INTRODUCTION

Les pages qui suivent traitent de l'arithmétique des ℓ-extensions , et , plus précisément , de l'étude des ℓ-groupes de classes (d'idèles , de radicaux , de symboles , de diviseurs , ...) dans les ℓ-extensions , finies ou non , de corps de nombres algébriques .

L'ensemble est organisé en quatre chapitres largement indépendants , eux-mêmes divisés en deux sections autonomes , qui exposent chacune un aspect de cette arithmétique , et restent directement accessibles au lecteur plus particulièrement intéressé par un résultat bien précis . Cette indépendance , cependant , n'est pas absolue , puisque nous utilisons , le cas échéant , dans chacune des huit sections qui constituent cette thèse , tel théorème essentiel établi plus avant , au même titre qu'un résultat classique .

L'unité de ce travail réside avant tout dans l'accent mis sur les méthodes ℓ-adiques lors de la résolution des questions considérées . Nous entendons par là le développement systématique de techniques algébriques adaptées à l'étude des corps de nombres , de nature irréductiblement globales , mais où l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$ des entiers ℓ-adiques tient un rôle central . Cet emploi des nombres ℓ-adiques dans l'arithmétique algébrique , qui ne doit pas être confondu avec le recours aux méthodes locales , n'est d'ailleurs pas nouveau . Sans remonter aux origines , disons simplement ici que la présentation par Serre des résultats d'Iwasawa sur les groupes de classes des corps cyclotomiques - ce que nous appelons classiquement aujourd'hui la théorie d'Iwasawa - en est une bonne illustration .

Nous résumons ci-dessous le contenu des différents chapitres .

Le chapitre I est consacré aux ℓ-extensions abéliennes.

La section 1 (L'ARITHMÉTIQUE DES ℓ-EXTENSIONS ABÉLIENNES) expose les résultats fondamentaux de la théorie ℓ-adique du corps de classes. Elle prend appui sur l'isomorphisme algébrique et topologique qu'elle établit entre le groupe de Galois G_K de la ℓ-extension abélienne maximale d'un corps de nombres donné, et le ℓ-groupe des classes d'idèles de ce corps, défini comme le quotient $\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$ du ℓ-groupe $\mathcal{J}_K = \prod^{res}_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \varprojlim_k K_{\mathfrak{p}}^{\times}/K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^k}$ des idèles généralisés par le sous-groupe $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\times}$ des idèles principaux. La description obtenue, qui élimine complètement le problème des normes universelles de la théorie de Chevalley, permet de rendre compte plus directement de l'arithmétique des ℓ-extensions abéliennes, finies ou infinies. Elle ouvre enfin sur des interprétations simples des conjectures de Leopoldt et de Gross. Nous montrons ainsi que la conjecture de Leopoldt affirme exactement qu'une unité généralisée $\varepsilon \in \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K$, qui est localement partout une racine de l'unité, doit être une racine globale de l'unité ; tandis que la conjecture de Gross postule qu'en un sens la formule du produit $\prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \nu_{\mathfrak{p}} = 1$ est essentiellement la seule relation de liaison entre les valeurs absolues ℓ-adiques principales des éléments de $\mathcal{R}_K$.

La section 2 (LA THÉORIE DE KUMMER & LE K_2 DES CORPS DE NOMBRES) peut être regardée comme une reconstruction de l'article de Bertrandias et Payan sur les invariants cyclotomiques (*) à la lumière des idées de Tate sur le K_2 des corps de nombres. Nous y établissons un parallèle entre la description kummérienne des ℓ-genres dans une tour cyclotomique, et les résultats de Tate sur le K_2 (**). Plus précisément, à chaque corps de nombres K, nous associons un groupe universel $\overline{K}_2(K)$, ana-

(*) Γ-extensions et invariants cyclotomiques - Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 5 (1972), 517-548.

(**) Relations between K_2 and Galois cohomology - Inv. Math. 36 (1976), 255-274.

logue au groupe symbolique $K_2(\mathrm{K})$, et deux groupes finis $\overline{R}_2(\mathrm{K})$ et $\overline{K}_2(\mathrm{K})$, qui correspondent aux noyaux régulier et hilbertien de la K-théorie, et explicitent les correspondances remarquables entre ces deux noyaux et certains groupes de Galois classiques. Dans le premier cas, qui fait intervenir le noyau régulier $R_2(\mathrm{K})$ et le sous-groupe de torsion $\mathcal{T}_{\mathrm{K}}$ du ℓ-groupe des classes infinitésimales de K, la correspondance obtenue a déjà fait l'objet de travaux de Carroll (*), Greenberg (**), Kramer et Candiotti (***) ; dans le second cas, qui concerne les noyaux hilbertiens $H_2(\mathrm{K})$ et $\overline{H}_2(\mathrm{K})$, elle est entièrement nouvelle.

En appendice, nous donnons plusieurs formulations équivalentes de la condition suffisante de la conjecture de Leopoldt introduite par Bertrandias et Payan (****). Subsidiairement, nous montrons qu'elle entraîne aussi la conjecture de Gross.

- II -

Le chapitre II est consacré à l'arithmétique des infinitésimaux.

La section 1 (INDÉPENDANCE ℓ-ADIQUE DE NOMBRES ALGÉBRIQUES) traite d'abord du problème de l'indépendance ℓ-adique, qui se pose comme suit : Un nombre premier ℓ étant fixé, les logarithmes d'Iwasawa, associés aux complétés de K pour les places au-dessus de ℓ, permettent de construire un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme surjectif ℓog_ℓ du tensorisé multiplicatif $\mathcal{R}_{\mathrm{K}} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{K}^\times$ du corps K sur un $\mathbb{Z}_\ell$-réseau

---

(*) On the 2-primary part of $K_2(\mathcal{O})$ and on $\mathbb{Z}_2$-extensions for imaginary quadratic fields- Ph. D. Thesis, Cambridge, Mass.(1973) .

(**) A note on K_2 and the theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions - Am. J. Math. 100 (1978), 1235-1245.

(***) On K_2 and $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of number fields - Am. J. Math. 100 (1978), 177-196.

(****) Γ-extensions et invariants cyclotomiques - Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 5 (1972), 517-548.

$\log_\ell \mathcal{R}_K$ de son tensorisé additif $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K$. On se demande à quelle condition la restriction de cette application à un sous-module noethérien $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{R}_K$, engendré sur $\mathbb{Z}_\ell$ par des nombres algébriques, est une injection. Lorsque le corps K est galoisien, et que le module $\mathfrak{M}$, stable par $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, ne contient ni puissances de ℓ ni racines de l'unité, nous postulons que $\log_{\ell\,|\,\mathfrak{M}}$ est injective si et seulement si $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathfrak{M}$ est contenu dans la représentation régulière de $\mathbb{Q}_\ell[G]$.
Cette conjecture contient évidemment la conjecture de Leopoldt (pour laquelle $\mathfrak{M} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K$), et, sous une restriction technique, celle de Gross. Nous montrons qu'elle est vérifiée dès que l'algèbre $\mathbb{Q}_\ell[G]$ est un produit direct de corps, c'est-à-dire dans tous les cas où les méthodes transcendantes établissent ces deux dernières conjectures. Nous proposons enfin des minorations du rang ℓ-adique, directement dérivées d'un théorème de Waldschmidt (*), qui conduit aux meilleures bornes connues et donne asymptotiquement le rang conjectural.

La section 2 (CALCUL INFINITÉSIMAL DANS UN CORPS DE NOMBRES ALGÉBRIQUES) s'intéresse au groupe infinitésimal $\mathcal{J}_K$ qu'on peut définir comme sous-module de $\mathcal{R}_K$ formé des éléments (globaux) d'image locale 1 aux places divisant ℓ :
$\mathcal{J}_K = \{x \in \mathcal{R}_K \mid s_\ell(x) = 1 \text{ dans } \mathcal{K}_\ell^\times = \prod_{I|\ell} \varprojlim_k K_I^\times / K_I^{\times \ell^k}\}$. Via la théorie de Kummer, le groupe $\mathcal{J}_K$ permet de décrire les ℓ-extensions abéliennes ℓ-décomposées du corps K (i.e. celles pour lesquelles les places au-dessus de ℓ se décomposent complètement) ; dans l'isomorphisme du corps de classes, il correspond au contraire aux ℓ-extensions (abéliennes) de K qui sont ℓ-ramifiées (i.e. non ramifiées aux places étrangères à ℓ). Comme il existe des relations précises entre radicaux (au sens ordinaire) et classes infinitésimales d'une part, radicaux au sens infinitésimal et classes (ordinaires) d'autre part, nous obtenons ainsi une double dualité entre les notions de ℓ-ramification et de ℓ-décomposition. Nous calculons ensuite la cohomologie des groupes infinitésimaux, ce qui généralise les résultats de Gras (**) sur l'injectivité du transfert pour les

(*) A lower bound for the p-adic rank of the units of an algebraic number field- Actes congrès Budapest (1981).
(**) Groupe de Galois de la p-extension abélienne p-ramifiée maximale d'un corps de nombres - J. reine angew. Math. **333** (1982), 86-132.

groupes de Galois des ℓ-extensions abéliennes maximales ℓ-ramifiées, relativement à une ℓ-extension de corps de nombres. Nous étudions enfin les propriétés normiques des infinitésimaux qui commandent les questions de déploiement de la ramification dans les ℓ-extensions.

- III -

Le chapitre III est consacré à la théorie des genres.

La section 1 (LA FORMULE DES CLASSES AMBIGES ET SES GÉNÉRALISATIONS) commence par exposer la formule des classes ambiges de Chevalley dans le cadre des groupes de S-classes de diviseurs. La suite exacte obtenue contient pour diverses spécifications de S les formules données par Chevalley (*), pour les groupes de classes d'idéaux au sens ordinaire, par Gras (**) pour celles au sens restreint, ainsi que par d'autres auteurs. Elle s'appuie sur le formalisme des diviseurs qui est plus général que celui des idéaux. Dans un deuxième temps, nous reprenons l'ensemble des résultats obtenus pour les énoncer en termes de représentations ℓ-adiques dans le cas semi-simple où l'extension considérée, cyclique de degré ℓ^s, est métabélienne sur un sous-corps d'indice étranger à ℓ. L'existence de cette structure supplémentaire permet de mettre en relief le rôle du quotient de Herbrand, qui peut alors ne pas se simplifier. Nous nous intéressons enfin au cas d'une $\mathbb{Z}_\ell$-extension métabélienne sur un sous-corps. Les formules que nous obtenons précisent et généralisent à la fois celles données indépendamment par Iwasawa (***). Elles conduisent à des critères simples de trivialité ou de non trivialité des ℓ-groupes de classes.

(*) Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux - J. Fac. Sc. Tokyo 2 (1933), 402-405.

(**) Sur les ℓ-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier ℓ - Ann. Sci. Inst. Fourier 23 (1973), 1-48 .

(***) On cohomology groups of units for $\mathbb{Z}_p$-extensions - Am. J. Math. 105 (1983), 189-200 .

La section 2 (ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES GENRES) définit puis calcule le nombre de S-genres et le nombre de S-classes centrales de diviseurs pour une extension finie quelconque de corps de nombres. Les formules obtenues contiennent, pour diverses spécifications de S, celles déjà connues pour les groupes de classes d'idéaux au sens ordinaire dans le cas galoisien, au sens restreint dans le cas abélien. Nous étendons pour cela aux extensions finies le symbole de reste normique défini par Hasse pour les extensions abéliennes, et nous établissons dans ce cadre une réciproque de la formule du produit. Nous reprenons ensuite l'ensemble de ces résultats pour les exprimer en termes de représentations dans le cas semi-simple, fini d'abord, infini ensuite, évoqué plus haut, où l'extension considérée est métabélienne sur un sous-corps du corps de base. Le résultat essentiel est que les représentations obtenues, bien qu'ayant le même degré, ne coïncident pas avec celles données par les groupes de classes ambiges. En particulier, dans le cas d'une $\mathbb{Z}_\ell$-extension métabélienne mais non abélienne sur un sous-corps, nos conclusions diffèrent totalement de celles de Greenberg (*) pour la tour cyclotomique.

- IV -

Le chapitre IV est consacré à la théorie d'Iwasawa.

La section I (STRUCTURE DES $\Lambda[\Delta]$-MODULES) établit les théorèmes généraux sur la structure des modules de type fini sur l'algèbre (éventuellement gauche) d'un groupe abélien Δ (d'ordre étranger à ℓ) à coefficients dans un anneau d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma-1]]$.

(*) On a certain ℓ-adic representation - Inv. Math. 21 (1973), 117-124.

Nous introduisons ensuite la notion-clé de suite paramétrée de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$-modules finis, qui généralise la classique formule d'Iwasawa sur le nombre de classes des corps cyclotomiques, et ramène la recherche des invariants d'un $\Lambda[\Delta]$-module noethérien, de torsion ou non, à l'étude systématique de certains de ses quotients finis : Lorsque Δ agit trivialement sur le groupe procyclique $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$, une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est paramétrée par ρ, μ, λ et ν si, pour chaque caractère ℓ-adique irréductible φ du groupe Δ, et tout n assez grand , la ℓ-valuation x_n^φ de l'ordre de la φ-composante de X_n est donné par la formule :

$$x_n^\varphi = \langle\rho, \varphi\rangle(n+1)\ell^n + \langle\mu, \varphi\rangle\ell^n + \langle\lambda, \varphi\rangle n + \langle\nu, \varphi\rangle.$$

Une formule semblable vaut dans le cas non abélien.

La section 2 (REPRÉSENTATIONS ℓ-ADIQUES ASSOCIÉES AUX INVARIANTS CYCLOTOMIQUES) applique les résultats qui précèdent au cas de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique d'un corps de nombres. Nous montrons, au moins sous les deux conjectures de Leopoldt et de Gross, que les paramètres associés aux divers modules classiques donnés par le corps de classes, la théorie du Kummer, ou la K-théorie (groupes de Galois respectifs des ℓ-extensions abéliennes maximales ℓ-ramifiée, hilbertienne, non ramifiée, non ramifiée et ℓ-décomposée ; radicaux correspondant ; noyaux régulier et hilbertien de la K-théorie) se déduisent tous de l'un quelconque d'entre eux par des formules explicites ne faisant intervenir que des invariants galoisiens simples du schéma d'extensions. Nous montrons également que les paramètres lambda vérifient un spiegelungssatz plus fort que celui de Leopoldt. Nous illustrons enfin les résultats obtenus en calculant explicitement le caractère de défaut d'une conjecture de Coates (*) .

Deux tableaux , présentés en appendice , rassemblent les divers paramètres rencontrés au cours de cette étude .

(*) On K_2 and some classical conjectures in algebraic number theory - Ann. of Math. 95 (1972), 99-116 .