

SUR LES DENOMINATEURS DES FONCTIONS

ZÊTA PARTIELLES

Sur les dénominateurs des fonctions zêta partielles

Georges GRAS

Résumé : Soit k un corps de nombres totalement réel. Soient S_0 un ensemble fini de nombres premiers, S l'ensemble des places de k au-dessus de $S_0 \cup \{\infty\}$, et F/k une extension abélienne finie non ramifiée en dehors de S . Alors pour tout $p \in S_0$, les valuations p -adiques des dénominateurs des fonctions zêta partielles $\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1 - n)$, $\sigma_F \in \text{Gal}(F/k)$, $n \geq 1$, sont données explicitement. Il en résulte, en tout nombre premier, des critères analytiques pour la conjecture de Leopoldt dans k qui précisent ceux donnés par J.-P. Serre.

0) Introduction et résultat principal :

Soit k un corps de nombres totalement réel. Soit S_0 un ensemble fini de nombres premiers ; l'ensemble S des places de k au-dessus de $S_0 \cup \{\infty\}$ contient donc les $[k : \mathbb{Q}]$ places à l'infini de k ; soient alors k_S l'extension abélienne S -ramifiée maximale de k et $G_S = \text{Gal}(k_S/k)$. Soit F une extension finie de k dans k_S et soit $G_F = \text{Gal}(F/k)$. La fonction zêta partielle $\zeta_{S,F}$ est définie, pour chaque $\sigma_F \in G_F$, par prolongement analytique de

$$\zeta_{S,F}(\sigma_F, s) = \sum_{\mathfrak{a}} N\mathfrak{a}^{-s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \text{Ré}(s) > 1,$$

où la somme est prise sur les idéaux entiers \mathfrak{a} de k étrangers à S et tels que le symbole d'Artin $\left(\frac{F/k}{\mathfrak{a}}\right)$ soit égal à σ_F . D'après les résultats de H. Klingen et C.L. Siegel (cf. [Si]), on a $\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1 - n) \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 1$. Le résultat suivant sur les dénominateurs des fonctions zêta partielles, après avoir été conjecturé par J.-P. Serre, a été démontré par P. Deligne et K. Ribet [D-R], via les formes modulaires, ainsi que par D. Barsky [B] et P. Cassou-Noguès [CN], via la théorie de Shintani :

(0.0) **Théorème :** Soit $w_n(F)$, $n \geq 1$, le plus grand entier m tel que $(\text{Gal}(F(\mu_m)/F))^n = 0$, où μ_m désigne le groupe des racines m -ièmes de l'unité. Alors $w_n(F)\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1 - n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 1$.

Ce résultat donne la meilleure divisibilité générale pour les dénominateurs des fonctions zêta partielles, mais pour $p \in S_0$, la théorie des fonctions L p -adiques permet d'interpréter les éléments de Stickelberger d'ordre $n \geq 1$,

$$(0.1) \quad St_{S,F}^{(n)} = \sum_{\sigma_F \in G_F} \zeta_{S,F}(\sigma_F, 1 - n)\sigma_F^{-1},$$

comme les restrictions à F de \mathbb{Z}_p -distributions sur G_S issues de la pseudo-mesure de Deligne-Ribet DR_S associée à S (cf. (1.3.1)), et pour laquelle on connaît le terme polaire, grâce aux résultats de J.-P. Serre [S] et P. Colmez [C]. Il est alors possible de calculer

exactement les p -parties des dénominateurs en fonction des invariants standard de k que nous précisons par les quelques notations suivantes :

(0.2) **Notations :**

- (i) Pour tout nombre premier p , on désigne par S_p l'ensemble des idéaux premiers de k au-dessus de p ; de même on désigne par S_∞ l'ensemble des $[k : \mathbb{Q}]$ places à l'infini de k . Pour p premier on désigne par \mathbb{Q}_∞ la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de k et on pose $[k \cap \mathbb{Q}_\infty : \mathbb{Q}] = p^{n_p(k)}$, $n_p(k) \geq 0$. On pose enfin $q = p$ (resp. 4) si $p \neq 2$ (resp. $p = 2$).
- (ii) Lorsque \mathfrak{L} est un idéal premier de k , $N\mathfrak{L}$ désigne sa norme absolue, et lorsque \mathfrak{L} est une place à l'infini (réelle) de k , on pose $N\mathfrak{L} = -1$.
- (iii) On désigne par $D(k)$ et $h(k)$ le discriminant et le nombre de classes de k , et pour tout nombre premier p , on désigne par $R_p(k)$ le régulateur p -adique de k . On pose

$$\begin{aligned} \rho_{S,p}(k) &= \frac{h(k)R_p(k)}{2\sqrt{D(k)}} \prod_{\mathfrak{L} \in S} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{L}}\right) \\ &\sim_{2^{[k:\mathbb{Q}]}} \frac{h(k)R_p(k)}{2\sqrt{D(k)}} \prod_{p \in S_p} Np^{-1} \prod_{\mathfrak{L} \in S - S_p \cup S_\infty} (N\mathfrak{L} - 1), \end{aligned}$$

où \sim désigne la relation d'équivalence modulo \mathbb{Z}_p^* dans \mathbb{Q}_p^* .

D'après P. Colmez [C], on sait que $\rho_{S,p}(k)$ est le résidu en $s = 1$ de la fonction zêta p -adique $\zeta_{S,p}(k, s) = \zeta_p(k, s) \prod_{\mathfrak{L} \in S - S_p \cup S_\infty} (1 - N\mathfrak{L}^{-s})$, où $\zeta_p(k, s)$ est la fonction zêta p -adique de k , et que la p -partie de

$$a_{S,p}(k) = qp^{n_p(k)} \rho_{S,p}(k)$$

est, lorsque $R_p(k) \neq 0$, le nombre d'éléments du sous-groupe de torsion du p -sous-groupe de Sylow de G_S (cf. [S, (2.8), (2.9)]).

- (iv) On désigne enfin par ω le caractère de Teichmüller pour p sur G_S .

Le résultat principal est alors le suivant :

(0.3) **Théorème :** Soit F une extension abélienne finie S -ramifiée de k , et soit n un entier ≥ 1 . Alors pour tout $p \in S_0$, les valuations p -adiques $V_p(S, F, 1 - n)$ des dénominateurs des rationnels $\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1 - n)$, $\sigma_F \in \text{Gal}(F/k)$, sont indépendantes de σ_F et sont les suivantes :

- (i) ω^n est caractère de F : on a

$$V_p(S, F, 1 - n) = \text{Max} \left(0, v_p \left(\frac{[F : k]n}{\rho_{S,p}(k)} \right) \right);$$

- (ii) ω^n n'est pas caractère de F : on a $V_p(S, F, 1 - n) = 0$ sauf dans le cas particulier où $p = 2$, $n \equiv 1 \pmod{2}$ et $F \cap k(\mu_{2^\infty})$ est imaginaire, cas pour lequel on a :

$$V_2(S, F, 1 - n) = \text{Max} \left(0, v_2 \left(\frac{[F : F \cap k(\mu_{2^\infty})]}{2^{n_2(k)} \rho_{S,2}(k)} \right) \right).$$

(0.4) **Remarques :**

- (i) Nous avons, dans l'énoncé du théorème, supposé implicitement que la conjecture de Leopoldt est vérifiée pour $p \in S_0$ dans k (i.e. $\rho_{S,p}(k) \neq 0$), car on sait d'après [S] que, dans le cas contraire, les $\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n)$ sont toutes p -entières. Se reporter aussi aux énoncés (2.12.1') et (2.12.2') qui précisent le résultat précédent.
- (ii) Si l'on se donne un nombre premier p arbitraire, on peut, en considérant $S_0 = \{p\}$ et en choisissant $F \subset k_S$ convenable, obtenir des critères d'exactitude de la conjecture de Leopoldt pour p dans k , en termes de fonctions zêta partielles en $s \in -\mathbf{N}$ (cf. théorèmes (3.1), (3.2)).
- (iii) Ces résultats redonnent et précisent certains de ceux obtenus indépendamment par M. Kolster [K] au moyen de l'étude de la K -théorie étale ; voir également les résultats de T. Nguyen Quang Do [N] sur les noyaux sauvages étales d'ordres supérieurs.

1) **\mathbf{Z}_p -distributions de Stickelberger :**

Soit donc $p \in S_0$; rappelons l'essentiel des définitions liées aux questions de mesures p -adiques sur $G_S = \text{Gal}(k_S/k)$, et qui font intervenir, de manière essentielle, le fait que S contient S_p :

(1.1) **Définitions :**

- (i) Soit Λ_S (resp. Δ_S, Δ'_S) la \mathbf{Z}_p -algèbre topologique des \mathbf{Z}_p -mesures sur G_S , égale par définition à $\varprojlim_F \mathbf{Z}_p[G_F]$, $k \subseteq F \subset k_S$, $[F:k] < \infty$, où $G_F = \text{Gal}(F/k)$ (resp. son anneau total des fractions, puis la sous-algèbre des éléments $\frac{\nu}{\delta} \in \Delta_S$, $\nu, \delta \in \Lambda_S$, δ non nul et non diviseur de 0, pour lesquels les composantes δ_F sont aussi non nulles et non diviseurs de 0 dans $\mathbf{Z}_p[G_F]$, pour tout F). Les éléments de Δ_S sont appelés les \mathbf{Z}_p -distributions sur G_S ; parmi elles on distingue les \mathbf{Z}_p -pseudo-mesures λ qui sont telles que $(1-\sigma)\lambda \in \Lambda_S$ pour tout $\sigma \in G_S$ (cf. [S]).
- (ii) Pour toute \mathbf{Z}_p -mesure $\nu \in \Lambda_S$, on désigne donc par ν_F sa composante sur $\mathbf{Z}_p[G_F]$; l'application $\Lambda_S \rightarrow \mathbf{Z}_p[G_F]$, qui à ν associe ν_F , se prolonge en une application de Δ'_S dans $\mathbb{Q}_p[G_F]$, et nous l'appellerons pour simplifier la restriction à F (dans la mesure où elle est aussi issue de la restriction des automorphismes $G_S \rightarrow G_F$, par prolongement par \mathbf{Z}_p -linéarité, puis par densité de $\mathbf{Z}_p[G_S]$ dans Λ_S , et enfin par extension aux éléments de Δ'_S).
- (iii) Soit $k_\infty = k \mathbb{Q}_\infty$ la \mathbf{Z}_p -extension cyclotomique de k ; puisque l'on peut supposer la conjecture de Leopoldt satisfaite pour p dans k , le p -Sylow $A_S(p)$ de $A_S = \text{Gal}(k_S/k_\infty)$ est fini ; fixons une décomposition de G_S sous la forme $G_S = A_S \oplus \Gamma$, $\Gamma \simeq \mathbf{Z}_p$; pour $p \neq 2$ il est clair que Γ fixe $k(\mu_p)$ et pour $p = 2$, on peut toujours choisir Γ de telle sorte qu'il fixe $k(\sqrt{-1})$ (car $k_\infty \cap k(\sqrt{-1}) = k$), ce que nous supposons.

On désigne alors par α_{A_S} la \mathbf{Z}_p -mesure de Haar sur A_S normalisée par la condition que l'intégrale du caractère unité χ_0 vérifie $\langle \chi_0, \alpha_{A_S} \rangle = \#A_S(p)$.

Soit enfin γ un générateur topologique de Γ et soit $T = 1 - \gamma$.

(iv) On pose $M_0 = k(\mu_q)$, $M = k_\infty M_0 = k(\mu_{p^\infty})$; on définit les caractères continus suivants de G_S :

$$N : G_S \rightarrow \text{Gal}(M/k) \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbf{Z}_p^*,$$

qui est le caractère de l'action de G_S sur μ_{p^∞} et dont le noyau fixe le corps M ,

$$\langle \cdot \rangle : G_S \xrightarrow{N} \mathbf{Z}_p \rightarrow 1 + q\mathbf{Z}_p, \quad \omega : G_S \xrightarrow{N} \mathbf{Z}_p^* \rightarrow \text{tor}(\mathbf{Z}_p^*),$$

dont les noyaux fixent respectivement k_∞ et M_0 . On a $\omega \langle \cdot \rangle = N$.

(1.2) **Pseudo-mesure de Deligne-Ribet** : On sait (cf. [D-R], [S]) qu'il existe une \mathbf{Z}_p -pseudo-mesure DR_S associée de la façon suivante à la construction des fonctions L p -adiques :

Soit χ un caractère d'ordre fini de G_S ; alors la fonction

$$(1.2.1) \quad L_{S,p}(\chi, s) = \langle \chi \langle \cdot \rangle^{1-s}, DR_S \rangle, \quad s \in \mathbf{Z}_p,$$

est telle que

$$(1.2.2) \quad L_{S,p}(\chi, 1-n) = L_S(\chi\omega^{-n}, 1-n), \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

où, en posant $\chi(\mathfrak{A}) = \chi\left(\left(\frac{k_S/k}{\mathfrak{A}}\right)\right)$ pour tout idéal entier \mathfrak{A} de k étranger à S , L_S est la fonction de variable complexe définie par :

$$\begin{aligned} L_S(\chi, s) &= \sum_{\mathfrak{A}} \chi(\mathfrak{A}) N\mathfrak{A}^{-s} \\ &= L(\chi, s) \prod_{\mathfrak{L} \in S-S_\infty} (1 - \chi(\mathfrak{L}) N\mathfrak{L}^{-s}). \end{aligned}$$

(1.2.3) **Remarque** : La notation L_S rappelle que χ est vu comme caractère de Dirichlet modulo S et donc que la fonction L_S considérée peut ne pas être primitive.

On a alors [S, (1.15)] :

$$(1.2.4) \quad DR_S = c_S \alpha_{A_S} T^{-1} + \mu_S, \quad c_S \in \mathbf{Z}_p, \mu_S \in \Lambda_S.$$

De plus, le résultat de [C] montre, de façon essentielle, que c_S est une unité p -adique (résultat qui avait été conjecturé par J. Coates).

(1.3) **Transformée de Mellin d'ordre $n \geq 1$** :

L'application continue de G_S dans $\mathbf{Z}_p[G_S]$ qui à $\sigma \in G_S$ associe

$$m^{(n)}(\sigma) = (N\sigma)^n \sigma^{-1}$$

se prolonge par \mathbf{Z}_p -linéarité puis par densité en une involution de Λ_S qui se prolonge donc à Δ_S (mais on notera que ce n'est pas une involution sur Δ'_S).

On a alors le résultat suivant :

(1.3.1) **Lemme** : Pour tout $F \subset k_S$, $[F : k] < \infty$, et pour tout $n \geq 1$, on a $St_{S,F}^{(n)} = (m^{(n)}(DR_S))_F$.

On a, pour tout caractère ψ de G_S qui se factorise modulo $\text{Gal}(k_S/F)$ (i.e. pour tout caractère de F) :

$$\begin{aligned} \langle \psi, St_{S,F}^{(n)} \rangle &= \sum_{\sigma_F \in G_F} \zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n) \psi^{-1}(\sigma_F) \quad (\text{cf. (0.1)}) \\ &= L_S(\psi^{-1}, 1-n); \end{aligned}$$

or on a (cf. (1.2.2)) :

$$L_S(\psi^{-1}, 1-n) = L_{S,p}(\psi^{-1}\omega^n, 1-n),$$

ce qui s'écrit, par (1.2.1) :

$$\langle \psi, St_{S,F}^{(n)} \rangle = \langle \psi^{-1}\omega^n, DR_S \rangle = \langle \psi^{-1}N^n, DR_S \rangle;$$

l'identité suivante :

$$\langle \psi^{-1}N^n, \sigma \rangle = \langle \psi, m^{(n)}(\sigma) \rangle \text{ pour tout } \sigma \in G_S,$$

montre que l'on a :

$$\langle \psi, St_{S,F}^{(n)} \rangle = \langle \psi, m^{(n)}(DR_S) \rangle$$

pour tout caractère ψ de F ; il en résulte, dans $\mathbb{Q}_p[G_F]$, l'égalité

$$St_{S,F}^{(n)} = (m^{(n)}(DR_S))_F.$$

Ceci prouve que $(St_{S,F}^{(n)})_F$ est une \mathbb{Z}_p -distribution sur G_S qui appartient à Δ'_S (on peut le vérifier directement à partir des propriétés des $St_{S,F}^{(n)}$).

Nous notons $St_S^{(n)}$ cette distribution, notation qui est cohérente car la restriction de $St_S^{(n)}$ à F est bien $St_{S,F}^{(n)}$ au sens de (0.1). La mesure $\delta^{(n)} = m^{(n)}(T)$ en est un dénominateur dont les restrictions $\delta_F^{(n)}$ sont non nulles et non diviseurs de 0 dans $\mathbb{Z}_p[G_F]$ (cf. (2.7) ci-après).

(1.3.2) Corollaire : Les dénominateurs des $\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n)$ sont les mêmes que ceux de la restriction à F du terme polaire $m^{(n)}(c_S \alpha_{A_S} T^{-1})$ de $St_S^{(n)}$, écrit sur la base canonique de $\mathbb{Q}_p[G_F]$ (cf. (1.2.4)).

2) Calcul du terme polaire :

Posons

$$\pi_S^{(n)} = m^{(n)}(\alpha_{A_S} T^{-1});$$

on est amené à calculer $\pi_{S,F}^{(n)}$.

A partir des définitions (1.1), (iii) et (iv), précisons quelques notations :

(2.1) Notations :

- (i) On pose $[k \cap \mathbb{Q}_\infty : \mathbb{Q}] = p^{n_p(k)}$; l'image de G_S par le caractère $\langle \rangle$ est alors $1 + qp^{n_p(k)}\mathbb{Z}_p$.

(ii) Soit $M_0^{(n)}$ le sous-corps de $M_0 = k(\mu_q)$ fixe par le noyau de ω^n et soit $M^{(n)} = k_\infty M_0^{(n)}$.

(iii) On pose $B_S^{(n)} = \text{Gal}(k_S/M^{(n)})$ et $H^{(n)} = \text{Gal}(M^{(n)}/k_\infty)$.

(iv) On pose enfin $F^{(n)} = M^{(n)} \cap F$, $G_F^{(n)} = \text{Gal}(F/F^{(n)})$.

On a $m^{(n)}(T) = 1 - (N\gamma)^n \gamma^{-1} = 1 - \langle \gamma \rangle^n \gamma^{-1}$ puisque Γ fixe M_0 (cf. (1.1), (iii)) et donc que $\omega^n(\gamma) = 1$, et par conséquent, en posant

$$(2.2) \quad \delta^{(n)} = 1 - \langle \gamma \rangle^n \gamma^{-1},$$

il vient

$$(2.3) \quad (m^{(n)}(T))_F = \delta_F^{(n)} = 1 - \langle \gamma \rangle^n \gamma_F^{-1}.$$

Étudions maintenant $m^{(n)}(\alpha_{A_S})$ en écrivant

$$\alpha_{A_S} \sim \alpha_{B_S^{(n)}} \sum_{h \in H^{(n)}} h',$$

où h' désigne un prolongement arbitraire de $h \in H^{(n)}$ dans A_S .

On a donc, puisque la restriction à $B_S^{(n)}$ du caractère N^n est le caractère unité,

$$(2.4) \quad m^{(n)}(\alpha_{A_S}) \sim \alpha_{B_S^{(n)}} \beta^{(n)}$$

où

$$\beta^{(n)} = \sum_{h \in H^{(n)}} \omega^n(h) h'^{-1}.$$

Ceci conduit à (cf. (2.3), (2.4)) :

$$(2.5) \quad \pi_{S,F}^{(n)} \sim \frac{1}{\delta_F^{(n)}} \alpha_{B_S^{(n)},F} \beta_F^{(n)}.$$

(2.6) **Définition :** On pose

$$\theta_F^{(n)} = \sum_{i=0}^{p^r-1} \langle \gamma \rangle^{ni} \gamma_F^{-i},$$

où p^r , $r \geq 0$, est l'ordre de γ_F dans G_F .

Ceci étant, on a :

$$\begin{aligned} \delta_F^{(n)} \theta_F^{(n)} &= (1 - \langle \gamma \rangle^n \gamma_F^{-1}) \theta_F^{(n)} \\ &= 1 - \langle \gamma \rangle^{np^r} \\ &\sim nqp^{n_p(k)+r}. \end{aligned}$$

(2.7) **Remarque :** Ceci montre que $\delta_F^{(n)}$ (et $\theta_F^{(n)}$) sont non nuls et non diviseurs de 0 dans $\mathbf{Z}_p[G_F]$ et confirme l'appartenance de $St_S^{(n)}$ à Δ'_S (cf. (1.1), (i)) ainsi que l'existence de $(m^{(n)}(DR_S))_F$.

On étudie maintenant $\pi_{S,F}^{(n)}$ sous la forme issue de (2.5), compte-tenu de (2.6) :

$$(2.8) \quad \pi_{S,F}^{(n)} \sim \frac{1}{nqp^{n_p(k)+r}} \alpha_{B_S^{(n)},F} \beta_F^{(n)} \theta_F^{(n)}.$$

(2.9) **Lemme** : On a $\pi_{S,F}^{(n)} \sim c_F^{(n)} \alpha_{G_F^{(n)}} \beta_F^{(n)} \theta_F^{(n)}$, où

$$c_F^{(n)} \sim \frac{1}{np^r \#H^{(n)} \#G_F^{(n)}} \rho_{S,p}(k) \quad (\text{cf. (0.2), (iii)}).$$

En effet, $\alpha_{B_S^{(n)},F}$ est une mesure sur $G_F^{(n)}$ invariante par translation ; elle est donc de la forme $c \alpha_{G_F^{(n)}}$, $c \in \mathbb{Q}_p$, et c se calcule en écrivant que

$$\langle \chi_0, \alpha_{B_S^{(n)}} \rangle = c \langle \chi_0, \alpha_{G_F^{(n)}} \rangle ;$$

d'où

$$c = \frac{\#B_S^{(n)}(p)}{\#G_F^{(n)}(p)} = \frac{\#A_S(p)}{\#H^{(n)}(p) \#G_F^{(n)}(p)}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \#A_S(p) &\sim qp^{n_p(k)} \frac{h(k)R_p(k)}{2\sqrt{D(k)}} \prod_{\mathfrak{L} \in S} (1 - N\mathfrak{L}^{-1}) \\ &\sim qp^{n_p(k)} \rho_{S,p}(k) \quad (\text{cf. (0.2), (iii)}) ; \end{aligned}$$

d'où l'expression de $c_F^{(n)} \sim \frac{c}{nqp^{n_p(k)+r}}$.

(2.10) **Notations** : Pour simplifier les notations nous posons

$$\alpha_{G_F^{(n)}} = \alpha_F^{(n)}$$

(mesure de Haar sur $G_F^{(n)} = \text{Gal}(F/F^{(n)})$).

(2.11) **Lemme** : On a $\alpha_F^{(n)} \beta_F^{(n)} \neq 0$ si et seulement si $k_\infty F^{(n)} = M^{(n)}$.

On a en effet $\alpha_F^{(n)} \beta_F^{(n)} = \alpha_F^{(n)} \sum_{h \in H^{(n)}} \omega^n(h) h_{F^{(n)}}'^{-1}$ qui est non nul si et seulement si, par restriction à $F^{(n)}$, on a

$$(2.11.1) \quad \beta_{F^{(n)}}^{(n)} = \sum_{h \in H^{(n)}} \omega^n(h) h_{F^{(n)}}^{-1} \neq 0,$$

ce qui a lieu si et seulement si l'application canonique

$$H^{(n)} \rightarrow \text{Gal}\left(F^{(n)}/k_{\infty \cap F^{(n)}}\right)$$

est injective ; d'où la condition.

(2.11.2) **Remarque :** Pour $p \neq 2$, la condition équivaut à $M_0^{(n)} \subseteq F^{(n)}$ (i.e. ω^n est un caractère de F) ; pour $p = 2$, on a $k_\infty F^{(n)} = M^{(n)}$ exactement dans deux cas : le cas où ω^n est un caractère de F et le cas particulier où $M_0^{(n)} = k(\sqrt{-1})$ (i.e. n impair) et où $F^{(n)}$ est un corps imaginaire ne contenant pas $\sqrt{-1}$ (ainsi $F^{(n)}$ est un sous-corps de $k(\mu_{2^\infty})$ correspondant à un caractère de la forme $\chi\omega$, χ caractère de k_∞ distinct de χ_0).

Le cas où $k_\infty F^{(n)}$ est distinct de $M^{(n)}$ conduit donc à $\pi_{S,F}^{(n)} = 0$, soit $\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n) \in \mathbf{Z}_p$ pour tout $\sigma_F \in G_F$. On écarte ce cas d'intégralité et on suppose désormais que $k_\infty F^{(n)} = M^{(n)}$. On a toujours (cf. (2.9)) :

$$\pi_{S,F}^{(n)} \sim c_F^{(n)} \alpha_F^{(n)} \beta_F^{(n)} \theta_F^{(n)} ;$$

les coefficients de $\pi_{S,F}^{(n)}$ dans $\mathbf{Q}_p[G_F]$ sont constants sur les classes de G_F modulo $G_F^{(n)}$ et sont donnés par ceux de la restriction

$$(2.12) \quad c_F^{(n)} \beta_{F^{(n)}}^{(n)} \theta_{F^{(n)}}^{(n)}$$

dans $\mathbf{Q}_p[G_{F^{(n)}}]$.

On remarque que $M^{(n)}$ est le composé direct sur k de k_∞ et de $M_0^{(n)}$; la remarque (2.11.2) nous permet alors d'envisager 2 cas :

(2.12.1) **Cas où ω^n est caractère de $F^{(n)}$:** On a alors

$$\text{Gal}(F^{(n)}/k) \simeq \overline{H}^{(n)} \times \overline{\Gamma},$$

où

$$\overline{H}^{(n)} = \text{Gal}(F^{(n)}/F^{(n)} \cap k_\infty) \simeq H^{(n)}, \quad \overline{\Gamma} = \text{Gal}(F^{(n)}/M_0^{(n)}).$$

Dans ce cas, le groupe $\overline{\Gamma}$ est indépendant de n car $\# \overline{\Gamma} = [k_\infty \cap F : k]$ que l'on note p^{r_0} , $r_0 \geq 0$. On a alors (cf. (2.4), (2.6)) :

$$\begin{aligned} \beta_{F^{(n)}}^{(n)} &= \sum_{h \in H^{(n)}} \omega^n(h) h_{F^{(n)}}^{-1} \in \mathbf{Z}_p[\overline{H}^{(n)}], \\ \theta_{F^{(n)}}^{(n)} &= \sum_{i=0}^{p^r-1} \langle \gamma \rangle^{ni} \gamma_{F^{(n)}}^{-i} \in \mathbf{Z}_p[\overline{\Gamma}]; \end{aligned}$$

si $\beta_{F^{(n)}}^{(n)}$ est bien écrit sur la base canonique $\overline{H}^{(n)}$, il n'en est rien pour $\theta_{F^{(n)}}^{(n)}$, et il faut introduire $\text{Gal}(F/F^{(n)}F_0)$, où F_0 est le sous-corps de F fixe par γ_F ; on vérifie que $F^{(n)} \cap F_0 = M_0^{(n)}$; on a, en écrivant

$$i = \lambda p^{r_0} + j, \lambda \in [0, p^{r-r_0}[, j \in [0, p^{r_0}],$$

$$\begin{aligned} \theta_{F^{(n)}}^{(n)} &= \sum_{\lambda, j} \langle \gamma \rangle^{n(\lambda p^{r_0} + j)} \gamma_{F^{(n)}}^{-j} \\ &= \sum_{\lambda=0}^{p^{r-r_0}-1} \langle \gamma \rangle^{n\lambda p^{r_0}} \sum_{j=0}^{p^{r_0}-1} \langle \gamma \rangle^{nj} \gamma_{F^{(n)}}^{-j}, \end{aligned}$$

où

$$\sum_{\lambda=0}^{p^{r-r_0}-1} \langle \gamma \rangle^{n\lambda p^{r_0}} = \left(\langle \gamma \rangle^{np^{r_0} p^{r-r_0}} - 1 \right) \left(\langle \gamma \rangle^{np^{r_0}} - 1 \right)^{-1} \sim p^{r-r_0}.$$

On obtient alors par (2.12) que les p -parties des dénominateurs cherchées sont toutes égales à celle du dénominateur de $c_F^{(n)} p^{r-r_0}$, donc (cf. (2.9)) de :

$$\frac{1}{np^{r_0} \#H^{(n)} \#G_F^{(n)}} \rho_{S,p}(k) ;$$

or $p^{r_0} \#H^{(n)} \#G_F^{(n)} = [F : k]$, ce qui conduit au coefficient

$$\frac{1}{n[F : k]} \rho_{S,p}(k).$$

D'où l'expression (i) du théorème (0.3).

En effectuant les calculs précédents modulo \mathbf{Z}_p ($p \in S_0$), on obtient le résultat plus précis suivant :

(2.12.1') **Proposition** : Soit $\sigma \in G_S$ et soit $n \geq 1$ tel que ω^n soit un caractère de F ; alors, pour la restriction σ_F de σ à F , on a :

$$\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n) \equiv \frac{[F : F^{(n)}] p^{-v_p([F:F^{(n)})}}}{[F : k]} \frac{\log(1 + qp^{n_p(k)+r_0})}{1 - (1 + qp^{n_p(k)+r_0})^n} N^n(\sigma) \rho_{S,p}(k) \pmod{\mathbf{Z}_p}$$

(cf. (0.2), (iii) et (0.3), (i)), où $p^{r_0} = [F \cap k_\infty : k]$.

(2.12.2) **Cas particulier du cas $p = 2$** : C'est le cas (cf. (2.11.2)) où $F^{(n)}$ est imaginaire cyclique de degré noté 2^{r_0+1} sur k , distinct de $k(\sqrt{-1})$, et $n \equiv 1$ modulo 2 ; on a :

$$\beta_{F^{(n)}}^{(n)} = 1 - h_{F^{(n)}},$$

où h est le générateur de $H^{(n)}$,

$$\theta_{F^{(n)}}^{(n)} = \sum_{i=0}^{2^r-1} \langle \gamma \rangle^{ni} \gamma_{F^{(n)}}^{-i}.$$

Posons pour simplifier $\gamma_{F^{(n)}} = \tau$ (d'ordre 2^{r_0+1}) ; on a

$$h_{F^{(n)}} = \tau^{2^{r_0}}$$

et

$$\begin{aligned} \beta_{F^{(n)}}^{(n)} \theta_{F^{(n)}}^{(n)} &= \left(1 - \tau^{2^{r_0}}\right) \sum_{i=0}^{2^r-1} \langle \gamma \rangle^{ni} \tau^{-i} \\ &= \sum_{i=0}^{2^r-1} \langle \gamma \rangle^{ni} \tau^{-i} - \sum_{i=0}^{2^r-1} \langle \gamma \rangle^{ni} \tau^{-i-2^{r_0}}. \end{aligned}$$

Posons :

$$i = \lambda 2^{r_0+1} + j, \lambda \in [0, 2^{r-r_0-1}[, j \in [0, 2^{r_0+1}[;$$

comme n est impair, on peut faire les calculs avec $n = 1$. Il vient :

$$\beta_{F^{(1)}}^{(1)} \theta_{F^{(1)}}^{(1)} = \sum_{\lambda, j} \langle \gamma \rangle^{\lambda 2^{r_0+1} + j} \tau^{-j} - \sum_{\lambda, j} \langle \gamma \rangle^{\lambda 2^{r_0+1} + j} \tau^{-j-2^{r_0}} ;$$

dans le second terme, chaque somme sur j s'écrit :

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=0}^{2^{r_0}-1} \langle \gamma \rangle^{\lambda 2^{r_0+1} + j} \tau^{-j-2^{r_0}} - \sum_{j=2^{r_0}}^{2^{r_0+1}-1} \langle \gamma \rangle^{\lambda 2^{r_0+1} + j} \tau^{-j-2^{r_0}} \\ & = - \sum_{k=2^{r_0}}^{2^{r_0+1}-1} \langle \gamma \rangle^{\lambda 2^{r_0+1} + k - 2^{r_0}} \tau^{-k} - \sum_{k=0}^{2^{r_0}-1} \langle \gamma \rangle^{\lambda 2^{r_0+1} + k + 2^{r_0}} \tau^{-k}. \end{aligned}$$

Les coefficients de τ^{-j} sont les suivants, où $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$) si $j \in [0, 2^{r_0}[$ (resp. $j \in [2^{r_0}, 2^{r_0+1}[$) :

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} \langle \gamma \rangle^{\lambda 2^{r_0+1} + j} - \sum_{\lambda} \langle \gamma \rangle^{\lambda 2^{r_0+1} + j + \varepsilon 2^{r_0}} \\ & = \langle \gamma \rangle^j \left(1 - \langle \gamma \rangle^{\varepsilon 2^{r_0}} \right) \sum_{\lambda=0}^{2^{r-r_0-1}-1} \langle \gamma \rangle^{\lambda 2^{r_0+1}} \\ & = \langle \gamma \rangle^j \left(1 - \langle \gamma \rangle^{\varepsilon 2^{r_0}} \right) \left(\langle \gamma \rangle^{2^{r_0+1} 2^{r-r_0-1}} - 1 \right) \left(\langle \gamma \rangle^{2^{r_0+1}} - 1 \right)^{-1} \\ & \sim 2^{n_2(k)+r-1}. \end{aligned}$$

Ici les 2-parties des dénominateurs sont égales à celle du dénominateur de $c_F^{(n)} \times 2^{n_2(k)+r+1}$ qui est aussi celui de

$$\frac{2^{n_2(k)+1}}{\#H^{(n)} \#G_F^{(n)}} \rho_{S,p}(k) ;$$

on a $\#H^{(n)} = 2$, $\#G_F^{(n)} = [F : F \cap k(\mu_{2^\infty})]$; ce qui donne le rationnel p -adique :

$$\frac{2^{n_2(k)}}{[F : F \cap k(\mu_{2^\infty})]} \rho_{S,p}(k),$$

et conduit au cas (ii) du théorème (0.3).

De même que pour le cas général, on obtient ici :

(2.12.2') **Proposition** : On suppose que $F^{(1)} = F \cap k(\mu_{2^\infty})$ est une extension cyclique imaginaire de k distincte de $k(\sqrt{-1})$; alors pour $\sigma \in G_S$ et pour $n \equiv 1 \pmod{2}$, on a

$$\zeta_{S,F}(\sigma_F, 1-n) \equiv \frac{[F : F^{(1)}] 2^{-v_2([F:F^{(1)}])}}{[F : k]} \frac{\log(1 + 4 \cdot 2^{n_2(k)+r_0})}{1 + (1 + 4 \cdot 2^{n_2(k)+r_0})^n} N^n(\sigma) \rho_{S,2}(k) \pmod{\mathbf{Z}_2},$$

où $2^{r_0} = [f \cap k_\infty : k]$.

(2.13) **Eléments de Stickelberger usuels** : Pour $k = \mathbb{Q}$ et $n = 1$, considérons les éléments de Stickelberger usuels $St_F = \sum_{\sigma_F \in G_F} \zeta_F(\sigma_F, 0) \sigma_F^{-1}$; ici St_F est primitif, autrement dit on prend pour S_0 exactement l'ensemble des diviseurs premiers du conducteur f de F/\mathbb{Q} . On sait alors que

$$St_F = \sum_{a \in [1, f]'} \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{f} \right) \sigma_{a, F}^{-1}$$

où $[1, f]' = \{a \in [1, f], (a, f) = 1\}$ et où σ_a est l'automorphisme défini sur $\mathbb{Q}(\mu_f)$ par $\sigma_a(\xi) = \xi^a$ pour tout $\xi \in \mu_f$.

Comme $2fSt_F \in \mathbb{Z}[G_F]$, on va pouvoir donner, quel que soit p premier, la p -partie des dénominateurs des coefficients de St_F , car le seul cas qui puisse poser problème est le cas $p = 2$ lorsque $2 \notin S_0$, mais dans ce cas, la partie polaire en 2 est

$$\frac{1}{2} \sum_{a \in [1, f]'} \sigma_{a, F}^{-1} \sim \frac{1}{2} [\mathbb{Q}(\mu_f) : F] \alpha_F,$$

où α_F est la mesure de Haar sur G_F , et le calcul du dénominateur est immédiat.

On obtient donc le résultat suivant :

(2.13.1) **Corollaire** : Soit F une extension abélienne de \mathbb{Q} de conducteur f , et pour tout p premier, soit $V_p(F, 0)$ la valuation p -adique des dénominateurs des fonctions zêta partielles primitives $\zeta_F(\sigma_F, 0)$, $\sigma_F \in \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$; les nombres $V_p(F, 0)$ sont les suivants :

- (i) $p \nmid 2f$: on a $V_p(F, 0) = 0$;
- (ii) $p \mid f$ et ω est caractère de F (qui est donc imaginaire) : on a

$$V_p(F, 0) = \text{Max} \left(0, v_p(p[F : \mathbb{Q}]) - \sum_{\ell \mid f} v_p(\ell - 1) \right) ;$$

- (iii) $p \mid f$ et ω n'est pas caractère de F : on a $V_p(F, 0) = 0$ sauf dans le cas où $p = 2$ et F contient un sous-corps imaginaire de $\mathbb{Q}(\mu_{2^\infty})$, auquel cas on a

$$V_2(F, 0) = \text{Max} \left(0, v_2([F : F \cap \mathbb{Q}_\infty]) - \sum_{\ell \mid f} v_2(\ell - 1) \right) ;$$

- (iv) $p = 2$, $p \nmid f$: on a

$$V_2(F, 0) = \text{Max} \left(0, v_2(2[F : \mathbb{Q}]) - \sum_{\ell \mid f} v_2(\ell - 1) \right).$$

(2.13.2) **Remarque** : Si F est réel, $F \neq \mathbb{Q}$, on sait que $St_F = 0$ et ce qui précède (notamment le point (iv) du corollaire) conduit bien à $V_2(F, 0) = 0$. Si $F = \mathbb{Q}$, on sait que

$\zeta_{\mathbb{Q}}(0) = -\frac{1}{2} \left(St_{\mathbb{Q}} = \sum_{a \in [1,1]'} \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2} \right)$, et le point (iv) du corollaire conduit bien à $V_2(\mathbb{Q}, 0) = 1$.

3) Conjecture de Leopoldt et fonctions zêta partielles : Les résultats précédents nous permettent de donner des critères analytiques précis d'exactitude de la conjecture de Leopoldt pour p dans k , critères qui complètent certaines des remarques faites par J.-P. Serre [S, (3.17), c, d].

Ici on prend $S_0 = \{p\}$, p premier arbitraire, auquel cas $S = S_p \cup S_{\infty}$; on pose alors :

$$\begin{aligned} \rho_p(k) &= \rho_{S,p}(k) = \frac{h(k)R_p(k)}{2\sqrt{D(k)}} \prod_{\mathfrak{L} \in S} (1 - N\mathfrak{L}^{-1}) \\ &\sim 2^{[k:\mathbb{Q}]} \frac{h(k)R_p(k)}{2\sqrt{D(k)}} \prod_{\mathfrak{p} \in S_p} N\mathfrak{p}^{-1}. \end{aligned}$$

(3.1) Théorème : Soit k un corps de nombres totalement réel, et soit p premier :

(i) On a $R_p(k) \neq 0$ si et seulement s'il existe $e \geq 0$ tel que la fonction zêta partielle de k :

$$\zeta_{p,e}(s) = \sum_{\mathfrak{A}, N\mathfrak{A} \equiv 1 (qp^e)} N\mathfrak{A}^{-s}$$

ait une valeur non p -entière en $s = 0$.

(ii) Si $R_p(k) \neq 0$, alors on a :

$$v_p(\zeta_{p,e}(0)) = v_p\left(\frac{1}{2}\rho_p(k)\right) + n_p(k) - e < 0,$$

pour tout $e \geq e_0 = v_p(p^{n_p(k)+1}\frac{1}{2}\rho_p(k))$; on a en particulier :

$$R_p(k) \sim 4 \cdot 2^{-[k:\mathbb{Q}]} \prod_{\mathfrak{p} \in S_p} N\mathfrak{p}\sqrt{D(k)} h(k)^{-1} p^{e-n_p(k)} \zeta_{p,e}(0),$$

pour tout $e \geq e_0$.

Démonstration : Prenons pour F le corps $k(\mu_{qp^e})$, $e \geq n_p(k)$, qui est contenu dans le corps k_S pour $S = S_p \cup S_{\infty}$, et considérons la fonction zêta partielle $\zeta_{S,F}(id, s)$, notée plus simplement $\zeta_{p,e}(s)$; la fonction $\zeta_{p,e}(s)$ est donc définie par $\sum_{\mathfrak{A}} N\mathfrak{A}^{-s}$, où la somme

porte sur les idéaux entiers \mathfrak{A} de k tels que $(\frac{F}{\mathfrak{A}}) = id$, ce qui équivaut, par restriction à $L = \mathbb{Q}(\mu_{qp^e})$, à $(\frac{L/\mathbb{Q}}{N\mathfrak{A}}) = id$; or le groupe d'Artin de L/\mathbb{Q} est précisément :

$$\{(a), a > 0, a \equiv 1 \pmod{qp^e}\}.$$

Si $R_p(k) = 0$, on sait qu'en particulier $\zeta_{p,e}(0)$ est p -entière. Si $R_p(k) \neq 0$, $\zeta_{p,e}(s)$ est susceptible du cas (i) de (0.3), et la valuation du dénominateur de $\zeta_{p,e}(0)$ ($n = 1$) est

$$\text{Max} \left(0, v_p \left(\frac{[F:k]}{\rho_p(k)} \right) \right) ;$$

or $[F : k] = \varphi(qp^e)p^{-n_p(k)} \sim qp^{e-1-n_p(k)}$, et on obtient :

$$\text{Max} \left(0, v_p \left(\frac{2p^{e-n_p(k)}}{\rho_p(k)} \right) \right).$$

Il suffit alors d'imposer la relation $\frac{2p^{e-n_p(k)}}{\rho_p(k)} \sim p$ (i.e. $e_0 = v_p(p^{n_p(k)+1} \frac{1}{2} \rho_p(k))$) pour définir une valeur e_0 de e à partir de laquelle $\zeta_{p,e}(0)$ est non p -entière ; on a ensuite :

$$\frac{1}{2} \rho_p(k) \sim p^{e-n_p(k)} \zeta_{p,e}(0),$$

pour tout $e \geq e_0$.

D'où le fait que la valuation de $\zeta_{p,e}(0)$ soit linéaire strictement décroissante par rapport à e , et strictement négative à partir de e_0 .

Ceci précise complètement ce que l'on peut attendre au plan numérique.

Dans une direction en un sens opposée, on peut considérer la situation suivante :

Soit $\zeta_p(k, s)$ la fonction zêta p -adique de k (égale à $\zeta_{S,k}(id, s)$ avec $S = S_p \cup S_\infty$, selon les notations du § 0), et soit m_p l'ordre du caractère ω sur G_S (m_p est un diviseur pair de $p-1$ pour $p \neq 2$, et $m_2 = 2$) ; on peut alors énoncer :

(3.2) **Théorème** : Soit k un corps de nombres totalement réel, et soit p premier :

(i) On a $R_p(k) \neq 0$ si et seulement s'il existe $e \geq 0$ tel que $\zeta_p(k, 1 - \lambda m_p p^e)$ ne soit pas p -entière (condition indépendante du choix de $\lambda > 0$).

(ii) Si $R_p(k) \neq 0$, alors on a :

$$v_p(\zeta_p(k, 1 - \lambda m_p p^e)) = v_p\left(\frac{1}{2} \rho_p(k)\right) - e < 0,$$

pour tout $e \geq e_0 = v_p(p \frac{1}{2} \rho_p(k))$; on a en particulier :

$$R_p(k) \sim 4 \cdot 2^{-[k:\mathbb{Q}]} \prod_{\mathfrak{p} \in S_p} N_{\mathfrak{p}} \sqrt{D(k)h(k)}^{-1} p^e \zeta_p(k, 1 - \lambda m_p p^e),$$

pour tout $e \geq e_0$ et tout $\lambda > 0$ étranger à p .

Démonstration : Prenons donc $F = k$, supposons $R_p(k) \neq 0$ et appliquons le théorème (0.3) avec $n = \lambda m_p p^e$, $\lambda > 0$ étranger à p ; alors ω^n est bien caractère de F et la valuation du dénominateur de $\zeta_p(k, 1 - n)$ est

$$\text{Max} \left(0, v_p \left(\frac{n}{\rho_p(k)} \right) \right) = \text{Max} (0, e + v_p(2) - v_p(\rho_p(k))).$$

Ensuite, la valeur minimum e_0 de e pour laquelle $\zeta_p(k, 1 - \lambda m_p p^e)$ est non p -entière vérifie la relation :

$$e_0 - v_p\left(\frac{1}{2} \rho_p(k)\right) = 1,$$

d'où e_0 .

On a alors comme attendu :

$$\frac{1}{2}\rho_p(k) \sim p^e \zeta_p(k, 1 - \lambda m_p p^e),$$

pour tout $e \geq e_0$, ce qui conduit au point (ii) du théorème.

(3.3) Remarques :

(i) En vertu de (1.2.2), on a, pour tout $n \equiv 0 \pmod{m_p}$:

$$\zeta_p(k, 1 - n) = \zeta(k, 1 - n) \prod_{\mathfrak{p} \in S_p} (1 - N\mathfrak{p}^{n-1}) \sim \zeta(k, 1 - n) ;$$

on peut donc, dans (3.2), remplacer $\zeta_p(k)$ par $\zeta(k)$, ce qui signifie que, en pratique, les calculs de valeurs aux entiers négatifs de $\zeta(k, s)$ peuvent suffire à la détermination de $v_p(h(k)R_p(k))$. En outre, seuls les entiers n de la forme $\lambda m_p p^e$ peuvent donner des valeurs non p -entières pour $\zeta(k, 1 - n)$.

- (ii) On peut, sans difficulté, énoncer des formes mixtes de (3.1) et (3.2) en faisant intervenir à la fois un corps de rayon F convenable et les valeurs, en des entiers négatifs convenables, des fonctions zêta partielles correspondantes.
- (iii) L'énoncé (3.2) est à rapprocher de la proposition 4.2 de [K].

Bibliographie

- [B] Barsky, D., Fonctions zêta p -adiques d'une classe de rayon des corps de nombres totalement réels, Groupe d'Etudes d'Analyse Ultramétrique, 1977-1978 ; errata 1978-1979.
- [CN] Cassou-Noguès, P., Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p -adiques, Invent. Math. 51 (1979) 29-59.
- [C] Colmez, P., Résidu en $s = 1$ des fonctions zêta p -adiques, Invent. Math. 91 (1988) 371-389.
- [D-R] Deligne, P., Ribet, K.A., Values of abelian L -functions at negative integers over totally real fields, Invent. Math. 59 (1980) 227-286.
- [K] Kolster, M; Remarks on étale K -theory and Leopoldt's conjecture (1992), preprint.
- [N] Nguyen Quang Do T., Analogues supérieurs du noyau sauvage (1992), à paraître.
- [S] Serre, J.-P., Sur le résidu de la fonction zêta p -adique d'un corps de nombres, C.R. Acad. Sci., Série A, Paris 287 (1978) 183-188.
- [Si] Siegel, C.L., Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Göttingen Nach. 3 (1970), 15-56.

Georges GRAS
Laboratoire de Mathématiques
URA - CNRS n°741
F - 25030 Besançon Cedex