to K^\times \to P_L^{SG} \to H^1(G,E_L^S) \to H^1(G,L^\times) \to H^1(G,P_L^S) \to H^2(G,E_L^S) \to H^2(G,L^\times) .$$

Le groupe $H^1(G,L^\times)$ étant nul , en vertu du théorème 90 de Hilbert généralisé (cf. [CF] , ch. V , § 27) , nous obtenons les deux premiers isomorphismes :

$$P_L^{SG}/d_{L/K}(P_K^S) \simeq H^1(G,E_L^S)$$

& $$H^1(G,P_L^S) \simeq \mathrm{Ker}\,[H^2(G,E_L^S) \longrightarrow H^2(G,L^\times)] .$$

Pour établir le troisième, remarquons que si $\mathfrak{p}_L$ est une place non complexe de L et $G_{\mathfrak{p}_L}$ son groupe de décomposition dans L/K , le groupe de cohomologie $H^1(G_{\mathfrak{p}_L}, D(\mathfrak{p}_L)) = \mathrm{Hom}(G_{\mathfrak{p}}, D(\mathfrak{p}_L))$ est nul en toutes hypothèses :

- si $\mathfrak{p}_L$ est ultramétrique, le groupe $D(\mathfrak{p}_L)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et $H^1(G_{\mathfrak{p}_L}, D(\mathfrak{p}_L))$ est donc trivial, puisque le groupe $G_{\mathfrak{p}_L}$ est fini.

- si $\mathfrak{p}_L$ est réelle, la place $\mathfrak{p}_L$ est complètement décomposée dans l'extension L/K, et $H^1(G_{\mathfrak{p}_L}, D(\mathfrak{p}_L)$ est encore trivial, puisque le groupe $G_{\mathfrak{p}_L}$ l'est.

Par le lemme de Shapiro (cf. [CF], Ch. IV, § 4), il vient donc $H^1(G, \bigoplus_{\mathfrak{p}_L | \mathfrak{p}_K} D(\mathfrak{p}_L)) = H^1(G_{\mathfrak{p}_L}, D(\mathfrak{p}_L)) = 1$, dès que la place $\mathfrak{p}_K$ n'a pas de prolongement complexe dans L ; ce qui achève la démonstration.

Considérons maintenant la suite exacte (a) pour le corps L. La suite exacte de cohomologie associée

$$1 \longrightarrow P_L^{SG} \longrightarrow D_L^{SG} \longrightarrow \mathcal{C}\ell_L^{SG} \longrightarrow H^1(G, P_L^S) \longrightarrow H^1(G, D_L^S)$$

s'arrête, en vertu de l'assertion (iii) du lemme. En la comparant à la suite exacte (a) écrite pour le corps K

$$1 \longrightarrow P_K^S \longrightarrow D_K^S \longrightarrow \mathcal{C}\ell_K^S \longrightarrow 1$$

à l'aide des homomorphismes d'extension, nous pouvons donc former le diagramme commutatif exact :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & P_K^S \arrow[r] \arrow[d] & D_K^S \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}\ell_K^S \arrow[r] \arrow[d] & 1 & \\
1 \arrow[r] & P_L^{SG} \arrow[r] & D_L^{SG} \arrow[r] & \mathcal{C}\ell_K^{SG} \arrow[r] & H^1(G, P_L^S) \arrow[r] & 1 .
\end{tikzcd}$$

Par le lemme du serpent, et compte-tenu des isomorphismes donnés par le lemme 4, nous obtenons la suite exacte annoncée :

<u>THÉORÈME III.1.5.</u>- (Suite exacte des classes ambiges) - Dans une extension galoisienne L/K de corps de nombres, de groupe de Galois G, noyau et conoyau de l'homomorphisme d'extension $j_{L/K}^S$ du groupe $\mathcal{C}\ell_K^S$ des S-classes de diviseurs de K, dans le sous-groupe ambige $\mathcal{C}\ell_L^{SG}$ de delui de L, sont liés par la suite exacte longue :

$$1 \to E_L^{SG}/E_K^S \to \mathrm{Ker}\, d_{L/K}^S \to \mathrm{Ker}\, j_{L/K}^S \to H^1(G, E_L^S) \to \mathrm{Coker}\, d_{L/K}^S \to \mathrm{Coker}\, j_{L/K}^S$$
$$\to H^2(G, E_L^S) \to H^2(G, L^\times) .$$

<u>SCOLIE III.1.6</u>.- Dans la suite exacte des classes ambiges , le noyau Ker $d^S_{L/K}$ de l'extension des diviseurs mesure la S-complexification (i.e. la complexification dans L/K des places (réelles) n'appartenant pas à S) et le conoyau Coker $d^S_{L/K}$ la S-ramification (i.e. la ramification dans L/K des places (finies) n'appartenant pas à S) . Plus précisément , il vient :

$$|\mathrm{Ker}\ d^S_{L/K}| = \prod_{\mathfrak{p}\notin S;\ \mathfrak{p}|\infty} d_{\mathfrak{p}}(L/K) \quad \& \quad |\mathrm{Coker}\ d^S_{L/K}| = \prod_{\mathfrak{p}\notin S} e_{\mathfrak{p}}(L/K) ,$$

si , pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K , $d_{\mathfrak{p}}(L/K)$ désigne le degré de l'une quelconque des extensions locales $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$, et $e_{\mathfrak{p}}(L/K)$ son indice de ramification .

Démonstration : L'extension des idéaux étant injective , le noyau de $d^S_{L/K}$ est formé des seuls diviseurs de K construits sur les places réelles n'appartenant pas à S qui se complexifient dans L/K ; d'où la première formule. Pour établir la seconde, associons à chaque place $\mathfrak{p}_K$ de K , qui n'appartient pas à S , et dont les prolongements à L sont non complexes , le produit $\mathfrak{P}_L = \prod_{\mathfrak{p}_L | \mathfrak{p}_K} \mathfrak{p}_L$ des places de L qui sont au-dessus . Le groupe étendu $d^S_{L/K}(D^S_K)$ est engendré par les diviseurs de la forme $\mathfrak{P}_L^{e_{\mathfrak{p}}(L/K)}$, et le groupe ambige D_L^{SG} par les $\mathfrak{P}_L$; d'où la seconde formule .

<u>COROLLAIRE III.1.7</u>.- Soient L/K une extension galoisienne de corps de nombres , de groupe G , et S un ensemble fini de places .

(i) Si L/K est S-ramifiée (i.e. non ramifiée en-dehors de S) , le noyau de l'homomorphisme $j^S_{L/K}$, du groupe $\mathcal{C}\ell^S_K$ des S-classes de diviseurs de K dans le sous-groupe ambige $\mathcal{C}\ell_L^{SG}$ de celui de L , contient le groupe $H^1(G, E^S_L)$; et son conoyau est un sous-groupe de $H^2(G, E^S_L)$.

(ii) En particulier si L/K est simultanément S-ramifiée et S-complexifiée (i.e. non ramifié aux places finies en-dehors de S , et non complexifiée aux places réelles en-dehors de S) , le groupe $H^1(G, E^S_L)$ mesure exactement la S-capitulation :

$$\mathrm{Cap}^S_{L/K} = \mathrm{Ker}\ j^S_{L/K} \simeq H^1(G, E^S_L) .$$

Ce dernier résultat est l'une des informations les plus fortes que nous possédions sur la S-capitulation. Cela dit, le groupe de cohomologie $H^1(G, E_L^S)$ est, en général, très mal connu. C'est, par exemple un problème ouvert que de décider si son ordre est au moins égal au degré de l'extension L/K lorsque celle-ci est non ramifiée partout et complètement décomposée aux places de S comme aux places réelles. Dans le cas cyclique, la réponse est affirmative, ce qui généralise le théorème 94 de Hilbert (cf. proposition 10, ci-dessous). A l'opposé, si L est l'extension abélienne maximale de K qui est non ramifiée et S-décomposée, une généralisation facile du théorème d'Artin-Fürtwangler (cf. [Fu]) permet d'affirmer que les S-classes de diviseurs de K capitulent dans L ; autrement dit que l'on a alors exactement :

$$|H^1(G, E_L^S)| = |Cap_{L/K}^S| = |\mathcal{C}\ell_K^S| = [L:K] .$$

c.- <u>Analyse de la formule dans le cas cyclique</u> .

Supposons maintenant que L/K soit une extension cyclique ; notons g un générateur de son groupe de Galois G, et $\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{[L:K]} g^i$ l'opérateur norme. Dans ce cas, le groupe de cohomologie $H^2(G, L^\times)$ n'est autre que le quotient $K^\times / \mathcal{N}(L^\times)$, et la suite exacte des S-classes ambiges prend la forme :

$$1 \to E_L^{SG}/E_K^S \to \mathrm{Ker}\, d_{L/K}^S \to \mathrm{Ker}\, j_{L/K}^S \to H^1(G, E_L^S) \to \mathrm{Coker}\, d_{L/K}^S \to \mathrm{Coker}\, j_{L/K}^S$$
$$\to H^2(G, E_L^S) \to E_L^{SG}/E_L^{SG} \cap \mathcal{N}(L^\times) \to 1.$$

Dans celle-ci, nous pouvons encore remplacer $E_L^{SG} \cap \mathcal{N}(L^\times)$ par $E_K^S \cap \mathcal{N}(L^\times)$. En effet, si le groupe E_K^S des S-unités de K est, en général, contenu strictement dans le sous-groupe invariant E_L^{SG} de E_L^S (tout simplement parce que la condition de positivité aux places réelles non contenues dans S, qui est requise dans K, n'existe pas dans L s'il y a complexification), cette distinction n'intervient pas lorsqu'on travaille sur des normes : Si $\mathfrak{p}$ est une place réelle de K qui se complexifie dans L, l'identité $\mathcal{N}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{C}^\times) = \mathbb{R}_+^\times$ montre que les normes locales en $\mathfrak{p}$ (et donc, a fortiori, en normes globales) sont positives dans $K_\mathfrak{p}$. Il vient donc :

$$\frac{|\mathcal{C}\ell_L^{SG}|}{|\mathcal{C}\ell_K^{S}|} = \frac{|\mathrm{Coker}\ j_{L/K}^S|}{|\mathrm{Ker}\ j_{L/K}^S|} = \frac{|\mathrm{Coker}\ d_{L/K}^S|}{|\mathrm{Ker}\ d_{L/K}^S|} \ \frac{(E_L^{SG} : E_K^S)}{(E_L^{SG} : E_K^S \cap \mathcal{N}(L^\times))} \ \frac{|H^2(G, E_L^S)|}{|H^1(G, E_L^S)|}$$

Dans cette formule, les ordres du noyau et du conoyau de l'application $d_{L/K}^S$ sont donnés par la proposition 6 , et l'indice normique $(E_K^S : E_K^S \cap \mathcal{N}(L^\times))$ peut se calculer à l'aide des symboles de Hasse , comme expliqué plus loin dans la section 2 . Venons en donc au quotient de Herbrand :

$$q(G, E_L^S) = \frac{|H^2(G, E_L^S)|}{|H^1(G, E_L^S)|} .$$

Nous savons qu'il est multiplicatif , ce qui permet de le calculer par dévissage . Formons pour cela la suite exacte canonique (où $P_L(S)$ est le groupe des diviseurs principaux de L engendrés par les S-unités) :

$$1 \longrightarrow E_L \longrightarrow E_L^S \longrightarrow P_L(S) \longrightarrow 1 .$$

Nous obtenons immédiatement :

$q(G, E_L^S) = q(G, E_L) \cdot q(G, P_L(S)) = q(G, E_L^{\mathrm{ord}}) \cdot q(G, D_L(G))$, puisque E_L est d'indice fini dans E_L^{ord} (le groupe des unités au sens ordinaire) et $P_L(S)$ dans $D_L(S)$. Et comme $q(G, E_L^{\mathrm{ord}})$ est connu depuis Herbrand pour être égal au quotient $\left(\prod_{\mathfrak{p}|\infty} d_{\mathfrak{p}}(L/K)\right) / [L:K]$ de la complexification par le degré de l'extension (résultat qui est le coeur même de la démonstration de Chevalley) , seul reste à évaluer le second facteur $q(G, D_L(S))$. Nous avons :

<u>PROPOSITION III.1.8.</u>- Dans une extension cyclique de corps de nombres L/K , de groupe de Galois G, le quotient de Herbrand $q(G, D_L(S))$ du groupe des diviseurs construits sur les places de S est le produit des degrés locaux $d_{\mathfrak{p}}(L/K) = [L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}]$ attachés aux places non réelles de S :

$$q(G, D_L(S)) = \prod_{\mathfrak{p} \in S\ ;\ \mathfrak{p} \nmid \infty} d_{\mathfrak{p}}(L/K) = \prod_{\mathfrak{p} \in S\ ;\ \mathfrak{p} \nmid \infty} [L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}] .$$

En particulier, le quotient de Herbrand du groupe des S-unités est donné par la formule :

$$q(G, E_L^S) = \frac{\prod_{\mathfrak{p} \in S\ ;\ \mathfrak{p} \nmid \infty} d_{\mathfrak{p}}(L/K) \prod_{\mathfrak{p} | \infty} d_{\mathfrak{p}}(L/K)}{[L:K]}$$

Démonstration : Nous avons $H^1(G, D_L(S)) = 1$, d'après le lemme 4 ; et, avec les notations de la proposition 6 :

$$H^2(G, D_L(S)) = (D_L(S)^G : \mathcal{N}(D_L(S))) = \prod_{\mathfrak{p} \in S \,;\, \mathfrak{p} \nmid \infty} \left(\mathfrak{P}_L^{\mathbb{Z}} : \mathfrak{P}_L^{d_{\mathfrak{p}}(L/K)\mathbb{Z}}\right),$$

comme attendu .

Récapitulant ce qui précède, nous pouvons donc énoncer :

<u>THÉORÈME III.1.9</u>.- (Formule des S-classes ambiges) - Dans une extension cyclique L/K de corps de nombres , de groupe de Galois G , le nombre de S-classes ambiges de diviseurs est donné par la formule :

$$|\mathcal{C}\ell_L^{S\,G}| = |\mathcal{C}\ell_K^S| \, \frac{\prod_{\mathfrak{p} \in S} d_{\mathfrak{p}}(L/K) \prod_{\mathfrak{p} \notin S} e_{\mathfrak{p}}(L/K)}{[L:K]\,(E_K^S : E_K^S \cap \mathcal{N}(L^\times))} ,$$

où E_K^S est le groupe des S-unités du corps K ; $d_{\mathfrak{p}}(L/K)$ le degré de l'extension locale $L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$ associée à la place $\mathfrak{p}$, et $e_{\mathfrak{p}}(L/K)$ l'indice de ramification de cette extension (avec la convention $e_{\mathfrak{p}}(L/K) = 1$, lorsque $\mathfrak{p}$ est archimédienne) .

Remarque.- Sur la formule obtenue , il est loin d'être évident que la quantité $|\mathcal{C}\ell_L^{S\,G}|$ soit une fonction décroissante de S . De fait, nous avons $|\mathcal{C}\ell_L^{S\,G}| = |{}^G\mathcal{C}\ell_L^S|$, puisque G est cyclique, et, si S' contient S , le groupe ${}^G\mathcal{C}\ell_L^{S'}$ est canoniquement un quotient de ${}^G\mathcal{C}\ell_L^S$.

<u>Applications</u> .- (i) Prenons S vide , la formule des classes ambiges s'écrit alors :

$$|\mathcal{C}\ell_L^G| = |\mathcal{C}\ell_K| \, \frac{\prod_{\mathfrak{p}} e_{\mathfrak{p}}(L/K)}{[L:K]\,(E_K : E_K \cap \mathcal{N}(L^\times))} .$$

Elle exprime le nombre de classes ambiges de diviseurs (i.e. le nombre de classes ambiges d'idéaux au sens restreint) de L en fonction du nombre de classes de diviseurs de K , de la ramification (aux places finies) dans L/K , du degré de l'extension , et de l'indice normique associé aux unités (au sens des diviseurs) . C'est la formule donnée par Gras lorsque [L : K] est premier (cf. [Gr$_1$]) .

(ii) Prenons pour S l'ensemble des places réelles de K ; la formule s'écrit :

$$|Cl_L^{ord}| = |Cl_K^{ord}| \frac{\prod_{\mathfrak{p}} e_{\mathfrak{p}}(L/K) . \prod_{\mathfrak{p}|\infty} d_{\mathfrak{p}}(L/K)}{[L:K](E_K^{ord} : E_K^{ord} \cap N(L^{\times}))} .$$

Elle exprime le nombre de classes ambiges d'idéaux (au sens ordinaire) de L , en fonction du nombre de classes d'idéaux de K , de la ramification (aux places finies) et de la complexification (aux places réelles) dans L/K , du degré de l'extension , et de l'indice normique associé aux unités ordinaires (i.e. au sens des idéaux) ; c'est , aux notations près , la formule de Chevalley .

COROLLAIRE III.1.10.- (Théorème 94 de Hilbert généralisé) - Soit L/K une extension cyclique non triviale de corps de nombres . Supposons L/K non ramifiée (aux places finies) et S-décomposée . Alors :

(i) Le groupe Cl_K^S des S-classes de diviseurs de K n'est pas nul .

(ii) Il existe dans Cl_K^S une classe non triviale qui capitule dans Cl_L^S .

Plus précisément , il vient :

$$|Cap_{L/K}^S| \geq [L:K] .$$

Démonstration : L'extension L/K étant supposée sans ramification , donc S-ramifiée , l'assertion (i) du corollaire 7 nous donne l'inégalité : $|Cap_{L/K}^S| \geq |H^1(G, E_L^S)|$; et la proposition 8 nous dit que le quotient de Herbrand $q(G, E_L^S) = |H^2(G, E_L^S)| / |H^1(G, E_L^S)|$ est égal à $1/[L:K]$; d'où le résultat annoncé .

Remarque 1.- Si K possède une extension abélienne L , non ramifiée et S-décomposée , qui vérifie $Cl_L^S = 1$, pour un ensemble fini S de places donné , c'est nécessairement l'extension abélienne maximale non ramifiée et S-décomposée , disons F , de K . Dans le cas contraire , en effet , l'extension F/L serait non triviale et , bien entendu , abélienne , non ramifiée , et S-décomposée , contrairement à l'hypothèse $Cl_L^S = 1$. En particulier , si L est cyclique sur K , le groupe $Cl_K^S \simeq Gal(L/K)$ est lui-même cyclique , d'ordre $[L:K]$.

Plus généralement, pour chaque sous-extension K'/K de L/K, le même argument, appliqué à l'extension cyclique L'/K, montre alors que le groupe $\mathcal{C}\ell_{K'}^{S}$ est encore cyclique, d'ordre $[L:K']$. D'un autre côté, l'extension L/K étant non ramifiée et S-décomposée, les S-unités de K sont normes locales partout dans L/K, donc normes globales (en vertu du principe de Hasse, puisque L/K est supposée cyclique), donc normes de S-unités de L (d'après la suite exacte des classes ambiges, puisque $\mathcal{C}\ell_{L}^{S}$ est nul par hypothèse). A fortiori cette dernière condition est-elle vérifiée dans chacune des sous-extensions K'/K. Il vient donc $H^2(\mathrm{Gal}(K'/K), E_{K'}^{S}) = 1$, i.e. $|H^1(\mathrm{Gal}(K'/K), E_{K'}^{S})| = [K':K]$. Autrement dit, la S-capitulation $\mathrm{Cap}_{K'/K}^{S}$ dans K'/K est d'ordre $[K':K]$; et le groupe $\mathcal{C}\ell_{K'}^{S}$, qui a pour ordre $[L:K'] = [L:K]/[L:K'] = (\mathcal{C}\ell_{K}^{S} : \mathrm{Cap}_{K'/K}^{S})$, est l'image de $\mathcal{C}\ell_{K}^{S}$ par l'homomorphisme d'extension $j_{K'/K}$.

<u>Remarque 2</u>.- Lorsque le corps K, l'ensemble de places S, et le degré de l'extension cyclique L/K sont donnés, le dénominateur $[L:K](E_{K}^{S} : E_{K}^{S} \cap N(L^{\times}))$, dans la formule des classes ambiges, est majoré par la quantité $[L:K](E_{K}^{S} : E_{K}^{S[L:K]} \leq (s[K:\mathbb{Q}])^{[L:K]}$, où s est le nombre de places de $\mathbb{Q}$ qui sont soit la place réelle, soit au-dessous d'une place de S. En particulier, l'ordre du groupe ambige $\mathcal{C}\ell_{L}^{SG}$ est arbitrairement grand avec la ramification. Nous retrouvons ainsi, en le généralisant, le résultat de [BR].

Une première extension de la formule de Chevalley aux classes de diviseurs (en fait aux classes d'idéaux prises au sens restreint), dans le cas des extensions cycliques de degré premier, figure dans la thèse de Gras (cf. [Gr_1], Ch. IV, A § 1), qui étudie également les noyaux d'ordre supérieur ($\mathcal{C}\ell^{G}$; $(\mathcal{C}\ell/\mathcal{C}\ell^{G})^{G}$; etc...). Plus récemment, Federer a proposé une démonstration de la formule des S-classes ambiges dans le cas cyclique, voisine de celle que nous donnons ici, mais l'idée de considérer des S-classes d'idéaux est antérieure puisqu'elle avait déjà été développée par Gillard à l'occasion d'une question de théorie d'Iwasawa (cf. [Gi_1], appendice), puis par nous-même dans un autre contexte (cf. [Ja_1]), et, dans les deux cas, à l'instar de Gras (cf. [Gr_2], § 1), en abordant le problème en termes de représentations.

2.- EXPRESSION DE LA FORMULE EN TERMES DE REPRÉSENTATIONS DANS LE CAS MÉTABELIEN.

a.- Préliminaires.

Fixons un nombre premier ℓ, et intéressons nous désormais au ℓ-Sylow du groupe des S-classes de diviseurs ; convenons, pour ne pas alourdir les notations, de continuer à le noter $C\ell^S$. Si L/K est une extension galoisienne de corps de nombres, de degré étranger à ℓ, de groupe de Galois G, l'élément $e = \frac{1}{[L:K]} \sum_{g \in G} g$ est un idempotent de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G]$, de sorte que l'homomorphisme d'extension identifie canoniquement le ℓ-groupe des S-classes $C\ell_K^S$ à un facteur direct de $C\ell_L^S$, et, plus précisément, à son sous-groupe ambige $C\ell_L^{SG}$. Le problème de comparer les ordres de $C\ell_K^S$ et $C\ell_L^{SG}$ ne se pose donc que dans la mesure où celui de G est divisible par ℓ, c'est-à-dire, en dernière analyse, lorsque G est un ℓ-groupe.

Nous supposons, dans ce qui suit, que G est cyclique, et nous nous intéressons à la situation suivante : L est une ℓ-extension cyclique de K, galoisienne sur un sous-corps F, et K/F est abélienne, de degré d étranger avec ℓ. Sous ces hypothèses, le groupe de Galois Gal(L/F) s'écrit comme produit direct de son ℓ-sous-groupe de Sylow G = Gal(L/K) et du quotient associé Δ = Gal(K/F). De plus, le groupe G étant supposé cyclique, l'homomorphisme de Δ dans Aut G, qui définit le produit, se factorise par un caractère ℓ-adique de Δ, ce qui permet d'écrire

$$(*) \quad \tau g \tau^{-1} = g^{\chi(\tau)}, \quad \forall \tau \in \Delta \text{ et } g \text{ générateur de } G,$$

en faisant choix une fois pour toutes d'un relèvement de Δ dans Gal(L/F). Ainsi, lorsque χ est le caractère unité, le groupe Gal(L/F) est abélien (c'est la situation étudiée dans [Gi_1] et [Gr_2]). Dans tous les autres cas, le groupe Gal(L/F) est métabélien (c'est la situation décrite dans [Ja_1]).

D'un autre côté, le degré d de la sous-extension abélienne K/F étant supposé étranger à ℓ, l'algèbre de Galois $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ est semi-locale, en fait produit direct d'extensions abéliennes non ramifiées de $\mathbb{Z}_\ell$:

à chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ correspond un idempotent primitif de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$

$$e_\varphi = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau)\,\tau^{-1} \ ,$$

et la φ-composante $Z_\varphi = \mathbb{Z}_\ell[\Delta]\,e_\varphi$ s'identifie à l'anneau local des entiers d'une extension cyclotomique non ramifiée de $\mathbb{Q}$, qui a pour degré celui $d_\varphi = [Z_\varphi : \mathbb{Z}_\ell]$ du caractère φ. La décomposition obtenue s'étend, bien entendu, à l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\mathrm{Gal}(L/F)]$ regardée comme module sur elle-même, chaque facteur $\mathbb{Z}_\ell[\mathrm{Gal}(L/F)]\,e_\varphi$ étant projectif et indécomposable, mais il ne s'agit plus là d'un isomorphisme d'algèbres dès que χ est non trivial. Pour traduire les relations de commutation (*), il est alors commode d'introduire la résolvante

$$\theta = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \chi(\tau^{-1})\,[g^{\chi(\tau)} - 1] \ ,$$

construite sur un générateur g du groupe G, dont on vérifie facilement qu'elle engendre l'idéal d'augmentation I_G de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G]$. La relation (*) s'écrit alors :

$$(**) \quad \tau\,\theta\,\tau^{-1} = \chi(\tau)\,\theta \ , \quad \forall\, \tau \in \Delta \ ;$$

ce qui se traduit, sur les idempotents primitifs de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G]$, par une translation des caractères :

$$(***) \quad e_\varphi\,\theta = \theta\,e_{\varphi\chi} \ , \quad \forall\, \varphi \in R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta) \ .$$

Revenons maintenant à notre sujet : Les divers groupes qui interviennent dans la suite exacte des classes ambiges n'étant pas tous des $\mathbb{Z}_\ell$-modules, introduisons les tensorisés respectifs

$$\mathcal{D}^S = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} D^S \ , \quad \mathcal{E}^S = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E^S \ , \quad \mathcal{P}^S = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} P^S \ , \quad \mathcal{N}_{L/K} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} N_{L/K}(L^\times)$$

des groupes de S-diviseurs, de S-unités, de S-diviseurs principaux, et de normes. Par un argument de platitude, nous obtenons immédiatement la suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell$-modules (ou nous avons conservé par abus les notations $d^S_{L/K}$ et $j^S_{L/K}$ pour désigner, de ces applications, les restrictions aux ℓ-Sylow :

$$1 \to \mathcal{E}_L^{SG}/\mathcal{E}_K^S \to \mathrm{Ker}\, d^S_{L/K} \to \mathrm{Ker}\, j^S_{L/K} \to H^1(G, \mathcal{E}_L^S) \to \mathrm{Coker}\, d^S_{L/K} \to \mathrm{Coker}\, j^S_{L/K}$$
$$\to H^2(G, \mathcal{E}_L^S) \to \mathcal{E}_L^{SG}/\mathcal{E}_K^S \cap \mathcal{N}_{L/K} \to 1 \ .$$

Dans celle-ci, les applications canoniques induites par la norme, l'extension , l'inclusion , etc ... , sont évidemment des $\mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]$ - morphismes ; mais il n'en est plus de même pour les isomorphismes d'origine cohomologique donnés par le lemme 4 . Convenons , en effet , de repérer par un indice φ la composante d'un $\mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]$-module attachée à un caractère irréductible φ du groupe Δ (c'est-à-dire l'image de ce module par l'idempotent primitif e_φ) . Cela posé , nous avons :

<u>LEMME III.1.11</u>.- Sous les hypothèses précédentes , il existe des isomorphismes de $\mathbb{Z}_\ell$-modules :

(i) $[\mathcal{P}_L^{SG}/d^S_{L/K}(\mathcal{P}_K^S)]_\varphi \simeq H^1_{\varphi\chi}(G, \mathcal{E}_L^S)$.

(ii) $[C\ell_L^{SG}/d\ell^S(\mathcal{D}_L^{SG})]_\varphi \simeq H^1_{\varphi\chi}(G, \mathcal{P}_L^S)$

$$\simeq \operatorname{Ker}[H^2_{\varphi\chi}(G, \mathcal{E}_L^S) \to H^2_{\varphi\chi}(G, \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} L^\times)].$$

Démonstration :

(i) Soit (x) un S-diviseur principal et invariant par G . La résolvante θ engendrant l'idéal d'augmentation I_G , l'élément x^θ est alors une S-unité qui est annulée par la norme algébrique $\nu = \sum_{g \in G} g$. Comme x est défini à une S-unité près , nous réalisons ainsi l'isomorphisme de $\mathcal{P}_L^{SG}/d^S_{L/K}(\mathcal{P}_K^S)$ sur $H^1(G, \mathcal{E}_L^S)$, induit par le lemme 4 . Et le résultat annoncé provient simplement de la translation des caractères donnée par l'identité (***) .

(ii) Soit $\mathfrak{a}$ un S-diviseur appartenant à une classe ambige . Le diviseur $(x) = \mathfrak{a}^\theta$ est alors S-principal et annulé par la norme arithmétique . Comme $\mathfrak{a}$ est défini à un S-diviseur principal près , nous réalisons ainsi l'isomorphisme de $C\ell_L^{SG}/d^S(\mathcal{D}_L^{SG})$ sur $H^1(G, \mathcal{P}_L^S)$ considéré dans la démonstration de la suite exacte des classes ambiges . Comme plus haut, la factorisation par la résolvante θ se traduit par une translation des caractères . Cela dit , l'isomorphisme de $H^1(G, \mathcal{P}_L^S)$ sur $\operatorname{Ker}[H^2(G, \mathcal{E}_L^S) \to H^2(G, Z \otimes_{\mathbb{Z}} L^\times)]$ s'obtient tout simplement en associant à la classe du diviseur (x) dans le premier groupe celle de la S-unité $N_{L/K}(x)$ dans le second ; c'est un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell\,[\Delta]$-modules .

b.- <u>Enoncé des résultats</u> .

Distinguons deux cas , suivant la parité de ℓ :

1) Si ℓ vaut 2 , le groupe Aut G est un 2-groupe , et les hypothèses faites impliquent que L soit une extension abélienne de F . Il vient donc :

THÉORÈME III.1.12.- Soient L une 2-extension cyclique d'un corps de nombres K , de groupe G , abélienne sur un sous-corps F de K d'indice [F : K] impair , et S un ensemble fini de places de F . Alors , pour chaque caractère 2-adique irréductible φ du groupe $\Delta = \mathrm{Gal}(K/F)$, les φ-composantes du noyau et du conoyau de l'homomorphisme d'extension $j^S_{L/K}$ du 2-groupe des S-classes de diviseurs $\mathcal{C}\ell^S_K$ du corps K , dans le sous-groupe ambige $\mathcal{C}\ell^{SG}_L$ de celui de L , sont liées par la suite exacte de $\mathbb{Z}_2$-modules :

$$1 \to (\mathcal{E}^{SG}_L/\mathcal{E}^S_K)_\varphi \to \mathrm{Ker}_\varphi\, d^S_{L/K} \to \mathrm{Ker}_\varphi\, j^S_{L/K} \to H^1_\varphi(G, \mathcal{E}^S_L) \to \mathrm{Coker}_\varphi\, d^S_{L/K}$$
$$\to \mathrm{Coker}_\varphi\, j^S_{L/K} \to H^2_\varphi(G, \mathcal{E}^S_L) \to (\mathcal{E}^{SG}_L/\mathcal{E}^S_K \cap \mathcal{N}_{L/K})_\varphi \to 1.$$

En particulier , la φ-partie du 2-nombre de S-classes ambiges est donnée par la formule :

$$\frac{|\mathcal{C}\ell^{SG}_{L,\varphi}|}{|\mathcal{C}\ell^S_{K,\varphi}|} = \frac{|\mathrm{Coker}_\varphi\, j^S_{L/K}|}{|\mathrm{Ker}_\varphi\, j^S_{L/K}|} = \frac{|\mathrm{Coker}\, d^S_{L/K}|}{|\mathrm{Ker}\, d^S_{L/K}|} \; \frac{q_\varphi(G, \mathcal{E}^S_L)}{(\mathcal{E}^S_K : \mathcal{E}^S_K \cap \mathcal{N}_{L/K})_\varphi},$$

où $q_\varphi(G, \mathcal{E}^S_L)$ est la φ-partie du 2-quotient de Herbrand du groupe des S-unités .

2) Si ℓ est impair, il n'y a plus lieu de distinguer entre classes d'idéaux et de diviseurs . Il vient donc :

THÉORÈME III.1.13.- Soient L une ℓ-extension cyclique d'un corps K , de degré impair , de groupe G , métabélienne sur un sous-corps F de K d'indice relatif [K : F] étranger à ℓ , puis χ le caractère du groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}(K/F)$ qui factorise le produit semi-direct $G \times \Delta$, et S un ensemble fini de places de F . Alors , pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ , les φ-composantes du noyau et du conoyau et du conoyau de l'homomorphisme d'extension $j^S_{L/K}$ du ℓ-groupe des classes d'idéaux $\mathcal{C}\ell^S_K$ de K dans le sous-groupe ambige $\mathcal{C}\ell^{SG}_L$ de celui de L , sont liés par la suite exacte courte de $\mathbb{Z}_\ell$-modules :

$$1 \to \mathrm{Ker}_{\varphi}\, j^S_{L/K} \to H^1_{\varphi\chi}(G, \mathcal{E}^S_L) \to \mathrm{Coker}_{\varphi}\, d^S_{L/K} \to \mathrm{Coker}_{\varphi}\, j^S_{L/K} \to H^2_{\varphi\chi}(G, \mathcal{E}^S_L)$$
$$\to (\mathcal{E}^S_K / \mathcal{E}^S_K \cap \eta_{L/K})_{\varphi\chi} \to 1 \ .$$

En particulier , la φ-partie du ℓ-nombre de S-classes ambige est donnée par la formule :

$$\frac{|\mathcal{C}\ell^{S\,G}_{L,\varphi}|}{|\mathcal{C}\ell^S_{K,\varphi}|} = \frac{|\mathrm{Coker}_{\varphi}\, j^S_{L/K}|}{|\mathrm{Ker}_{\varphi}\, j^S_{L/K}|} = \frac{|\mathrm{Coker}_{\varphi}\, d^S_{L/K}|}{(\mathcal{E}^S_K : \mathcal{E}^S_K \cap \eta_{L/K})_{\varphi\chi}}\ q_{\varphi\chi}(G, \mathcal{E}^S_L) \ ,$$

où $q_{\varphi\chi}(G, \mathcal{E}^S_L)$ est la $\varphi\chi$-partie du ℓ-quotient de Herbrand du groupe des S-unités .

<u>SCOLIE III.1.14</u>.- Pour chaque place $\mathfrak{p}$ de F , désignons par $\chi_{\mathfrak{p}}$ l'induit à Δ du caractère de la représentation unité de son sous-groupe de décomposition $\Delta_{\mathfrak{p}}$ dans l'extension abélienne K/F , notons $e_{\mathfrak{p}}(L/K)$ l'indice de ramification associé à $\mathfrak{p}$ dans la ℓ-extension cyclique L/K , et $d_{\mathfrak{p}}(L/K)$ le degré de l'extension locale correspondante . Alors , pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ de Δ , les φ-parties du noyau et du conoyau de l'homomorphisme d'extension des diviseurs sont donnés par les formules :

$$|\mathrm{Ker}_{\varphi}\, d^S_{L/K}| = \prod_{\mathfrak{p}|\infty;\ \mathfrak{p}\notin S} d_{\mathfrak{p}}(L/K)^{\langle\varphi,\chi_{\mathfrak{p}}\rangle}$$

$$\& \qquad |\mathrm{Coker}_{\varphi}\, d^S_{L/K}| = \prod_{\mathfrak{p}\notin S} e_{\mathfrak{p}}(L/K)^{\langle\varphi,\chi_{\mathfrak{p}}\rangle} \ .$$

Démonstration : Le quotient $\Delta/\Delta_{\mathfrak{p}}$ opérant facilement sur les places de K au-dessus de $\mathfrak{p}$, le sous-module de $\mathcal{D}_K$ engendrées par celles-ci est donc isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell[\Delta/\Delta_{\mathfrak{p}}]$, si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique , et à $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_2[\Delta/\Delta_{\mathfrak{p}}]$, sinon . Dans le premier cas , la φ-partie de ce module est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension $\langle\varphi,\chi_{\mathfrak{p}}\rangle$; dans le second cas, et si ℓ vaut 2, c'est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension $\langle\varphi,\chi_{\mathfrak{p}}\rangle$; et , dans l'un et l'autre , nous concluons comme dans le lemme 6 .

<u>SCOLIE III.1.15</u>.- Conservons les notations précédentes . Alors, pour chaque caractère ℓ-adique Φ du groupe Δ , contenu dans le caractère régulier , et stable par translation de χ (i.e. vérifiant $\Phi\chi = \Phi$) , la

Φ-composante du ℓ-quotient de Herbrand du groupe des S-unités est donnée par la formule :

$$q_\Phi(G, \mathcal{E}_L^S) = [L:K]^{-\langle \Phi, 1\rangle} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty;\ \mathfrak{p} \in S} d_\mathfrak{p}(L/K)^{\langle \Phi, \chi_\mathfrak{p}\rangle} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \mid \infty} d_\mathfrak{p}(L/K)^{\langle \Phi, \chi_\mathfrak{p}\rangle}.$$

Démonstration : D'après (***), la condition de stabilité sur le caractère Φ signifie que l'idempotent associé $e_\Phi = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \Phi(\tau^{-1})\tau = \sum_{\varphi \mid \Phi} e_\varphi$ est central dans l'algèbre de Galois $\mathbb{Z}_\ell\,[\mathrm{Gal}(L/F)]$. Lorsque c'est le cas, la Φ-partie du ℓ-quotient de Herbrand des S-unités n'est autre que le ℓ-quotient de Herbrand de la Φ-composante du groupe des S-unités, qui se calcule par la méthode de la proposition. Il vient donc :

$$q_\Phi(G, \mathcal{E}_L^S) = q(G, \mathcal{E}^S_{L,\Phi}) = q(G, \mathcal{E}_{L,\Phi}) \cdot q(G, \mathcal{D}_{L,\Phi}(S)),$$

puis

$$q(G, \mathcal{D}_{L,\Phi}(S)) = q_\Phi(G, \mathcal{D}_L(S)) = \prod_{\mathfrak{p} \in S;\ \mathfrak{p} \nmid \infty} d_\mathfrak{p}(L/K)^{\langle \Phi, \chi_\mathfrak{p}\rangle},$$

par une généralisation immédiate des résultats de la proposition 8. D'un autre côté, le lemme de Herbrand sur les unités d'un corps de nombres algébriques affirmant l'existence d'une suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell\,[\mathrm{Gal}(L/F)]$-modules (où $\mathcal{M}$ est un module fini, et $G_\mathfrak{p} \times \Delta_\mathfrak{p}$ le sous-groupe de décomposition dans L/F de l'une quelconque des places de L au-dessus de $\mathfrak{p}$) :

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \mid \infty} \mathbb{Z}_\ell\,[G \times \Delta / G_\mathfrak{p} \times \Delta_\mathfrak{p}] \longrightarrow \mathcal{E}_L \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 1$$

nous en déduisons par localisation l'existence d'une suite exacte de $\mathbb{Z}\,[G]$-modules :

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^{\langle \Phi, 1\rangle} \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \mid \infty} \mathbb{Z}_\ell\,[G/G_\mathfrak{p}]^{\langle \Phi, \chi_\mathfrak{p}\rangle} \longrightarrow \mathcal{E}_{L,\Phi} \longrightarrow \mathcal{M}_\Phi \longrightarrow 1$$

où $\mathcal{M}_\Phi$ est encore un module fini, ce qui nous donne, comme attendu :

$$q(G, \mathcal{E}_{L,\Phi}) = \frac{\prod_{\mathfrak{p} \mid \infty} q(G, \mathbb{Z}_\ell\,[G/G_\mathfrak{p}])^{\langle \Phi, \chi_\mathfrak{p}\rangle}}{q(G, \mathbb{Z}\ )^{\langle \Phi, 1\rangle}}$$

$$= \begin{cases} 1/\,|G|^{\langle \Phi, 1\rangle}, & \text{si } \ell \text{ est impair} \\[2ex] \dfrac{\prod_{\mathfrak{p} \mid \infty} d_\mathfrak{p}(L/K)^{\langle \Phi, \chi_\mathfrak{p}\rangle}}{|G|^{\langle \Phi, 1\rangle}}, & \text{si } \ell \text{ vaut } 2. \end{cases}$$

Remarque.- On prendra garde que le calcul qui précède suppose effectivement que le caractère Φ est associé à un idempotent central de l'algèbre de Galois . Lorsque ce n'est pas le cas , le groupe $\mathcal{E}^{S}_{L,\Phi}$ n'est plus généralement un G-module , et l'étude numérique de cas particuliers laisse augurer que le comportement du quotient $q_{\Phi}(G, \mathcal{E}^{S}_{L})$ est imprévisible , car il met en jeu de façon extrêmement diophantienne l'arithmétique des classes et des unités .

<u>COROLLAIRE III.1.16</u>.- Dans une ℓ-extension cyclique de corps de nombres L/K , métabélienne sur un sous-corps F , l'ordre de la Φ-composante du ℓ-groupe des S-classes ambiges est donné , avec les notations du scolie 14 , et pour chaque caractère central Φ de l'algèbre de Galois , par la formule :

$$|C\ell^{SG}_{L,\Phi}| = |C\ell^{S}_{K,\Phi}| \; \frac{\prod\limits_{\mathfrak{p} \notin S} e_{\mathfrak{p}}(L/K)^{\langle \Phi, \chi_{\mathfrak{p}} \rangle} \prod\limits_{\mathfrak{p} \in S} d_{\mathfrak{p}}(L/K)^{\langle \Phi, \chi_{\mathfrak{p}} \rangle}}{[L:K]^{\langle \Phi, 1 \rangle} \, (\mathcal{E}^{S}_{K,\Phi} , \mathcal{E}^{S}_{K,\Phi} \cap \mathcal{N}_{L/K})} \; .$$

c.- <u>Application à la capitulation</u> .

Supposons maintenant que l'ensemble S contienne les places réelles de F qui se complexifient dans L/K . Le groupe $H^1_{\Phi}(G, \mathcal{E}^{S}_{L})$ gouverne alors la Φ-partie de la capitulation (puisque $Cap^{S}_{L/K}$ s'identifie dans ce cas au noyau de l'application $H^1_{\Phi}(G, \mathcal{E}^{S}_{L}) \longrightarrow \mathrm{Ker}_{\varphi}\, d^{S}_{L/K}$). Comme le quotient de Herbrand $q_{\Phi}(G, \mathcal{E}^{S}_{L})$ est parfaitement explicite , le calcul de l'ordre $|H^1_{\Phi}(G, \mathcal{E}^{S}_{L})|$ se ramène à celui de l'ordre $|H^2_{\Phi}(G, \mathcal{E}^{S}_{L})|$, que l'on peut encadrer à partir de l'inclusion immédiate :

$$E_K^{S\,[L:K]} \subset \mathcal{N}_{L/K}(E^{S}_{L}) \subset E^{S}_{K} \cap \mathcal{N}_{L/K}(L^{\times}) \; .$$

Désignons, en effet , par $\overline{S}$ la réunion de S et des places à l'infini du corps F . D'un côté, le groupe $\mathcal{E}^{S}_{K,\Phi}$ est composé direct d'un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension $\langle \sum_{\mathfrak{p} \in \overline{S}} \chi_{\mathfrak{p}} - 1 , \Phi \rangle$, et de la Φ-composante $\mu_{K,\Phi}$ du ℓ-Sylow μ du groupe des racines de l'unité dans K ; l'indice $(\mathcal{E}^{S}_{K,\Phi} : \mathcal{E}^{S\,[L:K]}_{K,\Phi})$ est donc parfaitement explicite . D'un autre côté, la détermination du groupe $\mathcal{E}^S_{K,\Phi} \cap \mathcal{N}_{L/K}$ relève de méthodes locales (le fait d'être norme dans une extension cyclique se lisant localement) , et l'indice ($\mathcal{E}^S_{K,\Phi} : \mathcal{E}^S_{K,\Phi} \cap \mathcal{N}_{L/K}$) est donc toujours calculable dans la pratique , dès que $\mathcal{E}_K$ est connu numériquement . En utilisant le théorème de Grumwald-Wang (cf. [AT] , Ch. X , § 2) , il est même possible de construire des extensions cycliques L/K , de degré premier, qui sont non ramifiées , et où l'indice ($\mathcal{E}_K : \mathcal{E}_K \cap \mathcal{N}_{L/K}$) est arbitrairement grand , ce qui revient à dire , compte-tenu des encadrements précédents , que la capitulation y est arbitrairement grande (*) .

Inversement , si le caractère Φ n'est pas représenté dans le groupe $\mathcal{E}^S_K$ (i.e. si $\mathcal{E}^S_{K,\Phi}$ est sans torsion , et si la quantité $\langle \sum_{\mathfrak{p} \in \bar{S}} \chi_{\mathfrak{p}} - 1 , \Phi \rangle$ est nulle) les calculs qui précèdent montrent que le groupe $\mathrm{Cap}^S_{L/K,\Phi}$ est trivial , c'est-à-dire que la restriction aux Φ-composantes de l'homomorphisme d'extension $C\ell^S_K \longrightarrow C\ell^S_L$ est injective . Ce dernier résultat est essentiellement connu dans la situation suivante : ℓ est impair ; K est une extension quadratique totalement imaginaire d'un sur-corps totalement réel de F ; l'ensemble S est vide (ou réduit aux places à l'infini ; ce point étant ici sans importance du fait de l'imparité de ℓ) ; et Φ est un caractère imaginaire de Δ (i.e. un caractère ℓ-adique de Δ dont les facteurs irréductibles prennent des valeurs négatives sur la conjugaison complexe) , ne contenant pas le caractère de l'action de Δ sur μ_K , lorsque μ_K est non trivial . Plus précisément :

<u>PROPOSITION III.1.17.</u>- Soient L une ℓ-extension cyclique d'un corps de nombres K , de degré impair , métabélienne sur un sous-corps F , et χ le caractère ℓ-adique du groupe de Galois $\Delta = \mathrm{Gal}(K/F)$ qui définit le produit semi-direct $G \times \Delta$. Supposons que K soit une extension quadratique totalement imaginaire d'un sur-corps totalement réel de F , et convenons de dire qu'un caractère ℓ-adique irréductible φ de G est réel ou imaginaire suivant qu'il prend une valeur positive ou négative sur la conjugaison complexe. Supposons, en outre, que le caractère χ soit réel . Alors :

(*) On trouvera les détails de la construction de telles extensions dans l'article de Schipper [Sc] .

(i) Si le corps K ne contient pas les racines ℓ-ièmes de l'unité, la restriction de l'homomorphisme d'extension $j_{L/K}$ à la com - posante imaginaire $C\ell_K^-$ du ℓ -groupe des classes d'idéaux de K est une injection .

(ii) Si le ℓ -Sylow μ_K du groupe des racines de l'unité dans K est non trivial , la même conclusion subsiste sous la condition suffisante $H^1(G, \mu_L) = 1$.

Démonstration : Désignons par $\Phi = \mathrm{Ind}_{\Delta_\infty}^{\Delta} 1_{\Delta_\infty}$ l'induit à Δ du caractère de la représentation unité du sous-groupe de décomposition commun des places réelles de F dans l'extension K/F ; et notons $\bar{\Phi} = \chi_{rég} - \Phi$ le ca - ractère supplémentaire . L'entier ℓ étant supposé impair, nous avons :
$|\mathrm{Cap}^-_{L/K}| = |\mathrm{Cap}_{L/K, \bar{\Phi}}| \leq |H^1_{\bar{\Phi}}(G, \mathcal{E}_L)| = |H^1(G, \mathcal{E}_L^-)| = |H^1(G, \mu_L)|$,
puisque , χ étant réel , le caractère $\bar{\Phi}$ est invariant par χ . D'où la conclusion .

Le résultat obtenu peut être généralisé grâce à la proposition suivante :

<u>PROPOSITION III.1.18</u>.- Soient , comme plus haut , L une ℓ -exten - sion cyclique d'un corps de nombres K , métabélienne sur un sous-corps F , et Φ le caractère ℓ -adique du groupe $\Delta = \mathrm{Gal}(K/F)$ attaché à un idempotent central e_Φ de l'algèbre de Galois . Supposons donnés un ensemble fini S de places de F (contenant les places réelles complexi-fiées dans L/K , si ℓ vaut 2) , et S' réunion de S et d'un ensemble fini de places de F ne présentant pas de Φ-décomposition dans L/K (i.e. pour lesquelles la Φ-partie $g_{\mathfrak{p}}(L/K)^{\langle \Phi, \chi_{\mathfrak{p}} \rangle}$ de l'indice de décomposi - tion $g_{\mathfrak{p}}(L/K) = [L:K]/d_{\mathfrak{p}}(L/K)$ est égale à 1) . Alors l'ordre du groupe de cohomologie $H^1_\Phi(G, \mathcal{E}_L^{S'})$ divise celui du groupe $H^1_\Phi(G, \mathcal{E}_L^S)$.

En particulier, si $H^1_\Phi(G, \mathcal{E}_L^S)$ est nul , $H^1_\Phi(G, \mathcal{E}_L^{S'})$ l'est aussi, et la restriction aux Φ-composantes de l'homomorphisme d'extension $C\ell_K^{S'} \longrightarrow C\ell_L^{S'}$ est injective .

Démonstration : Formons le quotient

$$\frac{|H^1_\Phi(G,\mathcal{E}_L^S)|}{|H^1_\Phi(G,\mathcal{E}_L^{S'})|} = \frac{|H^2_\Phi(G,\mathcal{E}_L^S)|}{|H^2_\Phi(G,\mathcal{E}_L^{S'})|}\ \frac{q_\Phi(G,\mathcal{E}_L^{S'})}{q_\Phi(G,\mathcal{E}_L^{S})} \ .$$

Le premier facteur s'écrit encore

$$\frac{|H^2_\Phi(G,\mathcal{E}_L^S)|}{|H^2_\Phi(G,\mathcal{E}_L^{S'})|} = \frac{(\mathcal{E}_K^S : \mathcal{N}(\mathcal{E}_L^S))_\Phi}{(\mathcal{E}_K^{S'} : \mathcal{N}(\mathcal{E}_L^{S'}))_\Phi} = \frac{(\mathcal{E}_K^S \cap \mathcal{N}(\mathcal{E}_L^{S'}) : \mathcal{N}(\mathcal{E}_L^S))_\Phi}{(\mathcal{E}_K^{S'} : \mathcal{E}_K^S\ \mathcal{N}(\mathcal{E}_K^{S'}))_\Phi} \ ;$$

c'est donc un multiple entier de la quantité fractionnaire $1/(\mathcal{E}_K^{S'} : \mathcal{E}_K^S\,\mathcal{E}_K^{S'[L:K]})_\varphi$, qui est égale à $\left[L:K\right]^{-\langle\Phi,\ \sum_{\mathfrak{p}\in S'\setminus S}\chi_\mathfrak{p}\rangle}$, puisque le quotient $\mathcal{E}_K^{S'}/\mathcal{E}_K^S$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de dimension $\langle\Phi,\ \sum_{\mathfrak{p}\in S'\setminus S}\chi_\mathfrak{p}\rangle$. Enfin, le second facteur est donné par le scolie 15 ; et il vaut précisément $\left[L:K\right]^{\langle\Phi,\ \sum_{\mathfrak{p}\in S'\setminus S}\chi_\mathfrak{p}\rangle}$, ce qui donne bien le résultat attendu.

3.- EXTENSION DES RÉSULTATS DU CAS PROCYCLIQUE.

Nous conservons les hypothèses de la section précédente, à ceci près que nous supposons désormais que L/K est, non plus une extension cyclique de corps de nombres, mais une $\mathbb{Z}_\ell$-extension (*). Suivant l'usage, nous notons Γ son groupe de Galois, que le choix d'un générateur topologique γ identifie au groupe additif des entiers ℓ-adiques :

$$\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell} \ .$$

Nous imposons toujours à L d'être métabélienne sur un sous-corps F de K, de degré relatif $d = [L:F]$ étranger à ℓ, et nous

(*) C'est dans [Ja$_4$] que nous avons développé pour la première fois l'idée d'écrire la formule des classes ambiges dans une $\mathbb{Z}_\ell$-extension. Ultérieurement, Iwasawa [Iw$_6$] a proposé une autre approche de ce résultat.

notons χ le caractère ℓ-adique du groupe abélien $\Delta = \mathrm{Gal}(K/F)$ qui définit le produit semi-direct $\Gamma \times \Delta$; c'est-à-dire que nous écrivons :

$$\tau\gamma\tau^{-1} = \gamma^{\chi(\tau)}, \quad \forall \tau \in \Delta ,$$

en faisant choix une fois pour toutes d'un relèvement de Δ dans $\mathrm{Gal}(L/F)$.
La résolvante

$$\theta = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \chi(\tau^{-1}) [\gamma^{\chi(\tau)} - 1]$$

engendre alors l'idéal d'augmentation de l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$, ce qui permet d'écrire directement $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\theta]]$, tout en conservant les relations de commutation :

$$\theta e_\varphi = e_{\varphi\chi}\, \theta$$

pour chaque idempotent primitif e_φ de l'algèbre semi-locale $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$.

a.- <u>La formule de Chevalley pour une $\mathbb{Z}_\ell$-extension</u>.

Pour chaque naturel n, désignons par Γ_n l'unique sous-groupe fermé d'indice ℓ^n dans Γ, et notons K_n son corps des invariants. Comme L est la réunion des K_n, le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/K)$ est la limite projective des quotients Γ/Γ_n, et les groupes de cohomologie $H^i(\Gamma, E_L^S)$ associés aux S-unités de L s'identifient aux limites inductives des groupes finis $H^i(\Gamma/\Gamma_n, E_{K_n}^S)$ (cf. [CF], Ch. V, § 2.4).
Le ℓ-groupe des S-classes de diviseurs $C\ell_L^S$ étant lui aussi la limite inductive des ℓ-groupes $C\ell_{K_n}^S$ attachés aux sous-corps K_n de degré fini, nous pouvons déduire la suite exacte des S-classes ambiges pour l'extension procyclique L/K des mêmes suites écrites pour ses sous-extensions cycliques K_n/K. Une simplification apparait alors : Les places ramifiées dans L/K l'étant totalement dans L/K_n pour n assez grand, il ne peut y avoir ramification qu'aux places au-dessus de ℓ, l'indice de ramification d'une place modérée étant nécessairement fini car borné par la ℓ-partie du degré résiduel du corps de base. En outre, le même argument montre que les places réelles ne peuvent se complexifier dans une $\mathbb{Z}_\ell$-extension. L'extension des diviseurs y est donc toujours injective, ce qui dispense de distinguer suivant la parité de ℓ.

En résumé, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ

du groupe Δ, et indépendamment de la parité de ℓ, la suite exacte des S-classes ambiges (théorèmes 12 & 13) prend la forme limite :

$$1 \to \mathrm{Cap}^S_{L/K,\varphi} \to H^1_{\varphi\chi}(\Gamma, \mathcal{E}^S_L) \to \mathrm{Ram}^S_{L/K,\varphi} \to [\mathcal{C}\ell^{S\Gamma}_L / j^S_{L/K}\,\mathcal{C}\ell^S_K]_\varphi$$
$$\to H^2_{\varphi\chi}(\Gamma, \mathcal{E}^S_L) \to \varinjlim (\mathcal{E}^S_K / \mathcal{E}^S_K \cap \mathcal{N}_n)_\varphi \to 1,$$

où le groupe

$\mathrm{Cap}^S_{L/K,\varphi} = \mathrm{Ker}_\varphi\, j^S_{L/K}$ représente la φ-partie de la S-ramification,

$\mathrm{Ram}^S_{L/K,\varphi} = \mathrm{Coker}\, d^S_{L/K}$ est la φ-partie de la S-ramification .

et où la limite inductive à droite est prise pour le système inductif donné par les applications normes $N_{n+1/n}$.

Cela étant :

<u>PROPOSITION III.1.19.</u>- Dans une $\mathbb{Z}_\ell$-extension L d'un corps de nombres K , métabélienne sur un sous-corps F , le quotient $\mathrm{Ram}^S_{L/K} = \mathcal{D}^{S\Gamma}_L / \mathcal{D}^S_K$ du ℓ-groupe des S-diviseurs ambiges du corps L , par le sous-module des S-diviseurs de K , est un $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module divisible de corang fini (*) :

$$\sum_{\mathfrak{p} \in R \setminus S} \chi_\mathfrak{p} ,$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des places de F , n'appartenant pas à S et (sauvagement) ramifiées dans L/K . Autrement dit , nous avons

$$\mathrm{Ram}^S_{L/K} \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p} \in R \setminus S} \Big((\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell[\Delta]\, e_{\chi_\mathfrak{p}} \Big) ,$$

si $e_{\chi_\mathfrak{p}}$ désigne l'idempotent de l'algèbre $\mathbb{Z}[\Delta]$ associé à l'induit $\chi_\mathfrak{p} = \mathrm{Ind}^{\Delta}_{\Delta_\mathfrak{p}} 1_{\Delta_\mathfrak{p}}$ à Δ du caractère de la représentation unité du sous-groupe de décomposition $\Delta_\mathfrak{p}$ de la place $\mathfrak{p}$ dans l'extension abélienne K/F .

En particulier, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, le corang de la φ-composante du module $\mathrm{Ram}^S_{L/K}$ est donné par l'identité :

(*) Nous appelons corang d'un $\mathbb{Z}_\ell$-module M le rang de son dual de Pontrjagin $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(M, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$.