

Années 1984/85 - 1985/86

THEORIE DES NOMBRES

(fascicule 1)

J.-F. Jaulent : L'arithmétique des  $\ell$ -extensions  
(thèse de Doctorat d'Etat en Mathématiques,  
soutenue le 24 janvier 1986 à l'Université  
de Besançon)

349 p.

Ce n'est pas sans une certaine émotion que j'exprime ici ma reconnaissance

à Georges GRAS, qui a dirigé mes recherches avec chaleur, humour et infinie patience ; ses conseils, sa culture m'ont été extrêmement précieux ;

à Georges POITOU, qui m'a constamment manifesté sa bienveillance depuis mes débuts à l'École Normale, et me fait l'honneur aujourd'hui de présider le jury de soutenance ;

à John COATES, qui a manifesté l'intérêt qu'il porte à ce travail en acceptant si volontiers de venir à Besançon participer au jury ;

à Jean COUGNARD, dont l'amicale compréhension et la constante disponibilité ne m'ont jamais fait défaut ;

à Jacques MARTINET, qui m'a accueilli si cordialement à Bordeaux, entouré de ses conseils, fortifié de son énergie ;

à Michel WALDSCHMIDT, dont le cours d'arithmétique à Ulm a éveillé ma vocation de chercheur, et que je remercie tout particulièrement de participer au jury ;

à Alain YGER, qui m'a proposé un second sujet passionnant, et m'a initié avec patience aux secrets de la déconvolution.

---

Je tiens aussi à adresser mes plus vifs remerciements à Thérèse PARIS, qui, des mois durant, avec compétence et dévouement a assuré la dactylographie de la majeure partie de cette thèse ; à Catherine PAGANI, qui a poursuivi si heureusement ce travail, avec l'énergie et l'efficacité que nous lui connaissons ; à Rodolphe VRANA, qui a procédé au tirage avec sa rapidité et sa précision habituelle ; à Mauricette JAUBERT et à Louis POUPIN qui m'ont aidé à réaliser l'édition préliminaire.

Enfin, je n'aurais garde d'oublier que cette rédaction a pu être menée à bien grâce à l'hospitalité du C.N.R.S. Je l'en remercie très sincèrement ici.

## TABLE DES MATIÈRES

---

INTRODUCTION .....	1 → 7
--------------------	-------

### CHAPITRE I

Sommaire .....	10
----------------	----

#### 1.- L'ARITHMÉTIQUE DES $\iota$ -EXTENSIONS ABÉLIENNES

1.- Préliminaires à la théorie du corps de classes .....	14
a.- Définition des $\iota$ -groupes fondamentaux .....	14
b.- Présentation du $\iota$ -groupe des classes d'idèles .....	18
c.- Valeurs absolues $\iota$ -adiques principales et formule du produit .....	21
2.- Isomorphisme du corps de classes .....	24
a.- Énoncé des théorèmes fondamentaux .....	24
b.- Description des $\iota$ -extensions abéliennes d'un corps de nombres .....	28
c.- Les conjectures de Leopoldt et de Gross .....	32
3.- Propriétés normiques des $\iota$ -extensions abéliennes .....	37
a.- La norme dans une extension quelconque de corps de nombres .....	37
b.- Applications aux $\iota$ -genres cyclotomiques .....	40
c.- Récapitulatif des principaux groupes de normes .....	43

2.- LA THÉORIE DE KUMMER  
ET LE  $K_2$  DES CORPS DE NOMBRES

1.- Définition du radical universel $\mathfrak{R}$ .....	47
a.- Préliminaires : Théorie de Galois pour les radicaux universels .....	47
b.- Rappel de la description par Tate du groupe $K_2(K)_\ell$ .....	49
c.- Définition des groupes $\bar{K}_2(K)_\ell$ , et interprétation kummérienne .....	51
2.- Introduction du noyau régulier $\mathfrak{R}$ .....	53
a.- Interprétation symbolique : le groupe $R_2(K)_\ell$ .....	54
b.- Interprétation kummérienne : le groupe $\bar{R}_2(K)_\ell$ .....	56
c.- Interprétation régulière de la conjecture de Leopoldt .....	58
3.- Introduction du noyau hilbertien $\mathfrak{H}$ .....	60
a.- Interprétation symbolique : le groupe $H_2(K)_\ell$ .....	62
b.- Interprétation kummérienne : le groupe $\bar{H}_2(K)_\ell$ .....	65
c.- Interprétation hilbertienne de la conjecture de Leopoldt .....	67
4.- Les résultats fondamentaux de la dualité .....	70
a.- Comparaison des noyaux de la théorie de Kummer et de la $K$ -théorie .....	70
b.- Dualité pour le noyau régulier et le noyau hilbertien .....	71
c.- Isomorphisme du miroir .....	75

APPENDICE

Les conjectures de Leopoldt et de Gross .....	81
---	----

CHAPITRE II

Sommaire ..... 86

1.- INDÉPENDANCE  $\iota$ -ADIQUE DE NOMBRES ALGÈBRIQUES

1.- Position du problème et énoncé de la conjecture..... 91

    a.- Les deux complétions multiplicatives d'un corps de nombres..... 91

    b.- Énoncé de la conjecture..... 94

    c.- Discussion de la conjecture énoncée..... 98

2.- Minorations du rang  $\iota$ -adique et preuve de la conjecture  
dans le cas abélien..... 101

    a.- Preuve de la conjecture dans le cas abélien..... 101

    b.- Minorations du rang  $\iota$ -adique..... 103

    c.- Comparaison des divers résultats obtenus..... 108

3.- Application aux conjectures de Leopoldt et Gross..... 111

    a.- La conjecture de Leopoldt et le problème du rang  $\iota$ -adique  
des  $S$ -unités..... 111

    b.- La conjecture de Gross et le groupe des valeurs absolues  
 $\iota$ -adiques des  $S$ -unités..... 115

    c.- Application aux problèmes normiques dans les  
 $\mathbb{Z}_\iota$ -extensions..... 119

2.- CALCUL INFINITÉSIMAL DANS UN CORPS DE  
NOMBRES ALGÈBRIQUES.

1.- Éléments infinitésimaux d'un corps de nombres algébriques..... 126

    a.- Définition des éléments infinitésimaux..... 126

    b.- Interprétation kummérienne des infinitésimaux..... 128

    c.- Définition des diviseurs infinitésimaux..... 130

    d.- Interprétation arithmétique du groupe des classes  
infinitésimales..... 133

- 2.- Groupes de S-classes T-infinésimales..... 135
  - a.- Eléments T-infinésimaux..... 135
  - b.- S-classes T-infinésimales..... 137
  - c.- Interprétations arithmétiques : applications à la dualité..... 139
  
- 3.- La suite exacte des classes ambiges dans une extension galoisienne..... 142
  - a.- L'homomorphisme d'extension pour les groupes  $\mathcal{A}$  ..... 142
  - b.- Application au sous-groupe de torsion  $\mathfrak{G}$  ..... 145
  - c.- Extension aux  $\mathfrak{t}$ -groupes de S-classes T-infinésimales..... 148
  
- 4.- Genre infinitésimal d'une extension de corps de nombres..... 150
  - a.- L'application norme pour les groupes  $\mathcal{A}$  ..... 150
  - b.- S-genre T-infinésimal d'une extension de corps de nombres ..... 154
  - c.- Application au symbole de reste normique généralisé..... 157

CHAPITRE III

Sommaire.....164

1.- LA FORMULE DES CLASSES AMBIGES ET SES GÉNÉRALISATIONS.

- 1.- La formule de Chevalley pour les groupes de S-classes de diviseurs..... 168
  - a.- Présentation du groupe des S-classes de diviseurs d'un corps de nombres..... 168
  - b.- Démonstration de la formule des classes ambiges..... 171
  - c.- Analyse de la formule dans le cas cyclique..... 175
  
- 2.- Expression de la formule en termes de représentations dans le cas métabélien ..... 180
  - a.- Préliminaires..... 180
  - b.- Enoncé des résultats..... 182
  - c.- Application à la capitulation..... 186

3.- Extension des résultats au cas procyclique..... 189

- a.- La formule de Chevalley pour une  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension..... 190
- b.- Calcul du quotient de Herbrand dans le cas procyclique..... 193
- c.- Analyse de la formule obtenue ; critères de trivialité  
pour les groupes  $\mathcal{C}_L^S$  ..... 198

2.- ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES GENRES .

1.- Présentation de la théorie des genres..... 204

- a.- Définition du corps des S- genres relatif à  
une extension finie de corps de nombres..... 204
- b.- La formule du produit pour le symbole de reste normique..... 209
- c.- Comparaison du corps des genres et du corps des  
classes centrales..... 214

2.- Expression de la formule des genres en termes de repré -  
sentations..... 219

- a.- Etude du cas métabélien..... 219
- b.- Extension des résultats au cas procyclique :  
la formule des genres pour une  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension..... 224
- c.- Propriétés normiques des S- unités dans une  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension.... 229

CHAPITRE IV

Sommaire..... 240

1.- STRUCTURE DES  $\Lambda[\Delta]$ - MODULES .

1.- Présentation de l'algèbre d'Iwasawa généralisée..... 244

- a.- Position du problème..... 244
- b.- Définition de l'algèbre d'Iwasawa généralisée..... 246
- c.- Décomposition semi-locale de l'algèbre  $\Sigma$  ..... 248

2.- Structure des $\Lambda[\Delta]$ -modules dans le cas abélien.....	251
a.- Paramètres attachés à un $\Lambda[\Delta]$ -module noethérien.....	251
b.- Etude de la filtration d'un $\Lambda[\Delta]$ -module noethérien associée aux idéaux $\mathfrak{v}_n$ .....	253
c.- Suites paramétrées de $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -modules finis.....	257
3.- Structure des $\Lambda[\Delta]$ -modules dans le cas métabélien.....	262
a.- Description des $\Sigma$ -modules projectifs de type fini.....	263
b.- Classification des $\Sigma$ -modules noethériens.....	267
c.- Paramètres attachés à un $\Sigma$ -module noethérien.....	272

## 2.- REPRÉSENTATIONS $\ell$ -ADIQUES ASSOCIÉES AUX INVARIANTS CYCLOTOMIQUES .

1.- Etude du groupe de Galois de la $\ell$ -extension abélienne non ramifiée $\ell$ -décomposée maximale de $K_\infty$ .....	281
a.- Définition du groupe $\mathcal{C}^1$ .....	281
b.- Comparaison avec le groupe des classes au sens ordinaire.....	285
c.- Capitulation et structure des groupes de classes.....	292
2.- Etude du groupe de Galois de la $\ell$ -extension abélienne $\ell$ -ramifiée maximale de $K_\infty$ .....	298
a.- Définition du groupe $\mathcal{A}$ .....	298
b.- Etude du sous-groupe de torsion $\mathfrak{C}$ .....	302
c.- Capitulation pour les groupes $\mathfrak{C}_n$ , et application à la $K$ -théorie.....	307
3.- Etude du groupe de Galois de la $\ell$ -extension hilbertienne maximale de $K_\infty$ .....	311
a.- Définition du groupe $\mathfrak{H}$ .....	311
b.- Parallèle entre les conjectures de Leopoldt et de Gross.....	315
c.- Inégalités du miroir ( $\ell$ impair ) .....	318
d.- Application à une conjecture de Coates.....	321



APPENDICE

Tableaux de caractères..... 327

    a.- Caractères associés aux suites paramétrées de  
         $\mathbf{Z}_\mu[\Delta]$ -modules finis..... 328

    b.- Caractères associés aux  $\Lambda[\Delta]$ -modules noethériens  
        (avec conjugaison complexe) ..... 329

BIBLIOGRAPHIE..... 333