CHAPITRE IV

STRUCTURE DES $\Lambda[\Delta]$-MODULES

REPRÉSENTATIONS ℓ-ADIQUES ASSOCIÉES AUX INVARIANTS CYCLOTOMIQUES

SOMMAIRE

1.- STRUCTURE DES $\Lambda[\Delta]$-MODULES.

2.- REPRÉSENTATIONS ℓ-ADIQUES ASSOCIÉES AUX INVARIANTS CYCLOTOMIQUES.

APPENDICE

STRUCTURE DES $\Lambda[\Delta]$ - MODULES

L'introduction de l'algèbre formelle $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$ dans la théorie des corps cyclotomiques est due à Jean-Pierre Serre. De fait, les théorèmes de structure sur les Λ-modules de type fini permettent de clarifier substantiellement l'arithmétique des $\mathbb{Z}_\ell$-extensions, et conduisent ainsi à des démonstrations simples des résultats essentiels d'Iwasawa sur cette question.

Nous nous proposons ici d'étendre ces théorèmes de structure au cas plus général où l'anneau des scalaires est une algèbre de groupe $\Lambda[\Delta]$ à coefficients dans l'anneau d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$, le groupe Δ étant supposé abélien, d'ordre étranger à ℓ, et muni d'une action par conjugaison sur le groupe procyclique $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$. Les résultats proposés s'organisent en deux volets largement indépendants : Le cas abélien, d'une part qui correspond à l'action triviale, et relève des méthodes de l'algèbre commutative, en particulier des résultats de Serre ; le cas métabélien, d'autre part, qui correspond à une action non triviale, et s'obtient par passage à la limite à partir des techniques classiques des algèbres à produits croisés.

Auparavant, nous introduisons la notion de suite paramétrée de $\mathbb{Z}_\ell[\Lambda]$-modules finis, qui joue un rôle essentiel dans l'étude arithmétique développée plus loin.

1.- PRÉSENTATION DE L'ALGÈBRE D'IWASAWA GÉNÉRALISEE $\Lambda[\Delta]$.

a.- Position du problème .

L'algèbre d'Iwasawa classique Λ est l'algèbre des séries formelles à une indéterminée $\mathbb{Z}_\ell[[T]]$ sur l'anneau des entiers ℓ-adiques. C'est un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{M} = \ell\Lambda + \Gamma\Lambda$, complet pour la topologie $\mathfrak{M}$-adique , et régulier de dimension 2 . Les idéaux premiers principaux d'un tel anneau sont de deux types (cf. [Sa_2], p.60) :

- l'idéal $\ell\Lambda$, d'une part , engendré par ℓ ,
- les idéaux premiers $P(T)\Lambda$ engendrés par les polynômes irréductibles distingués de l'anneau $\mathbb{Z}_\ell[T]$.

Enfin , les Λ-modules de type fini sont entièrement classifiés à pseudo-isomorphisme (*) près : chaque classe de pseudo-isomorphie dans la catégorie des Λ-modules noethériens contient un unique module qui s'écrit comme somme directe d'exemplaires de Λ et de quotients $\Lambda/\mathfrak{p}^n$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier principal de Λ ; un tel module est dit élémentaire .

L'introduction de l'algèbre Λ dans l'étude des corps cyclotomiques est dûe à Serre (**) (cf. [Se_1]) : Si K_∞ est une $\mathbb{Z}_\ell$-extension d'un corps de nombres K , i.e. une extension abélienne de K , dont le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$, il existe , pour chaque naturel n , un unique sous-corps K_n de K_∞ de degré ℓ^n sur K . Son groupe de Galois $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(K_n/K)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, et la limite projective des algèbres de groupe

$$\Lambda_\Gamma = \varprojlim \mathbb{Z}_\ell[\Gamma_n]$$

est , par définition , l'algèbre d'Iwasawa construite sur le groupe Γ. Le choix d'un progénérateur arbitraire γ du groupe Γ permet, en effet, de décrire Λ_Γ comme algèbre de séries formelles en l'indéterminée $(\gamma-1)$, l'anneau obtenu

$$\Lambda_\Gamma = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$$

étant en fait indépendant du choix de l'élément γ. Le théorème de structure rappelé plus haut permet alors de démontrer facilement le résultat essentiel d'Iwasawa , qui peut s'énoncer comme suit :

(*) Un pseudo-isomorphisme est un morphisme à noyau et conoyau finis.

(**) Dans les premiers articles sur la question ([Iw_3], [Iw_4]) , Iwasawa ne considère que des Γ-modules .

<u>Théorème</u> <u>fondamental</u>. - Soient X un Λ-module de type fini, noté additivement, et X_n le quotient $X/\nu_n X$, avec $\nu_n = \sum_{k=0}^{\ell^{n-1}} \gamma^k$. Si tous les X_n sont finis, il existe trois constantes entières λ, μ et ν, avec $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$, telles que l'ordre ℓ^{x_n} de X_n soit donné, pour n assez grand, par la formule :

$$x_n = \mu \quad {}^{n} + \lambda n + \nu .$$

Naturellement, Iwasawa s'intéressait avant tout au cas où X_n est le ℓ-groupe des classes d'idéaux du corps K_n, et c'est dans ce cadre bien précis qu'il a formulé son théorème. Dans la forme abstraite donnée ci-dessus le résultat s'applique cependant à bien d'autres groupes, sous la condition qu'ils soient représentables comme quotients finis $X/\nu_n X$ associés à un Λ-module noethérien. En revanche, certains modules classiques ne sont pas de cette forme : Par exemple le quotient d'exposant ℓ^n du ℓ-groupe des classes infinitésimales $\mathcal{C}_n$ (*) du corps K_n est bien un groupe fini, mais il ne s'écrit pas comme quotient $X/\nu_n X$ d'un Λ-module noethérien X ; malgré tout, son ordre est donné asymptotiquement par une formule analogue à celle présentée dans le théorème fondamental (mais faisant intervenir un invariant supplémentaire ρ). Nous donnerons plus loin une forme plus générale du théorème fondamental, permettant de rendre compte de ce type de situation.

Ensuite, il peut être intéressant d'étudier ce qui se produit lorsque la $\mathbb{Z}_\ell$-extension considérée K_∞/K est galoisienne sur un sous-corps F de K, par exemple lorsque K est abélien sur F, de degré relatif $d = [K : F]$ étranger avec ℓ. Cette situation se rencontre naturellement lorsque, ℓ étant impair, le corps F ne contient pas les racines ℓ-ièmes de l'unité, et que l'on désire cependant faire appel à la théorie de Kummer : L'extension cyclotomique K_∞, engendrée sur K par les racines d'ordre ℓ-primaire de l'unité, est une $\mathbb{Z}_\ell$-extension du corps $K = F[\zeta_\ell]$; elle est abélienne sur F ; et le

---

(*) D'après les résultats de la section II.2, le groupe $\mathcal{C}_n$ s'identifie au groupe de Galois $Gal(M_n/K_n)$ de la ℓ-extension abélienne ℓ-ramifiée maximale de K_n.

degré relatif $d = [K : F]$ divise $(\ell - 1) = [\mathbb{Q}[\zeta_\ell] : \mathbb{Q}]$. Dans ce cas, on retrouve les invariants de F à partir de ceux de K en faisant appel à la décomposition semi-locale de l'algèbre de Galois $Gal(K/F)$. Mais il peut arriver aussi que la $\mathbb{Z}_\ell$-extension considérée K_∞/K ne soit pas abélienne sur le corps de base F. Par exemple, si F est le corps des rationnels, et K une extension abélienne imaginaire de $\mathbb{Q}$, de degré d divisant $(\ell - 1)$, l'exactitude de la conjecture de Leopoldt pour K permet d'affirmer qu'il existe exactement $\left(\frac{d}{2} + 1\right)$ $\mathbb{Z}_\ell$-extensions de K qui sont galoisiennes sur $\mathbb{Q}$: la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique, qui est associée au caractère unité, et les $\frac{d}{2}$ $\mathbb{Z}_\ell$-extensions galoisiennes mais non abéliennes sur $\mathbb{Q}$, qui sont associées aux caractères ℓ-adiques imaginaires (*) du groupe $\Delta = Gal(K/\mathbb{Q})$. Dans ce cas, les Λ-modules étudiés sont aussi des $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules, et la rencontre de ces deux structures se traduit par des congruences significatives sur leurs invariants d'Iwasawa (cf. [Gi_1], [CK_1]). Pour bien comprendre l'origine de ces congruences, il est alors nécessaire d'étudier les groupes concernés en tant que $\Lambda[\Delta]$-modules.

b.- Définition de l'algèbre d'Iwasawa généralisée.

Dans tout ce qui suit, nous adoptons les conventions suivantes :

Conventions.-

(i) ℓ est un entier premier.

(ii) $\Gamma_\chi \Delta$ est un groupe profini, noté multiplicativement, produit semi-direct d'un sous-groupe procyclique Γ, isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$, et d'un groupe abélien Δ, d'ordre d étranger à ℓ.

(iii) L'homomorphisme de Δ dans $Aut\,\Gamma$, qui définit la loi de groupe sur le produit $\Gamma_\chi \Delta$, se factorise par un caractère ℓ-adique χ du groupe Δ, ce que traduit l'identité de conjugaison :

$$\tau \gamma \tau^{-1} = \gamma^{\chi(\tau)}$$

(*) Les caractères imaginaires absolument irréductibles sont ceux qui prennent la valeur (-1) sur la conjugaison complexe.

où γ est un progénérateur arbitraire de Γ , et τ un élément quelconque de Δ .

(iv) $H = \mathrm{Ker}\,\chi$ est le noyau du caractère χ , et $m = (\Delta : H)$ son ordre , qui divise $d \wedge (\ell - 1)$.

Cela étant , nous posons :

<u>DÉFINITION IV. 1. 1.</u>- Nous appelons algèbre d'Iwasawa du groupe profini $\Gamma_\chi \Delta$, et nous notons $\Sigma = \Lambda[\Delta]$, l'algèbre à produits croisés du groupe abélien Δ sur l'anneau d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell [[\gamma - 1]]$, tordue par l'identité :

$$\tau \gamma \tau^{-1} = \gamma^{\chi(\tau)} , \quad \forall \tau \in \Delta .$$

Lorsque χ est le caractère unité du groupe Δ , l'algèbre $\Lambda[\Delta]$ est l'algèbre abélienne de Δ à coefficients dans l'anneau Λ . Dans tous les autres cas , $\Lambda[\Delta]$ est une algèbre gauche , isomorphe au produit tensoriel $\mathbb{Z}_\ell [[\gamma - 1]] \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell [\Delta]$ muni de la multiplication non commutative induite par l'identité :

$$(\gamma' \otimes \tau')(\gamma \otimes \tau) = \gamma' \gamma^{\chi(\tau)} \otimes \tau' \tau .$$

Pour traduire commodément l'identité de conjugaison qui définit la multiplication dans l'algèbre $\Lambda[\Delta]$, il est naturel d'introduire l'élément résolvant :

$$\theta = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \chi(\tau^{-1}) [\gamma^{\chi(\tau)} - 1] .$$

Il vient , en effet :

<u>PROPOSITION IV. 1. 2.</u>- La résolvante θ attachée à un progénérateur arbitraire du groupe Γ satisfait la congruence :

(i) $\theta \equiv \gamma - 1 \pmod{(\gamma - 1)^2 \Lambda}$,

ainsi que la relation de commutation :

(ii) $\tau \theta \tau^{-1} = \chi(\tau)\, \theta$, $\forall \tau \in \Delta$.

Elle est égale à $(\gamma - 1)$, lorsque χ est le caractère unité ; et , dans tous les cas , elle permet d'écrire l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_\ell [[\gamma - 1]]$ sous la forme $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell [[\theta]]$.

Démonstration : Si r est une racine de l'unité dans $\mathbb{Z}_\ell$, la formule du binôme nous donne l'identité :

$$\gamma^r - 1 = [1 + (\gamma - 1)]^r - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{r}{k} (\gamma - 1)^k .$$

Il vient donc :

$$\theta = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \chi^{-1}(\tau) [\gamma^{\chi(\tau)} - 1] = (\gamma - 1) + \sum_{k \geq 2} \left[\frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \chi(\tau^{-1}) \binom{\chi(\tau)}{k} \right] (\gamma - 1)^k ,$$

ce qui établit la congruence annoncée .

Enfin , si τ est un élément quelconque de Δ , nous avons :

$$\tau \theta \tau^{-1} = \frac{1}{d} \sum_{\sigma \in \Delta} \chi(\sigma^{-1}) [\tau \gamma^{\chi(\sigma)} \tau^{-1} - 1] = \frac{\chi(\tau)}{d} \sum_{\sigma \in \Delta} \chi(\sigma^{-1} \tau^{-1}) [\gamma^{\chi(\sigma\tau)} - 1]$$
$$= \chi(\tau) \theta ,$$

ce qui achève la démonstration .

<u>COROLLAIRE IV.1.3.</u>- Le centre C de l'algèbre Σ est l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell [[\theta^m]] [H]$ du sous-groupe $H = \operatorname{Ker} \chi$ de Δ , à coefficients dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{Z}_\ell [[\theta^m]]$, où m est l'ordre du caractère χ .

L'algèbre tordue $\Sigma = \Lambda[\Delta]$ est un C-module libre de dimension m^2 ; elle contient $\Lambda[H]$ comme sous-algèbre commutative maximale ; $\Lambda[H]$ est de dimension m sur le centre C .

Démonstration : D'après la proposition 2 , tout élément x de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell [[\gamma - 1]]$ s'écrit comme série formelle en la résolvante θ , i.e. $x = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k \theta^k$. La condition $x \in C$ se traduit donc par l'identité :

$$\sum x_k \theta^k = x = \tau x \tau^{-1} = \sum x_k \tau \theta^k \tau^{-1} = \sum x_k \chi^k(\tau) \theta^k ,$$ pour tout τ de Δ, c'est-à-dire $x_k(\chi^k(\tau) - 1) = 0$, $\forall \tau \in \Delta$, soit encore $x_k = 0$, pour $k \not\equiv 0 \pmod m$. D'où la caractérisation du centre .

c.- <u>Décomposition semi-simple de l'algèbre Σ</u> .

Désignons par $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ le semi-groupe des caractères des $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules noethériens et projectifs , par $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ le groupe des caractères virtuels du groupe Δ sur l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$. L'ordre d du groupe abélien Δ étant supposé étranger à ℓ , l'anneau $R_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$ est muni d'un produit scalaire à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau^{-1})\, \psi(\tau) ;$$

et à chaque caractère ℓ-adique irréductible φ de Δ correspond un idempotent primitif de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$:

$$e_\varphi = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau^{-1}) .$$

Dans la décomposition semi-locale $\mathbb{Z}_\ell[\Delta] = \bigoplus_{\varphi \in R^{irr}_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)} \mathbb{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi$

de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$, chaque facteur isotypique $Z_\varphi = \mathbb{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi$ s'identifie à l'anneau local des entiers d'une extension cyclotomique non ramifiée de $\mathbb{Q}_\ell$, qui a pour degré $[Z_\varphi : \mathbb{Z}_\ell]$ le degré $d_\varphi = \langle \varphi, \varphi \rangle$ du caractère φ . En particulier , tout $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-module noethérien sans $\mathbb{Z}_\ell$-torsion est somme directe d'exemplaires de Z_φ , donc $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-projectif .

Malheureusement , cette décomposition semi-locale de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ ne se relève pas toujours en une décomposition d'algèbre de $\Lambda[\Delta]$: la décomposition à droite par les idempotents primitifs e_φ induit bien une décomposition de l'algèbre Σ comme module à gauche sur elle-même :

$$\Sigma = \bigoplus_{\varphi \in R^{irr}_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)} \Sigma_\varphi , \quad \text{avec } \Sigma_\varphi = \Lambda[\Delta]e_\varphi ,$$

mais les relations de commutation (ii) montrent que cette décomposition n'est pas compatible avec la structure d'algèbre dès que χ est non trivial. Plus précisément, l'identité (ii) se traduit ici par une translation des caractères :

<u>PROPOSITION IV.1.4.</u>- Les idempotents primitifs e_φ de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$, associés aux caractères ℓ-adiques irréductibles du groupe Δ vérifient l'identité de translation :

(iii) $\theta e_\varphi = e_{\varphi\chi}\theta$.

En particulier, les idempotents centraux primitifs de l'algèbre $\Sigma = \Lambda[\Delta]$ sont les idempotents associés aux induits à Δ des caractères ℓ-adiques irréductibles du noyau H du caractère χ .

Démonstration : Nous avons immédiatement :

$$\theta e_{\varphi} = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau)\, \theta \tau^{-1} = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau)\, \chi(\tau)\, \tau^{-1}\, \theta = e_{\varphi\chi}\, \theta \,,$$ pour

chaque caractère ℓ-adique irréductible φ de Δ , et , plus généralement :

$$\theta e_{\Phi} = e_{\Phi\chi}\, \theta \,,$$

si $e_{\Phi} = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \Phi(\tau)\, \tau^{-1}$ est l'idempotent de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell [\Delta]$ associé à un caractère ℓ-adique Φ de $R^{+}_{\mathbb{Z}}(\Delta)$, contenu dans le caractère régulier (i.e. à une somme finie disjointe de caractères irréductibles). Les idempotents centraux sont donc ceux qui vérifient l'identité $e_{\Phi} = e_{\Phi\chi}$, c'est-à-dire les idempotents associés aux caractères Φ , contenus dans le caractère régulier , et stables par translation de χ. Les caractères Φ qui sont stables par translation de χ sont évidemment les caractères ℓ-adiques nuls en-dehors de H ; ce sont les " multiples " de l'induit à Δ du caractère unité du sous-groupe H . En effet , dans la décomposition absolument irréductible du caractère Φ , la condition d'invariance $\Phi\chi = \chi$ exprime l'existence d'un caractère φ, à valeurs dans une extension de $\mathbb{Z}_\ell$, vérifiant l'identité : $\Phi = \varphi(1 + \chi + \dots + \chi^{m-1}) = \varphi \,.\, 1_H^\Delta$. Il vient en particulier $\mathrm{res}_H^\Delta \Phi = m \,.\, \mathrm{res}_H^\Delta \varphi$, et la restriction de φ à H est donc un caractère de $R_{\mathbb{Z}_\ell}(H)$.

<u>COROLLAIRE IV.1.5.</u>- Dans la décomposition irréductible

$$\Sigma = \bigoplus_{\Phi \in \mathrm{Ind}_H^\Delta (R^{irr}_{\mathbb{Z}}(H))} \Sigma e_{\Phi}$$ de l'algèbre Σ , les idempotents centraux

primitifs e_{Φ} sont associés aux caractères ℓ-adiques Φ du groupe Δ qui sont induits par les caractères ℓ-adiques irréductibles du noyau H. Les facteurs isotypiques $\Sigma_{\Phi} = \Sigma e_{\Phi}$ s'identifient aux algèbres tordues $\Lambda_{\Phi} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell [H]} \mathbb{Z}_\ell [\Delta]$, où $\Lambda_{\Phi} = \mathbb{Z}_{\Phi}[[\theta]]$ est l'algèbre des séries formelles sur l'extension non ramifiée Z_{Φ} de $\mathbb{Z}_\ell$ associée au caractère ℓ-adique irréductible $\frac{1}{m} \mathrm{Res}_H^\Delta \Phi$. Ce sont des algèbres gauches de dimension m^2 sur leur centre $Z_{\Phi}[[\theta^m]]$, qui contiennent les Λ_{Φ} comme sous-algèbres commutatives maximales .

Cela étant, le plan d'étude des $\Lambda[\Delta]$ - modules est clair :

- déterminer d'abord la structure et les propriétés des Λ_Φ - modules ;
- étendre ensuite les résultats obtenus au cas des Σ_Φ-modules.

Comme la somme directe des algèbres locales Λ_Φ (lorsque Φ parcourt l'ensemble des induits à Δ des caractères ℓ - adiques irréductibles de H) est l'algèbre abélienne $\Lambda[H]$ du groupe H à coefficients dans l'anneau d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\theta]]$, la première étape n'est autre que l'étude du cas abélien $\chi = 1$.

2.- STRUCTURE DES $\Lambda[\Delta]$ - MODULES DANS LE CAS ABÉLIEN .

Nous supposons dans cette section que χ est le caractère unité, c'est-à-dire que $\Lambda[\Delta]$ est l'algèbre abélienne du groupe Δ à coefficients dans l'anneau d'Iwasawa $\mathbb{Z}_\ell[[\theta]]$, où $\theta = \gamma - 1$ est la résolvante construite sur un progénérateur arbitraire du groupe $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_\ell$.

a.- Paramètres attachés à un $\Lambda[\Delta]$ - module noethérien .

Lorsque l'algèbre $\Lambda[\Delta]$ est abélienne , la décomposition directe $\mathbb{Z}_\ell[\Delta] = \bigoplus_{\varphi \in R^{irr}_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)} \mathbb{Z}_\ell[\Delta]\, e_\varphi$ de l'algèbre du groupe $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$, comme somme directe d'anneaux locaux complets de valuation discrète Z_φ , se propage en une décomposition directe $\Lambda[\Delta] = \bigoplus_{\varphi \in R^{irr}_{\mathbb{Z}}(\Delta)} Z_\varphi[[\theta]]$ de l'algèbre $\Lambda[\Delta]$, où chaque facteur isotypique $\Lambda_\varphi = Z_\varphi[[\theta]]$ est un anneau local complet régulier de dimension 2 , et un Λ - module libre de dimension $d_\varphi = [Z_\varphi : \mathbb{Z}_\ell] = \langle \varphi, \varphi \rangle$.

Si donc X est un $\Lambda[\Delta]$ - module noethérien (noté additivement) les résultats de Serre (cf. [Se_1] , § 5) permettent directement d'affirmer que chaque composante isotypique $X_\varphi = e_\varphi X$ est pseudo - isomorphe , en tant que Λ_φ - module noethérien , à une somme directe finie de Λ_φ-modules élémentaires irréductibles ; ce qui s'écrit :

$$X_\varphi \sim \Lambda_\varphi^{\rho_\varphi} \oplus [\bigoplus_{i=0}^{s_\varphi} \Lambda_\varphi / f_{\varphi,i}\, \Lambda_\varphi] \oplus [\bigoplus_{j=0}^{t_\varphi} \Lambda_\varphi / \ell^{m_{\varphi,j}}\, \Lambda_\varphi].$$

Dans cette formule, les $(f_{\varphi,i})_{i=0,\dots,s_\varphi}$ forment une famille décroissante de polynômes distingués de l'anneau $Z_\varphi[\theta]$ (ordonnée par divisibilité), et les $(m_{\varphi,j})_{j=0,\dots,t_\varphi}$ sont des entiers naturels non nuls. La pseudo-décomposition est d'ailleurs essentiellement unique sous les conditions énoncées. Autrement dit :

<u>THÉORÈME IV.1.6</u>.- Tout $\Lambda[\Delta]$-module noethérien X est pseudo-isomorphe à une somme directe finie de $\Lambda[\Delta]$-modules isotypiques élémentaires. Plus précisément, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, il existe un unique triplet $(\rho_\varphi, s_\varphi, t_\varphi)$ d'entiers naturels, une unique suite décroissante $(f_{\varphi,i})_{i=0,\dots,s_\varphi}$ de polynômes distingués de l'anneau $Z_\varphi[\gamma-1]$, et une unique suite décroissante $(m_{\varphi,j})_{j=0,\dots,t_\varphi}$ d'entiers naturels non nuls, tels que la φ-composante $X_\varphi = e_\varphi X$ du module X soit $\Lambda[\Delta]$-pseudo-isomorphe à la somme directe :

$$X_\varphi \sim \Lambda_\varphi^{\rho_\varphi} \oplus (\bigoplus_{i=0}^{s_\varphi} \Lambda_\varphi / f_{\varphi,i}\, \Lambda_\varphi) \oplus (\bigoplus_{j=0}^{t_\varphi} \Lambda_\varphi / \ell^{m_{\varphi,j}}\, \Lambda_\varphi).$$

L'entier ρ_φ est la dimension $\dim_{\Lambda_\varphi} X_\varphi$ du Λ_φ-module X_φ, et le polynôme $P_\varphi = \prod_{j=0}^{t_\varphi} \ell^{m_{\varphi,j}} \prod_{i=0}^{s_\varphi} f_{\varphi,i}$ est le polynôme caractéristique de son sous-module de Λ_φ-torsion.

<u>DÉFINITION IV.1.7</u>.- Nous appelons paramètres d'un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien X les caractères ℓ-adiques du groupe Δ définis à partir des invariants d'Iwasawa des composantes isotypiques de X par les formules

$$\rho = \sum_\varphi \rho_\varphi\, \varphi \quad , \quad \mu = \sum_\varphi \mu_\varphi\, \varphi \quad , \quad \text{et} \quad \lambda = \sum_\varphi \lambda_\varphi\, \varphi ,$$

où, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ, les entiers ρ_φ, λ_φ, et μ_φ mesurent respectivement la dimension $\dim_{\Lambda_\varphi} X_\varphi$ de la φ-composante de X, ainsi que le degré $\sum_{i=0}^{s_\varphi} \deg f_{\varphi,i}$ et la ℓ-valuation $\sum_{j=0}^{t_\varphi} m_{\varphi,j}$ du polynôme caractéristique de son sous-module de Λ_φ-torsion.

L'algèbre Λ_φ étant elle-même un Λ-module libre de dimension $d_\varphi = <\varphi, \varphi>$, un calcul direct montre ainsi que les invariants classiques d'Iwasawa d'un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien X, considéré comme Λ-module, ne sont autres que les degrés respectifs des paramètres de sa $\Lambda[\Delta]$-structure. Ainsi,

$$\dim_\Lambda X = \sum_\varphi \dim_\Lambda \Lambda_\varphi^{\rho_\varphi} = \sum_\varphi \rho_\varphi d_\varphi = \deg \rho \,,$$

et un résultat analogue vaut pour les paramètres λ et μ.

Cela dit, sous la forme générale donnée ci-dessus, les caractères ρ, μ, et λ, associés à un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien, sont caractérisés par le résultat fondamental suivant :

<u>THÉORÈME IV.1.8.</u>- Théorème des paramètres.- Soit X un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien de paramètres ρ, μ, et λ. Si $\nabla_n = \ell^{n+1}\Lambda + \omega_n\Lambda$ désigne l'idéal de l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$, engendré par l'élément ℓ^{n+1} et le polynôme $\omega_n = (\gamma^{\ell^n} - 1)$, il existe un unique caractère ℓ-adique virtuel ν du groupe Δ, tel que l'ordre $\ell^{x_n^\varphi}$ de la φ-composante du quotient $X/\nabla_n X$ soit donné, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ, et tout n assez grand, par la formule :

$$x_n^\varphi = <\rho, \varphi>(n+1)\ell^n + <\mu, \varphi>\ell^n + <\lambda, \varphi>n + <\nu, \varphi> .$$

La démonstration de ce résultat fait l'objet de la section qui vient :

b.- <u>Etude de la filtration d'un</u> $\Lambda[\Delta]$-<u>module noethérien associée aux idéaux</u> ∇_n .

<u>PROPOSITION IV.1.9.</u>- Pour chaque naturel n, désignons par $\nabla_n = \ell^{n+1}\Lambda + \omega_n\Lambda$ l'idéal de l'algèbre $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$ engendrée par l'élément ℓ^{n+1} et le polynôme $\omega_n = \gamma^{\ell^n} - 1$. Alors :

(i) Les idéaux $(\nabla_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite exhaustive strictement décroissante d'idéaux d'indice fini de l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]] = \mathbb{Z}_\ell[\theta]$.

(ii) Un $\Lambda[\Delta]$-module compact X est noethérien si et seulement s'il existe un n pour lequel le quotient $X/\nabla_n X$ est fini ; auquel cas les quotients $X/\nabla_n X$ sont tous des $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules finis.

(iii) Un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien X est fini si et seulement si les sous-modules $\nabla_n X$ sont nuls pour n assez grand.

Démonstration : L'assertion (i) est sans malice : D'un côté, comme ω_o est égal à $\gamma-1=\theta$, l'idéal ∇_o est précisément l'idéal maximal $\mathfrak{M}$ de l'algèbre Λ ; et l'identité $(\gamma^{\ell^n}-1)^{\ell} = (\gamma^{\ell^{n+1}}-1) + \ell(\gamma^{\ell^n}-1)P(\gamma)$, où P est un polynôme convenable de l'anneau $\mathbb{Z}[\gamma]$ montre, par une récurrence évidente, que ∇_n est contenu dans la puissance $(n+1)$-ième de l'idéal $\mathfrak{M}$. D'un autre côté, un calcul immédiat donne

$$(\Lambda : \nabla_n) = |(\mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z})[\Gamma_n]| = \ell^{(n+1)\ell^n},$$

ce qui établit (i). Les assertions (ii) et (iii) résultent alors du fait que les idéaux $(\nabla_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de voisinages de 0 dans l'algèbre compacte $\mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$.

Cela étant, le théorème 8 résulte d'une suite de cinq lemmes et du calcul de l'indice $(Y : \nabla_n Y)$ lorsque Y est élémentaire :

<u>LEMME IV.1.10.</u>- Soient Z_φ une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Z}_\ell$, et f un polynôme distingué de l'anneau $Z_\varphi[\gamma-1]$. Pour chaque naturel n assez grand, il existe alors deux polynômes a_n et b_n dans $Z_\varphi[\gamma-1]$ qui vérifient : $\sum_{k=0}^{\ell-1}\gamma^{k\ell^n} = \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \ell(1+\ell a_n)+b_n f$. L'élément $(1+\ell a_n)$ est inversible dans Λ_φ.

Démonstration (*) : Raisonnons dans l'anneau quotient $Z_\varphi[\gamma-1]/fZ_\varphi[\gamma-1]$.

(*) Ce résultat peut être regardé comme une généralisation de [Se$_1$], § 5, th. 8 (iii) ; cf. aussi [Or], lemme p. 18.

Si e est le degré du polynôme f, nous avons $(\overline{\gamma - 1})^{e} \equiv \overline{0} \pmod{\overline{\ell}}$, et donc $\overline{\gamma}^{\ell^{n-1}} - \overline{1} \equiv (\overline{\gamma - 1})^{\ell^{n-1}} \equiv \overline{0} \pmod{\overline{\ell}}$, dès que n est assez grand. Cela étant, il suit $\overline{\gamma}^{\ell^{n-1}} \equiv \overline{1} \pmod{\overline{\ell}}$, puis $\overline{\gamma}^{\ell^{n}} \equiv \overline{1} \pmod{\overline{\ell}^2}$, et enfin :

$\sum_{k=0}^{\ell - 1} \overline{\gamma}^{k\ell^n} \equiv \overline{\ell} \pmod{\overline{\ell}^2}$; ce qui est le résultat annoncé.

LEMME IV.1.11.- Soit $Y = T \oplus P$ un $\Lambda[\Delta]$-module élémentaire, somme directe de son sous-module de Λ-torsion T et d'un sous-module projectif P. Pour chaque naturel n, posons $\partial^n Y = \ell^{n+1} Y \cap \omega_n Y$. Nous avons

$\partial^n Y = \partial^n T \oplus \partial^n P$, avec $\partial^n T = \ell^{n-n_o} \partial^{n_o} T$ et $\partial^n P = \frac{\omega_n}{\omega_{n_o}} \ell^{n-n_o} \partial^{n_o} P$,

pour n_o assez grand, et tout n plus grand que n_o.

Démonstration : Tout $\Lambda[\Delta]$-module noethérien et projectif P étant facteur direct d'un module libre, nous avons immédiatement $\partial^n P = \ell^{n+1} P \cap \omega_n P = \ell^{n+1} \omega_n P$, par un argument de factorialité (les facteurs locaux Λ_φ de l'algèbre $\Lambda[\Delta]$ sont des anneaux réguliers donc factoriels). En particulier, il suit $\partial^n P = \frac{\omega_n}{\omega_{n_o}} \ell^{n-n_o} \partial^{n_o} P$, comme annoncé.

Considérons maintenant le sous-module de torsion T. Ses facteurs indécomposables, en nombre fini, sont de deux types : des quotients de la forme $\Lambda_\varphi / \ell^m \Lambda_\varphi$, d'une part ; des quotients de la forme $\Lambda_\varphi / f \Lambda_\varphi$, avec f distingué dans $Z_\varphi[\gamma - 1]$, d'autre part. Désignons par S la somme directe des seconds. Pour n assez grand, nous avons $\ell^n T = \ell^n S$, et donc $\partial^n T = \partial^n S$. Appliquons maintenant le lemme 10 à chacun des facteurs indécomposables de S. Pour n assez grand, disons $n \geq n_o$, nous obtenons $\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} S = \ell S$, d'où :

$$\begin{aligned} \partial^n S &= \ell^{n+1} S \cap \omega_n S = \ell^{n-n_o} \ell^{n_o+1} S \cap \frac{\omega_n}{\omega_{n_o}} \omega_{n_o} S = \\ &= \ell^{n-n_o} [\ell^{n_o+1} S \cap \omega_{n_o} S] = \ell^{n-n_o} \partial^{n_o} S \ ; \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

LEMME IV.1.12.- Soient Y un $\Lambda[\Delta]$-module élémentaire, et X un sous-module d'indice fini. Pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, la suite $((\partial^n Y_\varphi : \partial^n X_\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ des φ-parties des indices $(\partial^n Y : \partial^n X)$ est stationnaire.

Démonstration : Désignons par Y^{tor} le sous-module de torsion de Y, et notons pr la projection canonique $Y \to Y/Y^{tor}$. Nous avons :

$$(\partial^n Y_\varphi : \partial^n X_\varphi) = \frac{(\partial^n Y_\varphi : \partial^n Y_\varphi^{tor} + \partial^n X_\varphi)}{(\partial^n Y_\varphi^{tor} + \partial^n X_\varphi : \partial^n X_\varphi)} = \frac{(\mathrm{pr}(\partial^n Y_\varphi) : \mathrm{pr}(\partial^n X_\varphi))}{(\partial^n Y_\varphi^{tor} : \partial^n X_\varphi^{tor})}.$$

D'un côté, le lemme 11 nous donne $\mathrm{pr}(\partial^{n+1} Y_\varphi) = \ell \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} \mathrm{pr}(\partial^n Y_\varphi)$; et comme nous avons trivialement $\mathrm{pr}(\partial^{n+1} X_\varphi) \supset \ell \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} \mathrm{pr}(\partial^n X_\varphi)$, le numérateur, qui va donc décroissant pour n assez grand, est stationnaire.

D'un autre côté, nous avons $\partial^{n+1} Y_\varphi^{tor} = \ell\, \partial^n Y_\varphi^{tor}$ et $\partial^{n+1} X_\varphi^{tor} = \ell\, \partial^n X_\varphi^{tor}$, pour $n \geq n_o$ par une extension facile du lemme 11, puisque $\ell^{n_o} Y_\varphi^{tor}$ et $\ell^{n_o} X_\varphi^{tor}$ sont annulés par un même polynôme distingué $f \in Z_\varphi[\gamma - 1]$. Comme la multiplication par ℓ^{n_o} a tué le sous-module de $\mathbb{Z}_\ell$-torsion de Y_φ^{tor}, la multiplication par ℓ est injective sur $\ell^{n_o} Y_\varphi^{tor}$ et le dénominateur est stationnaire pour $n \geq n_o$.

LEMME IV.1.13.- Sous les hypothèses du lemme 12, la suite $((\nabla_n Y_\varphi : \nabla_n X_\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ des φ-parties des indices $(\nabla_n Y : \nabla_n X)$ est stationnaire.

Démonstration : Dans la suite exacte courte de $\Lambda[\Delta]$-modules finis

$$0 \to \partial^n Y_\varphi / \partial^n X_\varphi \to (\ell^{n+1} Y_\varphi / \ell^{n+1} X_\varphi) \oplus (\omega_n Y\varphi / \omega_n X_\varphi) \to \nabla_n Y_\varphi / \nabla_n X_\varphi \to 0,$$

les termes médians, qui vont décroissant, sont stationnaires. Le résultat annoncé résulte donc directement du lemme 12 précédent.

LEMME IV.1.14.- Soient X un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien, et Y l'unique

$\Lambda[\Delta]$-module élémentaire auquel il est pseudo-isomorphe (*). Pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, la suite des quotients $((X_\varphi : \nabla_n X_\varphi)/(Y_\varphi : \nabla_n Y_\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Démonstration : Prenons un pseudo-isomorphisme t de X dans Y, et considérons la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow X \xrightarrow{t} Y \longrightarrow C \longrightarrow 0 .$$

Le noyau N et le conoyau C étant finis, choisissons n_o assez grand pour avoir $N \cap \nabla_{n_o} X = 0$, et $\nabla_{n_o} C = 0$, i.e. $\nabla_n Y \subset t(X)$. Pour chaque $n \geq n_o$, nous obtenons alors la suite exacte

$0 \longrightarrow {}^{-1}t(\nabla_n Y)/\nabla_n X \longrightarrow X/\nabla_n X \longrightarrow Y/\nabla_n Y \longrightarrow C \longrightarrow 0$; et pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, la φ-partie de l'ordre du terme de gauche, qui est donnée par la formule $({}^{-1}t(\nabla_n Y_\varphi) : \nabla_n X_\varphi) = |N_\varphi|(\nabla_n Y_\varphi : \nabla_n t(X_\varphi))$, est constante pour n assez grand, en vertu du lemme 13.

c.- Suites paramétrées de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules finis.

DÉFINITION IV.1.15.- Nous disons qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules finis est paramétrée par les caractères ℓ-adiques virtuels $\rho = \Sigma_\varphi \rho_\varphi \varphi$, $\mu = \Sigma_\varphi \mu_\varphi \varphi$, $\lambda = \Sigma_\varphi \lambda_\varphi \varphi$, et $\nu = \Sigma_\varphi \nu_\varphi \varphi$, lorsque, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, l'ordre $\ell^{x_n^\varphi}$ de la φ-composante $X_{n,\varphi} = e_\varphi X_n$ du module X_n est donnée asymptotiquement par la formule (**) :

$$x_n^\varphi = \langle\rho, \varphi\rangle(n+1)\ell^n \langle\mu, \varphi\rangle\ell^n + \langle\lambda, \varphi\rangle n + \langle\nu, \varphi\rangle =$$

$$= d_\varphi(\rho_\varphi n\ell^{n+1} + \mu_\varphi \ell^n + \lambda_\varphi n + \nu_\varphi) .$$

Remarque.- L'entier x_n^φ étant toujours positif, le caractère ρ interve-

---

(*) Si X n'est pas de torsion, il n'existe pas toujours de pseudo-isomorphisme de Y dans X.

(**) Cette définition est plus restrictive que celle de [Ja8].

nant dans la définition est toujours positif. Il en est de même du caractère μ si ρ est nul, et du caractère λ si ρ et μ sont tous deux nuls. En revanche, il peut arriver que les caractères λ ou μ ne soient pas dans $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$, dès lors que le caractère dominant y est. Des exemples sont donnés dans la section 2.

Compte tenu du lemme 14, le théorème 8 résulte de la proposition suivante :

<u>PROPOSITION IV.1.16</u>.- Soient Y un $\Lambda[\Delta]$-module élémentaire, et ℓ^{y_n} l'ordre du quotient $Y/\nabla_n Y$.

(i) Pour $Y = \Lambda_\varphi$, il vient : $y_n = d_\varphi (n+1)\ell^n$.

(ii) Pour $Y = \Lambda_\varphi/\ell^m \Lambda_\varphi$, il vient : $y_n = d_\varphi m\,\ell^n = \langle m\,\varphi, \varphi\rangle \ell^n$.

(iii) Pour $Y = \Lambda_\varphi/f\Lambda_\varphi$, il vient : $y_n = d_\varphi (n-n_o)\deg f + y_{n_o} = \langle \deg f . \varphi, \varphi\rangle n + \langle c^{te}\,\varphi, \varphi\rangle$.

Démonstration : Distinguons les trois cas :

(i) Pour $Y = \Lambda_\varphi$, nous avons $Y/\nabla_n Y \simeq (Z_\varphi/\ell^{n+1} Z_\varphi)[\Gamma_n]$, avec $\Gamma_n = \Gamma/\Gamma^{\ell^n} \simeq \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$; d'où

$$y_n = (n+1)\, d_\varphi\, \ell^n .$$

(ii) Pour $Y = \Lambda_\varphi/\ell^m \Lambda_\varphi$, et $n+1 \geq m$, nous avons :
$Y/\nabla_n Y \simeq (Z_\varphi/\ell^m Z_\varphi)[\Gamma_n]$; d'où :

$$y_n = m\, d_\varphi\, \ell^n .$$

(iii) Pour $Y = \Lambda_\varphi/f\Lambda_\varphi$, le lemme 10 nous montre que pour n assez grand, disons $n \geq n_o$, nous avons $\nabla_n Y = \ell^{n-n_o} \nabla_{n_o} Y$; d'où :

$$(Y : \nabla_n Y) = (Y : \nabla_{n_o} Y)(\nabla_{n_o} Y : \ell^{n-n_o} \nabla_{n_o} Y) ;$$

et $\nabla_{n_o} Y$, qui est d'indice fini dans Y, est un Z_φ-module libre de dimension $\deg . f$. Notons $\ell^{c_o d_\varphi}$, avec $c_o \in \mathbb{N}$, l'ordre du Z_φ-module fini $Y/\nabla_{n_o} Y$. Nous obtenons, comme attendu :

$$y_n = y_{n_o} + d_\varphi (n - n_o) \deg f = d_\varphi [n \deg f + c^{te}], \quad \text{avec } c^{te} = c_o - n \deg f .$$

Dans le théorème 8, le choix de la famille $(\nabla_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suggéré par la théorie de Kummer. Néanmoins, d'autres choix sont possibles, comme le montre le résultat suivant :

<u>THÉORÈME IV.1.17.</u>- Soit X un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien de paramètres ρ, μ, et λ dans $R^+_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)$. Pour chaque entier relatif k, et tout n assez grand, désignons par $\nabla_{n,k} = \ell^{n+k} \Lambda + \omega_n \Lambda$ l'idéal de l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell [[\gamma - 1]]$ engendré par l'élément ℓ^{n+k} et le polynôme $\omega_n = \gamma^{\ell^n} - 1$. La suite des quotients $(X/\nabla_{n,k} X)_n$ est alors une suite paramétrée de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules finis, de paramètres ρ, $\mu + (k-1)\rho$, λ, et ν_k, pour un caractère ℓ-adique virtuel convenable ν_k du groupe Δ.

En particulier, les paramètres ρ et λ sont indépendants du choix de k ; il en est de même du paramètre μ, si X est de torsion.

Démonstration : Ce résultat s'établit exactement comme le théorème 8 ; il suffit pour cela de reprendre les lemmes 11 à 14, en remplaçant ∇_n par ∇_{n+k}, i.e. ℓ^{n+1} par ℓ^{n+k}. La différence provient de la proposition 16 (i). En effet, pour $Y = \Lambda_\varphi$, il vient :

$$Y/\nabla_{n,k} Y \simeq (Z_\varphi / \ell^{n+k} Z_\varphi)[\Gamma_n], \text{ d'où : } (Y : \nabla_{n,k} Y) = \ell^{d_\varphi (n+k) \ell^n},$$

ce qui conduit à la formule :

$$y_{n,k} = \langle \varphi, \varphi \rangle (n+1) \ell^k + \langle (k-1) \varphi, \varphi \rangle \ell^k .$$

Lorsque le module X n'est pas de torsion, le choix de k dans l'étude des quotients $X/\nabla_{n,k} X$ modifie donc le paramètre μ.

Le lien entre ce dernier théorème et les résultats classiques de la théorie d'Iwasawa est donné par les deux propositions suivantes.

PROPOSITION IV.1.18.- Soit X un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien et de torsion, de paramètres μ et λ. Si les modules quotient $X_n = X/\omega_n X$ sont finis, alors :

(i) Il existe un caractère ℓ-adique virtuel ν, tel que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit paramétrée par les caractères $\rho = 0$, μ, λ, et ν.

(ii) Pour chaque entier relatif k fixé, les sous-modules $\ell^{n+k}X_n$ sont deux à deux isomorphes pour n assez grand.

Démonstration : Il suffit naturellement de faire la démonstration lorsque X est isotypique.

(i) Supposons donc X isotypique de caractère φ, et considérons les quotients finis $X/\omega_n X$. Nous pouvons écrire : $(X:\omega_n X) = (X:\nabla_n X)(\nabla_n X:\omega_n X)$. D'après le théorème 8, le résultat annoncé sera donc établi si nous montrons que le groupe $\nabla_n X/\omega_n X$ est constant pour n assez grand. Or nous avons $\nabla_n X/\omega_n X = (\ell^{n+1}X + \omega_n X)/\omega_n X = \ell^{n+1}X/(\ell^{n+1}X \cap \omega_n X) = \ell^{n+1}X/\partial^n X$; et, pour n assez grand, la multiplication par ℓ^{n+1} tue le sous-module de Z_φ-torsion. Nous ne restreignons donc pas la généralité en supposant X sans Z_φ-torsion, c'est-à-dire (en vertu du théorème de structure rappelé en a) d'indice fini dans un Λ_φ-module élémentaire de polynôme caractéristique f distingué dans $Z_\varphi[\gamma-1]$. Cela étant, d'après le lemme 10, nous obtenons $\omega_n X = \ell^{n-n_o}\omega_{n_o}X$, pour $n \geq n_o$, d'où :

$$\nabla_n X/\omega_n X \simeq \ell^{n+1}X/\ell^{n-n_o}\partial^{n_o}X \simeq \ell^{n_o+1}X/\partial^{n_o}X \simeq \nabla_{n_o}X/\omega_{n_o}X,$$

comme annoncé.

(ii) Il vient de même : $\ell^{n+k}X_n \simeq \ell^{n+k}X/(\ell^{n+k}X \cap \omega_n X) \simeq$ $\simeq \ell^{n+k}X/\ell^{n-n_o}(\ell^{n_o+k}X \cap \omega_{n_o}X)$, d'où :

$$\ell^{n+k}X_n \simeq \ell^{n_o+k}X/(\ell^{n_o+k}X \cap \omega_{n_o}X) = \ell^{n_o+k}X_{n_o},$$

comme attendu.

PROPOSITION IV.1.19.- Soient X un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien et de torsion, de paramètres μ et λ, et Y un sous-module d'indice fini. Supposons choisi un entier naturel m, tel que les quotients $X_n = X/\frac{\omega_n}{\omega_m}Y$ soient finis, pour chaque $n \geq m$. Alors :

(i) Il existe un caractère ℓ-adique virtuel ν tel que la suite $(X_n)_{n \geq m}$ soit paramétrée par les caractères $\rho = 0$, μ, λ, et ν.

(ii) Pour chaque entier relatif k fixé, les sous-modules $\ell^{n+k}X_n$ sont deux à deux isomorphes pour tous les n assez grands.

Remarque : Ce dernier résultat peut être regardé comme une généralisation de la proposition 18 ci-dessus, qui correspond au cas $Y = \omega_m X$. Il a l'avantage de pouvoir s'appliquer, pour un choix arbitraire de Y, lors même que les quotients $X/\omega_n X$ ne sont pas tous finis, ce qui a lieu lorsque certains des polynômes caractéristiques f_φ des φ-composantes de X admettent des facteurs cyclotomiques (i.e. des diviseurs de la forme $\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}$, pour un n dans $\mathbb{N}$). En effet, pour m assez grand et $n \geq m$, les polynômes $\frac{\omega_n}{\omega_m}$ sont étrangers à tous les f_φ, et les modules quotients $Y/\frac{\omega_n}{\omega_m}Y$ sont donc finis.

Démonstration : Ici encore, nous pouvons supposer X isotypique dans la démonstration.

(i) L'égalité $(X : \frac{\omega_n}{\omega_m}Y) = (X:Y)(Y : \frac{\omega_n}{\omega_m}Y)$ permet de ne considérer que le cas $X = Y$. Cela étant, notons K_m le noyau de ω_n dans Y, et Z le quotient Y/K_m. La suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite croissante de sous-modules d'un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien, est stationnaire ; nous avons donc $K_{n+1} = K_n$ pour n assez grand, disons $n \geq n_o$. D'après la suite exacte courte canonique

$$0 \longrightarrow K_m/\frac{\omega_n}{\omega_m}K_n \longrightarrow Y/\frac{\omega_n}{\omega_m}Y \longrightarrow \omega_m Y/\omega_n Y \longrightarrow 0,$$

l'indice $(Y : \frac{\omega_n}{\omega_m}Y)$ se scinde en deux facteurs :

- le premier, $(K_m : \frac{\omega_n}{\omega_m}K_n) = (K_m : \frac{\omega_n}{\omega_m}K_{n_o}) =$

$= (K_m : \frac{\omega_{n_o}}{\omega_m}K_{n_o})(\frac{\omega_{n_o}}{\omega_m}K_{n_o} : \frac{\omega_n}{\omega_m}K_{n_o})$ s'écrit encore $(K_m : \frac{\omega_n}{\omega_m}K_n) =$

$= (K_m : \frac{\omega_{n_o}}{\omega_m}K_{n_o})(\frac{\omega_{n_o}}{\omega_m}K_{n_o} : \ell^{n-n_o}\frac{\omega_{n_o}}{\omega_m}K_{n_o})$, d'après le lemme 10 appliqué au module K_m annulé par le polynôme distingué ω_m. Dans la formule obtenue, le module $\frac{\omega_{n_o}}{\omega_m} K_{n_o}$, qui est d'indice fini dans K_m, est somme directe d'un module fini et d'un Z_φ-module libre de dimension deg f_m, si $f = f_m \cdot f'_m$ est la décomposition du polynôme caractéristique de Y comme produit d'un polynôme distingué f_m divisant une puissance de ω_m et d'un polynôme f'_m étranger à ω_m.

- le second facteur $(\omega_m Y : \omega_n Y) = (\omega_m Z : \omega_n Z)$ s'écrit encore $\frac{(Z : \omega_n Z)}{(Z : \omega_m Z)}$. Comme il est fini, le polynôme caractéristique f'_m du Λ_φ-module Z est étranger à tous les ω_n ; et l'indice $(Z : \omega_n Z)$ est donc donné par la proposition 18.

Récapitulant le tout, nous obtenons le résultat attendu.

(ii) Tout comme pour la proposition 18, nous obtenons pour n assez grand, disons $n \geq n_o$: $\ell^{n+k} X_n \simeq \ell^{n+k} X / (\ell^{n+k} X \cap \frac{\omega_n}{\omega_m} Y) =$

$$= \ell^{n+k} X / \ell^{n-n_o}(\ell^{n_o+k} X \cap \frac{\omega_{n_o}}{\omega_m} Y) \simeq \ell^{n_o+k} X / (\ell^{n_o+k} X \cap \frac{\omega_{n_o}}{\omega_m} Y) = \ell^{n_o+k} X_n ,$$

ce qui achève la démonstration.

3.- STRUCTURE DES $\Lambda[\Delta]$-MODULES DANS LE CAS MÉTABÉLIEN.

Nous supposons ici que χ n'est pas le caractère unité. Nous notons H son noyau dans Δ, et $m = (\Delta : H)$ son ordre, qui divise d et $(\ell - 1)$. Dans ce cas, l'algèbre $\Sigma = \Lambda[\Delta]$ est somme directe d'algèbres gauches $\Sigma_\Phi = \Lambda_\Phi \otimes_{\mathbb{Z}_\ell[H]} \mathbb{Z}_\ell[\Delta]$, de dimension m^2 sur leurs centres respectifs $C_\Phi = Z_\Phi[[\theta^m]]$, et qui contiennent les Λ_Φ comme sous-algèbres commutatives maximales. En particulier, si $F_\Phi = Q_\Phi((\theta^n))$ désigne le corps des fractions de l'algèbre C_Φ, le tensorisé $F_\Phi \otimes_{C_\Phi} \Sigma_\Phi$ est une algèbre simple centrale sur F_Φ, qui contient $Q_\Phi((\theta))$ comme sous-corps commutatif maximal.

a.- Description des Σ-modules projectifs de type fini .

Dans l'étude préliminaire (§ 1, c) nous avons distingué deux sortes d'idempotents dans l'algèbre Σ :

- les idempotents primitifs $e_\varphi = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau^{-1})\tau$, qui sont associés aux caractères ℓ-adiques irréductibles φ du groupe Δ.

- les idempotents centraux primitifs $e_\Phi = \sum_{\varphi | \Phi} e_\varphi$, qui sont associés aux induits à Δ des caractères ℓ-adiques irréductibles du sous-groupe H.

Les premiers gouvernent la décomposition de Σ comme module sur elle-même, les seconds sa décomposition d'algèbre.

PROPOSITION IV.1.20.- L'algèbre $\Sigma = \Lambda[\Delta]$ est somme directe d'un nombre fini d'algèbres gauches Σ_Φ de dimension m^2 sur leurs centres respectifs C_Φ ; chacune des algèbres commutatives C_Φ est un anneau local complet régulier de dimension 2. En particulier, tout Σ-module projectif de type fini est somme directe essentiellement unique de Σ-modules projectifs indécomposables de type fini.

(i) La décomposition de l'algèbre Σ, comme module sur elle-même, est donnée par :

$$\Sigma = \bigoplus_{\varphi \in R^{irr}_{\mathbb{Z}_\ell}(\Delta)} \Sigma e_\varphi = \bigoplus_{\Phi \in \mathrm{Ind}_H^\Delta(R^{irr}_{\mathbb{Z}_\ell}(H))} \Big[\bigoplus_{\varphi | \Phi} \Sigma e_\varphi \Big].$$

(ii) Pour chaque caractère $\Phi \in \mathrm{Ind}_H^\Delta(R^{irr}_{\mathbb{Z}_\ell}(H))$, il existe m_Φ classes d'isomorphie de Σ_Φ-modules noethériens projectifs et indécomposables, si m_Φ désigne le nombre de caractères ℓ-adiques irréductibles φ intervenant dans la décomposition de Φ ; elles sont représentées par les m_Φ-modules Σ_φ.

Démonstration : Le fait que tout Σ-module noethérien X s'écrive de façon essentiellement unique comme somme directe d'indécomposables résulte directement du théorème de Krull-Schmidt (*) appliqué à chacune des com-

---

(*) Pour plus de détails sur le théorème de Krull-Schmidt, on pourra consulter [Re], p. 88 .

posantes locales X_Φ : l'algèbre Σ_Φ est un module de type fini sur son centre C_Φ ; et l'anneau C_Φ est local, complet et noethérien. Bien entendu, si X est projectif, il en est de même de ses facteurs directs.

(i) La décomposition directe de Σ est immédiate ; il suffit donc de vérifier que les modules Σe_φ sont indécomposables. Et cela résulte du fait que, pour chaque Σ_Φ-module projectif noethérien et indécomposable I, le tensorisé $F_\Phi \otimes_{C_\Phi} I$ est somme directe d'exemplaires de $Q_\Phi((\theta))$.

(ii) D'après ce qui précède, il reste à montrer que deux modules Σe_φ et Σe_ψ, associés à des caractères distincts, ne sont pas Σ-isomorphes. Ce problème ne se pose, d'ailleurs, que lorsque φ et ψ sont deux facteurs irréductibles d'un même caractère $\Phi \in \mathrm{Ind}_H^\Delta(R^{irr}_{\mathbb{Z}_\ell}(H))$. Cela étant, supposons qu'il existe un tel isomorphisme f, et notons λe_ψ, avec $\lambda = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \theta^i \in Z_\Phi[[\theta]]$, l'image de e_φ. D'un côté, nous aurions $\lambda \in Z_\Phi[[\theta]]^*$, i.e. $\lambda_o \in Z_\Phi^*$, puisque f est un isomorphisme ; et d'un autre $e_\psi \lambda e_\psi = e_\psi f(e_\varphi) = f(e_\psi e_\varphi) = 0$, d'où $\lambda_o = 0$: une contradiction.

<u>SCOLIE IV.1.21</u>.- Les Σ-modules noethériens qui sont Σ-projectifs sont exactement ceux qui sont C-projectifs (i.e. projectifs sur le centre $C = \mathbb{Z}_\ell[[\theta^m]][H]$ de l'algèbre Σ).

Démonstration : Le résultat sera acquis si nous montrons que tout Σ-module X, noethérien et C-projectif, est un facteur direct de son tensorisé $X_\Sigma = \Sigma \otimes_C X$. Or cela est clair, puisque la suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\ p \longrightarrow X_\Sigma \underset{q}{\overset{p}{\rightleftarrows}} X \longrightarrow 0 ,$$

définie par $p(\sigma\otimes x) = \sigma x$, est scindée par l'application :

$$q \mid x \longmapsto \frac{1}{d} \sum_{\tau\in\Delta} \tau^{-1}\otimes(\tau x).$$

<u>PROPOSITION IV.1.22</u>.- Tout idéal projectif de l'algèbre Σ s'écrit comme somme directe indécomposable d'idéaux principaux

$$I = \bigoplus_{\Phi\in \mathrm{Ind}_H^\Delta(R^{irr}_{\mathbb{Z}_\ell}(H))} \bigoplus_{i=1}^{m_\Phi} I_{\Phi,i}, \text{ avec } I_{\Phi,i} = \Sigma x_{\Phi,i} = \Sigma_\Phi x_{\Phi,i}.$$

Dans cette décomposition, chaque idéal $I_{\Phi,i}$ est soit nul, auquel cas l'élément $x_{\Phi,i}$ est nul, soit isomorphe à l'un des m_Φ modules Σ_φ pour φ irréductible contenu dans Φ, auquel cas l'élément $x_{\Phi,i}$ est invariant par multiplication à gauche par e_φ ; nous disons alors que $x_{\Phi,i}$ est isotypique de caractère φ.

Démonstration : D'après la proposition 20, tout idéal projectif I de l'algèbre Σ s'écrit comme somme directe d'idéaux indécomposables principaux $I_\varphi = \Sigma x_\varphi = \Sigma_\Phi x_\varphi \simeq \Sigma_\Phi e_\varphi = \Sigma e_\varphi$. Cela étant, les relations d'orthogonalité des idempotents donnent immédiatement $e_\psi x_\varphi = 0$, pour $\psi \neq \varphi$, i.e. $x_\varphi = e_\varphi x_\varphi$, comme annoncé. Enfin, pour chaque caractère $\Phi \in \mathrm{Ind}_H^\Delta(R_{\mathbb{Z}_\ell}(H))$, le nombre de facteurs $I_{\Phi,i}$ intervenant effectivement dans la décomposition est majoré par l'entier m_Φ, puisque chacun d'eux est un Λ_Φ-module libre de dimension $\frac{m}{m_\Phi}$ (*).

<u>THÉORÈME IV.1.23</u>.- Tout Σ_Φ-module noethérien sans Λ_Φ-torsion est contenu comme sous-module d'indice fini dans un Σ_Φ-module projectif. Autrement dit, tout Σ-module noethérien, dont les Φ-composantes sont sans Λ_Φ-torsion, est pseudo-isomorphe à un Σ-module noethérien et projectif. Nous disons qu'un tel module est quasi-projectif.

Démonstration : D'après le théorème de structure établi dans le cas abélien (th. 6), pour tout Λ_Φ-module noethérien et sans torsion X, il existe un Λ_Φ-module libre L qui contient X comme sous-module d'indice fini. Tout le problème consiste donc à montrer que si X est un Σ_Φ-module, il en est de même de L. Désignons par $C_\Phi = Z_\Phi[[\theta^m]]$ le centre de l'algèbre Σ_Φ, et par $F_\Phi = Q_\Phi((\theta^m))$ son corps des fractions. Puisque X est d'indice fini dans L, le produit tensoriel $F_\Phi \otimes_{C_\Phi} L$, qui contient L de façon canonique, s'identifie au produit $F_\Phi \otimes_{C_\Phi} X$; c'est donc un Σ_Φ-module. Reste à vérifier que L est stable pour l'action de Σ_Φ. Pour chaque élément τ de Δ, le conjugué L^τ de L contient $X^\tau = X$ comme sous-module d'indice fini ; le

(*) On prendra garde au fait qu'un module indécomposable donné Σ_φ peut ainsi être représenté plusieurs fois dans la décomposition d'un idéal I, ce qui ne peut arriver lorsque I est égal à Σ.

sous-module $L' = \sum_{\tau \in \Delta} L^{\tau}$ de $F_{\Phi} \otimes_{C_{\Phi}} L$ engendré par L est donc une extension de L qui est d'indice fini $(L' : L)$. A son tour L' est contenu comme sous-module d'indice fini dans un Λ_{Φ}-module libre L'', inclus dans $F_{\Phi} \otimes_{C_{\Phi}} L$, et isomorphe à L. Cela étant, si h est l'endomorphisme de L'' qui envoie L'' sur L, le déterminant $\det h$ est nécessairement inversible puisque l'indice $(L'' : L)$ est fini. Autrement dit, h est inversible, et L est égal à L'', donc à L': Le module L est bien stable pour l'action de Σ_{Φ} ; comme il est Λ_{Φ}-libre, il est Σ_{Φ}-projectif en vertu du scolie 21 ; enfin, il contient X comme sous-module d'indice fini.

<u>COROLLAIRE IV.1.24</u>.- Tout Σ-module noethérien est pseudo-isomorphe à la somme directe d'un Σ-module noethérien et de torsion (i.e. d'un Σ-module noethérien dont les Φ-composantes sont de Λ_{Φ}-torsion) et d'un Σ-module noethérien quasi-projectif.

Démonstration : Il suffit naturellement de faire la démonstration lorsque X est un Σ_{Φ}-module noethérien. Dans ce cas, le sous-module de C_{Φ}-torsion T de X, qui est encore son sous-module de Λ_{Φ}-torsion, est annulé par une puissance finie P^e de son polynôme caractéristique $P \in Z_{\Phi}[\theta^m]$. Comme P^e est central dans Σ_{Φ}, son noyau $T = \mathrm{Ker}\, P^e$ dans X est donc un Σ_{Φ}-module. En particulier dans la suite exacte courte canonique

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow X \longrightarrow Y = X/T \longrightarrow 0\ ,$$

le terme de gauche T est un Σ_{Φ}-module noethérien et de torsion, et celui de droite $Y = X/T$ est un Σ_{Φ}-module noethérien quasi-projectif. Cela étant, d'après le théorème 23 ci-dessus, Y est contenu comme sous-module d'indice fini dans un Σ_{Φ}-module projectif $L = \oplus_{i=1}^{p} \Sigma_{\Phi} y_i$. Faisons choix d'un polynôme distingué $f \in Z_{\Phi}[\theta^m]$, étranger au polynôme caractéristique P, annulant L/Y. Pour chaque naturel n, la multiplication par f^n est alors un Σ_{Φ}-endomorphisme de X, dont le noyau N_n est un sous-module fini de T. Comme X est noethérien, la suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, et nous avons donc $N_n = N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ pour tout n assez grand. Quittes à quotienter X par le sous-module fini N, ce qui revient à faire un pseudo-isomorphisme, nous pouvons donc supposer désormais que la multiplication par f est un monomorphisme de X. Dans ce cas, X peut être regardé comme un sous-module de son tensorisé $f^{-1}X = f^{-1}C_\Phi \otimes_{C_\Phi} X$; et son sous-module de torsion T est alors contenu avec un indice fini dans celui $f^{-1}T$ de $f^{-1}X$. Cela posé, pour chaque $i = 1, \dots, p$, nous avons $fy_i \in Y$, puisque f annule le quotient L/Y. Faisons choix d'un x_i isotypique de X au-dessus de fy_i : Nous définissons ainsi, par linéarité, un Σ_Φ-morphisme de fL dans X. Ce morphisme se prolonge de façon unique en un Σ_Φ-morphisme s de Y dans $f^{-1}X$ (Si y appartient à Y, nous avons $fy \in fL$, et il suffit de poser $s(y) = f^{-1}s(fy)$). Cela étant, l'application $x \mapsto (x - s(x), \bar{x})$ est un Σ_Φ-pseudo-isomorphisme de X dans $f^{-1}T \oplus Y \sim T \oplus (X/T)$; ce qui achève la démonstration.

b.- Classification des Σ-modules noethériens.

Intéressons-nous maintenant aux Σ_Φ-modules noethériens sans condition de projectivité. Un tel module X est en particulier un Λ_Φ-module de type fini, pseudo-isomorphe comme tel à une somme directe finie de quotients de Λ_Φ par des puissances d'idéaux premiers principaux. Pour rendre compte de la Σ_Φ-structure du module X, il est naturel de remplacer les idéaux premiers principaux de l'algèbre Λ_Φ par des sous-modules projectifs convenables de l'algèbre Σ_Φ.

LEMME IV.1.25.- Pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, les sous-modules projectifs maximaux de l'idéal $\Sigma_\varphi = \Sigma e_\varphi$ de l'algèbre Σ sont de trois sortes :

(i) L'idéal $\ell\Sigma_\varphi$, isomorphe à Σ_φ, engendré par l'uniformisante ℓ de l'anneau Z_φ.

(ii) L'idéal $\theta\Sigma_\varphi$, isomorphe à $\Sigma_{\varphi\chi}$, engendré par la résolvante θ.

(iii) Les idéaux $\Sigma e_\varphi f e_\varphi$, isomorphes à Σ_φ, associés aux polynômes distingués irréductibles de valuation nulle de l'algèbre gauche $Z_\varphi[\theta^{m_\Phi}]$, dans l'isomorphisme $e_\varphi \Sigma e_\varphi \simeq (\mathbb{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi)[[\theta^{m_\Phi}]] = Z_\Phi[[\theta^{m_\Phi}]]$.

Démonstration : Considérons un sous-module I_φ d'un idéal indécomposable $\Sigma_\varphi = \Sigma e_\varphi$ de l'algèbre Σ_Φ. Si I_φ est projectif, le théorème de structure établi plus haut (proposition 22) nous permet d'écrire $I_\varphi = \Sigma_\Phi e_\psi x$, pour un caractère ℓ-adique irréductible ψ (représenté dans Φ) et un x dans Σ ; et l'inclusion $I_\varphi \subset \Sigma_\varphi$ nous donne alors immédiatement $I_\varphi = \Sigma_\Phi e_\psi x e_\varphi$. Ecrivons x comme série formelle $x = \sum_{i \in \mathbf{N}} x_i \theta^i$ à coefficients dans l'algèbre $\mathbf{Z}_\ell[\Delta]$. Les identités de commutation $e_\psi \theta^i = \theta^i e_{\psi\chi^{-i}}$ et les relations d'orthogonalité entre idempotents nous montrent que seuls interviennent dans les produits $e_\psi x e_\varphi$ les termes $x_i \theta^i$ pour lesquels le caractère $\psi\chi^{-i}$ est égal à φ. Si donc ψ s'écrit $\varphi\chi^{-\alpha}$, avec $\alpha \in \{0, 1, \dots, (m_\Phi - 1)\}$, nous pouvons factoriser θ^α, et écrire $e_\psi x e_\varphi = \theta^\alpha e_\varphi y e_\varphi$, avec $y \in (\mathbf{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi)[[\theta^{m_\Phi}]] \simeq Z_\varphi[[\theta^{m_\Phi}]]$. Utilisant alors le théorème de préparation de Weierstrass dans un cadre non commutatif, nous concluons que l'idéal I_φ est engendré par un élément de la forme $\theta^\alpha \ell^\mu e_\varphi f e_\varphi$, où le produit $e_\varphi f e_\varphi$ correspond, dans l'isomorphisme $e_\varphi \Sigma e_\varphi \simeq Z_\varphi[[\theta^{m_\Phi}]]$, à un polynôme distingué de valuation nulle de l'anneau $Z_\varphi[\theta^{m_\Phi}]$. Bien entendu, I_φ est maximal, parmi les sous-modules projectifs de Σ_φ, si et seulement si l'élément obtenu $\theta^\alpha \ell^\mu e_\varphi f e_\varphi$ est irréductible, ce qui conduit à la classification énoncée.

<u>LEMME IV.1.26</u>.- Tout idéal I_φ de l'algèbre Σ, contenu dans l'idéal Σ_φ, est un sous-module d'indice fini d'un idéal projectif $P_\varphi = \Sigma \ell^\mu \theta^\alpha e_\varphi f e_\varphi$ de l'algèbre Σ.

Démonstration : L'idéal I_φ est engendré par un nombre fini de générateurs $x_1, \dots, x_k$, que le théorème de préparation de Weierstrass permet de choisir sous la forme $x_i = \ell^{\mu_i} \theta^{\alpha_i} f_i e_\varphi$, avec f_i distingué de valuation nulle dans l'algèbre gauche $Z_\varphi[\theta]$. Posons $\mu = \inf_{i=1}^k \mu_i$, $\alpha = \inf_{i=1}^k \alpha_i$; et prenons pour f' le plus grand diviseur commun des f_i, regardés comme polynômes formels en l'indéterminée θ. L'idéal $I'_\varphi = \Sigma \ell^\mu \theta^\alpha f' e_\varphi$ contient I_φ comme sous-module d'indice fini. S'il n'est pas projectif (i.e. si f' n'est pas dans $Z_\varphi[\theta^{m_\Phi}]$), posons $e_\psi \ell^\mu \theta^\alpha f' e_\varphi = \ell^\mu \theta^\alpha f'_\psi e_\varphi$, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible ψ associé à φ (i.e. de la forme $\varphi\chi^{-k}$, pour $k = 0, 1, \dots, (m_\Phi - 1)$) ; et remplaçons f' par le plus grand diviseur commun f'' des f'_ψ : Nous obtenons un nouvel idéal $I''_\varphi = \Sigma \ell^\mu \theta^\alpha f'' e_\varphi$, qui