

Cycles de codimension 2 en produits  
de variétés de Severi-Brauer

N.A. KARPENKO

# CYCLES DE CODIMENSION 2 EN PRODUITS DE VARIÉTÉS DE SEVERI-BRAUER

NIKITA A. KARPENKO

**RÉSUMÉ.** Nous recherchons le groupe de Chow des cycles de codimension 2 en le produit de  $n$  variétés de Severi-Brauer ( $n \geq 2$ ). Nous analysons plus en détail

- le produit d'une variété biquaternionique et d'une conique;
- le produit de deux surfaces de Severi-Brauer.

## TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction	2
1. Deux résultats préliminaires	2
2. Groupe de Grothendieck de produit de variétés de Severi-Brauer	3
3. Variétés et algèbres disjointes	4
4. Variétés "génériques"	6
5. Algèbres "génériques"	7
6. Variété biquaternionique fois conique	9
7. Produit de deux surfaces de Severi-Brauer	12
Références	15

## 0. INTRODUCTION

Dans [9], nous recherchions le groupe de Chow  $\mathrm{CH}^2$  pour une variété de Severi-Brauer. Ici, en utilisant les mêmes méthodes, nous recherchons le même groupe pour un produit direct de mêmes variétés. La motivation pour ce travail est donnée par un résultat de Izhboldin ([5]): le corps de fonctions d'une variété de Severi-Brauer est universellement excellent ssi l'indice de l'algèbre correspondante n'est pas divisible par 4. Cependant, pour ce résultat, il avait besoin d'information certaine sur le groupe  $\mathrm{CH}^2$  du produit d'une variété bi-quaternionique et d'une conique (6.1).

Des premiers résultats sur le groupe  $\mathrm{CH}^2$  d'un produit de variétés de Severi-Brauer sont obtenus dans [14]. On y établit sa connexion avec le 3-ième groupe de cohomologie galoisienne ([14, theorem 4.1]) et on y construit un exemple d'un produit de trois coniques avec torsion dans  $\mathrm{CH}^2$  ([14, remark 6.1]).

Le résultat principal et général de l'article présent est 5.5 (avec le corollaire 5.6). Nous l'appliquons à des produits de deux variétés de petites dimensions (6.1), (7.1); on arrive en particulier à des exemples nouveaux de torsion dans  $\mathrm{CH}^2$ .

Nous utilisons la terminologie et la notation suivantes. Si on dit que  $A$  est une algèbre, on veut toujours dire que  $A$  est une algèbre centrale simple sur un corps. Pour une algèbre  $A$  sur un corps  $F$  on note  $[A]$  sa classe dans le groupe de Brauer  $\mathrm{Br}(F)$  de  $F$ ;  $\exp A$  désigne l'exposant,  $\deg A$  le degré et  $\mathrm{ind} A$  l'indice de  $A$ .

La variété de Severi-Brauer d'une algèbre  $A$  est désignée par  $\mathrm{SB}(A)$ . Une variété est toujours une variété algébrique projective lisse sur un corps; un faisceau sur  $X$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module. L'anneau de Grothendieck d'une variété  $X$  est désigné par  $K(X)$ ;

$$K(X) = \Gamma^0 K(X) \supset \Gamma^1 K(X) \supset \dots \quad \text{et} \quad K(X) = T^0 K(X) \supset T^1 K(X) \supset \dots$$

sont respectivement la gamma-filtration et la filtration topologique de  $K(X)$ ; on utilise la notation  $G^* \Gamma K(X)$  et  $G^* T K(X)$  pour les anneaux adjoints gradués de ces filtrations. Il y a des relations certaines entre  $G^* \Gamma K(X)$ ,  $G^* T K(X)$  et l'anneau de Chow  $\mathrm{CH}^*(X)$  que nous utilisons mais ne décrivons pas ici; on les trouve dans [9, §2].

Ce travail est exécuté au Labo de Mathématiques de l'Université de Franche-Comté. Je le remerci sincèrement pour l'atmosphère et les conditions excellentes.

## 1. DEUX RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

**Proposition 1.1.** *Soient  $A_1, \dots, A_n$  et  $B_1, \dots, B_m$  des algèbres sur un corps  $F$  telles que les sous-groupes de  $\mathrm{Br}(F)$  engendrés par  $[A_1], \dots, [A_n]$  et par  $[B_1], \dots, [B_m]$  coïncident. Alors*

$$\mathrm{Tors} \mathrm{CH}^2 (\mathrm{SB}(A_1) \times \dots \times \mathrm{SB}(A_n)) \simeq \mathrm{Tors} \mathrm{CH}^2 (\mathrm{SB}(B_1) \times \dots \times \mathrm{SB}(B_m)).$$

*Démonstration.* Posons  $X = \text{SB}(A_1) \times \cdots \times \text{SB}(A_n)$ ,  $Y_1 = \text{SB}(B_1)$ . Il suffit de montrer que

$$\text{Tors CH}^2(X) \simeq \text{Tors CH}^2(X \times Y_1).$$

Puisque  $X \times Y_1 \rightarrow X$  est une fibration projective (5.3), on a ([4, §2 of appendix A])

$$\text{CH}^2(X \times Y_1) \simeq \text{CH}^2(X) \oplus \cdots \oplus \text{CH}^{2-\dim Y_1}(X).$$

La dernière observation est: pour tout  $i < 2$ , le groupe  $\text{CH}^i(X)$  n'a pas de torsion (pour  $i = 1$  v. [16, lemme 6.3, (i)]).  $\square$

Soit  $p$  un premier. Pour une algèbre ainsi que pour un groupe abélien  $A$ , on va noter  $A\{p\}$  la partie  $p$ -primaire de  $A$ .

**Proposition 1.2.** *Soient  $A_1, \dots, A_n$  des algèbres sur un (même) corps. On a  $\text{CH}^2(\text{SB}(A_1) \times \cdots \times \text{SB}(A_n))\{p\} \simeq \text{Tors CH}^2(\text{SB}(A_1\{p\}) \times \cdots \times \text{SB}(A_n\{p\}))$ .*

*Démonstration.* Pour  $n = 1$ , le résultat est démontré dans [9, proposition 1.3]. La même preuve marche pour  $n > 1$ .  $\square$

## 2. GROUPE DE GROTHENDIECK DE PRODUIT DE VARIÉTÉS DE SEVERI-BRAUER

Soient  $A_1, \dots, A_n$  des algèbres sur un corps  $F$ ,  $X_1, \dots, X_n$  leurs variétés de Severi-Brauer et  $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ . Fixons une clôture séparable  $\bar{F}$  de  $F$  et posons  $\bar{X}_i = (X_i)_{\bar{F}}$  pour chaque  $i$ . Les variétés  $\bar{X}_i$  sont des espaces projectifs; notons  $\xi_i$  la classe dans  $K(\bar{X})$  du faisceau tautologique de la fibration projective

$$\bar{X} \rightarrow \prod_{j \neq i} \bar{X}_j.$$

L'anneau  $K(\bar{X})$  est engendré par les éléments  $\xi_1, \dots, \xi_n$  avec les seules relations

$$(\xi_1 - 1)^{\deg A_1} = \cdots = (\xi_n - 1)^{\deg A_n} = 0.$$

Regardons la restriction  $K(X) \rightarrow K(\bar{X})$  qui est un homomorphisme d'anneaux.

**Théorème 2.1.** *L'homomorphisme  $K(X) \rightarrow K(\bar{X})$  est injectif; son image est additivement engendrée par les éléments*

$$\text{ind}(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n}) \cdot \xi_1^{j_1} \cdots \xi_n^{j_n}$$

avec  $0 \leq j_1 < \deg A_1, \dots, 0 \leq j_n < \deg A_n$ .

*Démonstration.* On utilise [15, §8, theorem 4.1]  $n$  fois.  $\square$

**Corollaire 2.2.** *Pour des algèbres  $A_1, \dots, A_n$  des degrés fixés, l'anneau  $K(X)$  avec la gamma-filtration (et le groupe  $\text{Tors G}^2\Gamma K(X)$  en particulier) dépend seulement des nombres  $\text{ind}(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n})$ .*

*Démonstration.* Par le théorème, les nombres déterminent  $K(X)$  entièrement comme un sous-anneau de  $K(\bar{X})$ . Les classes de Chern à valeurs dans  $K$  ([9, définition 2.1]) pour  $X$  qui déterminent la gamma-filtration ([9, définition 2.6]) sont les restrictions des classes de Chern pour  $\bar{X}$ .  $\square$

## 3. VARIÉTÉS ET ALGÈBRES DISJOINTES

**Définition 3.1.** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variétés quelconques sur un (même) corps. Nous disons qu'elles sont *disjointes* si l'homomorphisme d'anneaux

$$K(X_1) \otimes \cdots \otimes K(X_n) \rightarrow K(X_1 \times \cdots \times X_n),$$

induit par les homomorphismes d'image inverse

$$pr_i^* : K(X_i) \rightarrow K(X_1 \times \cdots \times X_n)$$

par rapport aux projections  $pr_i : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow X_i$ , est un isomorphisme.

**Proposition 3.2.** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variétés disjointes. La gamma-filtration de  $K(X_1 \times \cdots \times X_n)$  coïncide avec la filtration induite par les gamma-filtrations de  $K(X_1), \dots, K(X_n)$ .

*Démonstration.* Notons  $X$  le produit  $X_1 \times \cdots \times X_n$  et  $\tilde{\Gamma}$  la filtration induite. Alors, pour chaque  $l \geq 0$ , on définit  $\tilde{\Gamma}^l K(X)$  comme le sous-groupe de  $K(X)$  engendré par tous les produits

$$pr_1^* \Gamma^{l_1} K(X_1) \cdots pr_n^* \Gamma^{l_n} K(X_n)$$

avec  $l_1 + \cdots + l_n \geq l$ . Comme un homomorphisme d'image inverse respecte la gamma-filtration, on a l'inclusion  $\tilde{\Gamma}^l K(X) \subset \Gamma^l K(X)$ . Démontrons l'inclusion inverse. Puisque la gamma-filtration  $\Gamma$  de  $K(X)$  est la plus petite filtration d'anneau ayant les propriétés  $\Gamma^0 K(X) = K(X)$  et  $c^l(x) \in \Gamma^l K(X)$  pour tout  $x \in K(X)$  et  $l \geq 1$ , où  $c^l$  est la  $l$ -ième classe de Chern à valeurs dans  $K$  ([9, définition 2.1]), il suffit de montrer que

$$(*) \quad c^l(x) \in \tilde{\Gamma}^l K(X).$$

Comme les variétés  $X_1, \dots, X_n$  sont disjointes, le groupe additif de  $K(X)$  est engendré par les produits

$$(**) \quad x = pr_1^*(x_1) \cdots pr_n^*(x_n)$$

où  $x_i \in K(X_i)$  est la classe d'un faisceau localement libre. Il suffit donc de vérifier l'inclusion (\*) seulement pour  $x$  de la forme (\*\*). Puisque  $c^l$  commute avec  $pr_i^*$ , on a

$$c^l(pr_i^*(x_i)) \in \tilde{\Gamma}^l K(X),$$

et le dernier pas de la preuve est

**Lemme 3.3.** Soient  $n, m, l \geq 0$ . Il existe un polynôme  $f_l((\sigma_i), (\tau_j))$  sur  $\mathbb{Z}$  en les variables  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  et  $\tau_1, \dots, \tau_m$  ayant les deux propriétés suivantes:

- si  $x, y \in K(X)$  sont les classes de faisceaux localement libres sur une variété  $X$ , la classe de Chern  $c^l(x \cdot y)$  est égale à  $f_l(c^i(x), c^j(y))$ ;
- si on pose  $\deg \sigma_i = i$  et  $\deg \tau_j = j$ , le degré de chaque monôme de  $f_l$  est supérieur ou égal à  $l$ .

*Démonstration.* Par le principe de décomposition ([13, prop. 5.6]), il suffit de regarder le cas où

$$x = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad y = \eta_1 + \cdots + \eta_m$$

avec les classes de faisceaux inversibles  $\xi_i, \eta_j$ . Pour la classe de Chern totale  $c_t$  ([9, définition 2.1]), on a

$$\begin{aligned} c_t(x) &= c_t\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \prod_{i=1}^n (1 + (\xi_i - 1)t) = \prod_{i=1}^n (1 + a_i t) \quad \text{où } a_i = \xi_i - 1; \\ c_t(y) &= c_t\left(\sum_{j=1}^m \eta_j\right) = \prod_{j=1}^m (1 + (\eta_j - 1)t) = \prod_{j=1}^m (1 + b_j t) \quad \text{où } b_j = \eta_j - 1; \\ c_t(xy) &= c_t\left(\sum_{i,j} \xi_i \eta_j\right) = \prod_{i,j} (1 + (\xi_i \eta_j - 1)t) = \prod_{i,j} (1 + (a_i b_j + a_i + b_j)t). \end{aligned}$$

La classe  $c^l(xy)$  est (par définition) le coefficient de  $t^l$  dans  $c_t(xy)$ . Ce coefficient est évidemment un polynôme en  $a_1, \dots, a_n$  et  $b_1, \dots, b_m$  qui est symétrique par rapport aux variables  $(a_i)$  et aussi symétrique par rapport aux variables  $(b_j)$  (notons que le degré de chaque monôme est au moins égal à  $l$ ). Alors, par le théorème fondamental sur les polynômes symétriques,  $c^l(xy) = f_l((\sigma_i), (\tau_j))$  pour un polynôme  $f_l$ , où  $(\sigma_i)_{i=1}^n$  sont les polynôme symétriques élémentaires en  $(a_i)$  ( $\sigma_i$  est un polynôme homogène de degré  $i$ ) et  $(\tau_j)_{j=1}^m$  les polynôme symétriques élémentaires en  $(b_j)$ . L'assertion de la lemme concernant le degré est évidemment satisfaite. Finalement, on note que  $\sigma_i = c^i(x)$  et  $\tau_j = c^j(y)$ .  $\square$

$\square$

**Corollaire 3.4.** *Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variétés telles que leurs groupes de Grothendieck sont finement engendrés (des variétés de Severi-Brauer par exemple). Si les variétés sont disjointes et les groupes  $G^* \Gamma K(X_1), \dots, G^* \Gamma K(X_n)$  n'ont pas de torsion, le groupe  $G^* \Gamma K(X_1 \times \cdots \times X_n)$  est aussi sans torsion.*

*Démonstration.* L'homomorphisme naturel

$$G^* \Gamma K(X_1) \otimes \cdots \otimes G^* \Gamma K(X_n) \rightarrow G^* \Gamma K(X_1 \times \cdots \times X_n)$$

est surjectif par la proposition. Par notre condition, le groupe du côté gauche est finement engendré et sans torsion; alors c'est un groupe libre abélien de rang fini. Ce rang coïncide avec le rang du groupe du côté droit parce que les variétés sont disjointes.  $\square$

Maintenant, on va comprendre ce que la condition d'être disjointes veut dire pour des variétés de Severi-Brauer.

**Définition 3.5.** Soient  $A_1, \dots, A_n$  des algèbres sur un (même) corps. On dit qu'elles sont *disjointes* si

$$\text{ind}(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n}) = \text{ind } A_1^{\otimes j_1} \cdots \text{ind } A_n^{\otimes j_n} \quad \text{pour tous } j_1, \dots, j_n \geq 0.$$

**Proposition 3.6.** *Des algèbres  $A_1, \dots, A_n$  sont disjointes ssi leurs variétés de Severi-Brauer sont disjointes.*

*Démonstration.* Comme pour une algèbre  $A$  arbitraire il y a un isomorphisme canonique  $K(A) = \text{ind } A \cdot \mathbb{Z}$  où maintenant  $K$  note le groupe de Grothendieck de l'algèbre, les algèbres sont disjointes ssi les applications

$$K(A_1^{\otimes j_1}) \otimes \cdots \otimes K(A_n^{\otimes j_n}) \rightarrow K(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n})$$

sont des isomorphismes pour tous  $0 \leq j_1 < \deg A_1, \dots, 0 \leq j_n < \deg A_n$ . En prenant la somme directe, on obtient l'application

$$\begin{aligned} \left( \prod_{j_1=0}^{\deg A_1-1} K(A_1^{\otimes j_1}) \right) \otimes \cdots \otimes \left( \prod_{j_n=0}^{\deg A_n-1} K(A_n^{\otimes j_n}) \right) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \prod_{j_1=0}^{\deg A_1-1} \cdots \prod_{j_n=0}^{\deg A_n-1} K(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n}). \end{aligned}$$

En identifiant les facteurs du produit du côté gauche avec  $K(\text{SB}(A_1)), \dots, K(\text{SB}(A_n))$  et la somme directe du côté droit avec  $K(\text{SB}(A_1) \times \cdots \times \text{SB}(A_n))$  par 2.1, on obtient à la place de la flèche l'homomorphisme de 3.1.  $\square$

#### 4. VARIÉTÉS "GÉNÉRIQUES"

**Définition 4.1.** Disons que une variété  $X$  est "générique" si la gamma-filtration de  $K(X)$  coïncide avec la filtration topologique.

**Lemme 4.2.** Si  $\text{Tors } G^*TK(X) = 0$  (pour une variété arbitraire  $X$ ), alors  $X$  est "générique".

*Démonstration.* Pour voir que les filtrations coïncident, il suffit de montrer que l'homomorphisme

$$\alpha: G^*TK(X) \rightarrow G^*TK(X),$$

induit par l'inclusion des filtrations, est injectif. Comme  $\alpha \otimes \mathbb{Q}$  est bijectif ([3, proposition 5.5 of chapter VI]), le noyau de  $\alpha$  contient seulement des éléments d'ordre fini. Donc  $\alpha$  est vraiment injectif si le groupe  $G^*TK(X)$  est sans torsion.  $\square$

**Lemme 4.3.** Soit  $\mathcal{G} \rightarrow X$  une fibration grassmannienne. Si  $X$  est "générique", la variété  $\mathcal{G}$  est pareillement "générique".

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{G}$  est une fibration grassmannienne sur  $X$ , la  $\text{CH}^*(X)$ -algèbre (commutative)  $\text{CH}^*(\mathcal{G})$  est engendrée par les classes de Chern (à valeurs dans  $\text{CH}^*$ ) (v. [2, proposition 14.6.5] ou [11, (3.2)]). En utilisant l'épimorphisme naturel  $\text{CH}^* \rightarrow G^*TK$ , on obtient le même résultat pour  $G^*TK$ : la  $G^*TK(X)$ -algèbre (commutative)  $G^*TK(\mathcal{G})$  est engendrée par les classes de Chern (à valeurs dans  $G^*TK$ ). Comme  $X$  est "générique", l'anneau  $G^*TK(X)$  même est engendré par les classes de Chern ([9, remark 2.17]). Par conséquent,  $G^*TK(\mathcal{G})$  est engendré par les classes de Chern non seulement comme l'algèbre mais aussi comme un anneau. Cela veut dire que  $\mathcal{G}$  est "générique" ([9, remark 2.17]).  $\square$

**Lemme 4.4.** *Soit  $X \rightarrow Y$  un morphisme lisse de variétés,  $\tilde{X}$  sa fibre générique. Si  $X$  est “générique”, la variété  $\tilde{X}$  (c’est une variété sur le corps de fonctions de  $Y$ ) est aussi “générique”.*

*Démonstration.* Le morphisme (de schémas)  $\tilde{X} \rightarrow X$  induit un homomorphisme des groupes de Grothendieck  $K(X) \rightarrow K(\tilde{X})$ , respectant les deux filtrations, et un homomorphisme des groupes de Chow  $\text{CH}^*(X) \rightarrow \text{CH}^*(\tilde{X})$  qui est surjectif ([10, theorem 3.1]). Par conséquent, l’homomorphisme

$$G^*TK(X) \rightarrow G^*TK(\tilde{X})$$

est aussi surjectif, et donc, pour chaque  $l$ , le groupe  $T^lK(X)$  est appliqué surjectif dans  $T^lK(\tilde{X})$ . Puisque  $T^lK(X) = \Gamma^lK(X)$ , on en déduit que  $T^lK(\tilde{X}) \subset \Gamma^lK(\tilde{X})$ . L’inclusion inverse a lieu tout le temps.  $\square$

**Corollaire 4.5.** *Soient  $X$  et  $Y$  des variétés sur un corps  $F$  telles que la projection  $X \times Y \rightarrow Y$  est une fibration grassmannienne. Si  $X$  est “générique”, alors  $X_{F(Y)}$  est pareillement “générique”.*

*Démonstration.* La variété  $X \times Y$  est “générique” d’après 4.3; ensuite la variété  $X_{F(Y)}$  est “générique” par 4.4.  $\square$

## 5. ALGÈBRES “GÉNÉRIQUES”

**Proposition 5.1.** *Soit  $A$  une algèbre primaire (i.e.  $\deg A$  est une puissance d’un premier). On suppose que*

- soit  $\text{ind } A = \exp A$
- soit  $\text{ind } A = 2^n$  et  $\text{ind } A^{\otimes 2^{n-2}} = 4$  ( $n \geq 2$ )

(une algèbre des biquaternions est un exemple de telle  $A$ ). Alors, le groupe  $G^*\Gamma(\text{SB}(A))$  n’a pas de torsion.

*Démonstration.* Pour des algèbres du premier type, v. [9, proposition 3.3, corollary 3.6]; pour le deuxième type, v. la démonstration de [9, proposition 4.9].  $\square$

**Corollaire 5.2.** *Soient  $A_1, \dots, A_n$  des algèbres disjointes et supposons que chaque  $A_i$  satisfait la condition de 5.1. Alors pour le produit  $X$  de leurs variétés de Severi-Brauer, on a:  $\text{Tors } G^*\Gamma K(X) = 0$ ; en particulier,  $\text{Tors } \text{CH}^2(X) = 0$ .*

*Démonstration.* Ceci résulte directement de la proposition avec 3.4 et 3.6.  $\square$

Pour une algèbre  $B$  et un entier  $r \geq 0$ , notons  $\text{SB}(r, B)$  la variété de Severi-Brauer généralisée des idéaux à droite de  $B$  de rang  $r$  ([1, §2]). En particulier,  $\text{SB}(1, B) = \text{SB}(B)$ .

**Proposition 5.3.** *Soient  $A_1, \dots, A_n$  et  $B$  des algèbres sur un (même) corps,  $X = \text{SB}(A_1) \times \dots \times \text{SB}(A_n)$  et  $Y = \text{SB}(r, B)$  avec certain  $r \geq 0$ .*

*Si la classe  $[B]$  de l’algèbre  $B$  dans le groupe de Brauer appartient au groupe engendré par  $[A_1], \dots, [A_n]$ , la projection  $X \times Y \rightarrow X$  est une fibration  $r$ -grassmannienne.*



*Démonstration.* On peut supposer que

$$B \simeq A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n}$$

avec  $j_1, \dots, j_n \geq 0$  certains. Considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & T \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & T \end{array}$$

où  $T = \text{SB}(B)$  et le morphisme  $X \rightarrow T$  est donné par le produit tensoriel d'idéaux. La flèche du côté droit (c'est la projection  $T \times Y \rightarrow T$ ) est une fibration  $r$ -grassmannienne d'après [9, proposition 6.3]. Donc, la projection  $X \times Y \rightarrow Y$  (c'est la flèche du côté gauche) est aussi une fibration  $r$ -grassmannienne.  $\square$

**Définition 5.4.** Disons que une collection d'algèbres  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$  est "générique", si c'est un résultat d'une procédure suivante. On commence avec des algèbres disjointes  $A_1, \dots, A_n$  sur un corps  $F$  telles que chaque  $A_i$  satisfait la condition de 5.1. Puis, on prendre des  $F$ -algèbres  $B_1, \dots, B_m$  telles que leurs classes dans  $\text{Br}(F)$  appartiennent au sous-groupe engendré par  $[A_1], \dots, [A_n]$ . Enfin, on prendre comme  $Y$  un produit direct de variétés de Severi-Brauer généralisées quelconques des algèbres  $B_1, \dots, B_m$  et on pose  $\tilde{A}_i = (A_i)_{F(Y)}$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

**Théorème 5.5.** Si une collection d'algèbres  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$  est "générique", le produit  $\tilde{X}$  de leurs variétés de Severi-Brauer est une variété "générique" (4.1); en particulier, l'épimorphisme

$$\text{Tors } G^2\Gamma K(\tilde{X}) \rightarrow \text{Tors } \text{CH}^2(\tilde{X})$$

est bijectif dans ce cas.

*Démonstration.* Soient  $A_1, \dots, A_n$  les algèbres utilisées pour construction de notre collection "générique" (5.4). Posons  $X_i = \text{SB}(A_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$  et soit  $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ . D'après 5.2, le groupe  $G^*\Gamma K(X)$  est sans torsion. En particulier, la variété  $X$  est "générique" (4.2).

Maintenant, soit  $Y$  le produit direct de variétés de Severi-Brauer généralisées, utilisé dans la construction de notre collection "générique". Par 5.3, la projection  $X \times Y \rightarrow X$  est un produit fibré (sur  $X$ ) de fibrations grassmanniennes. Donc, en utilisant (4.5)  $m$  fois, on démontre que la variété  $\tilde{X} = X_{F(Y)}$  est "générique".  $\square$

**Corollaire 5.6.** Soient  $A_1, \dots, A_n$  des algèbres quelconques et  $X$  le produit de leurs variétés de Severi-Brauer. Soit  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$  une collection "générique" d'algèbres telles que  $\deg \tilde{A}_i = \deg A_i$  et

$$\text{ind}(\tilde{A}_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{A}_n^{\otimes j_n}) = \text{ind}(A_1^{\otimes j_1} \otimes \cdots \otimes A_n^{\otimes j_n})$$

pour tout  $i$  et tous  $j_1, \dots, j_n$ .

Le groupe  $\text{Tors } \text{CH}^2(X)$  est isomorphe à un groupe quotient de  $\text{Tors } \text{CH}^2(\tilde{X})$ .

*Démonstration.* Par le théorème, on a un isomorphisme

$$\text{Tors CH}^2(\tilde{X}) \simeq \text{Tors G}^2\Gamma K(\tilde{X}) ;$$

par 2.2, on a

$$\text{Tors G}^2\Gamma K(\tilde{X}) \simeq \text{Tors G}^2\Gamma K(X) ;$$

enfin, on a toujours une surjection ([9, 2.15])

$$\text{Tors G}^2\Gamma K(X) \twoheadrightarrow \text{Tors CH}^2(X) .$$

□

## 6. VARIÉTÉ BIQUATERNIONIQUE FOIS CONIQUE

Nous appelons *variété biquaternionique* une variété de Severi-Brauer d'une algèbre des biquaternions.

**Théorème 6.1.** *Soient  $X$  une variété biquaternionique,  $Y$  une conique (sur le même corps) et  $A, B$  les algèbres correspondantes ( $B$  est une algèbre des quaternions).*

1. *La torsion dans le groupe  $\text{CH}^2(X \times Y)$  est soit triviale, soit d'ordre 2.*
2. *Si la torsion n'est pas triviale, alors*

$$(*) \quad \text{ind } A = \text{ind}(A \otimes B) = 4 \quad \text{et} \quad \text{ind } B = 2 .$$

3. *Si la collection  $A, B$  est "générique" (5.4) et satisfait la condition (\*), alors la torsion n'est pas triviale.*

*Démonstration.* Si  $\text{ind } B \neq 2$ , c.-à.-d. si  $B$  est décomposée, on sait par 1.1 que  $\text{Tors CH}^2(X \times Y) \simeq \text{CH}^2(X)$ ; le dernier groupe n'a pas de torsion ([8, corollary]).

Si  $\text{ind } A \neq 4$ , alors  $A$  est Brauer-équivalente à une algèbre des quaternions  $A'$ ; désignant par  $X'$  sa variété de Severi-Brauer, on obtient (1.1)

$$\text{Tors CH}^2(X \times Y) \simeq \text{Tors CH}^2(X' \times Y) .$$

Puisque  $\dim(X' \times Y) = 2$ , le groupe

$$\text{G}^2\Gamma K(X' \times Y) = \Gamma^2 K(X' \times Y) \subset K(X' \times Y)$$

n'a pas de torsion. On en conclut que  $\text{Tors CH}^2(X \times Y) = 0$  aussi dans ce cas.

Soit  $C$  l'algèbre à division qui est Brauer-équivalente au produit  $A \otimes B$ ;  $T = \text{SB}(C)$ . En utilisant 1.1 de nouveau, on tire

$$\text{Tors CH}^2(X \times Y) \simeq \text{Tors CH}^2(T \times Y) .$$

Si  $\text{ind}(A \otimes B) \leq 2$ , alors  $\dim T \times Y \leq 2$  et on finit au même façon comme si-dessus.

Si  $\text{ind}(A \otimes B) = 8$ , les algèbres  $A, B$  sont disjointes et 5.2 montre que  $\text{Tors CH}^2(X \times Y) = 0$ .

Le reste est desservi par

**Proposition 6.2.** *Supposons que une algèbre des biquaternions  $A$  et une algèbre des quaternions  $B$  sont des algèbres à division et  $\text{ind}(A \otimes B) = 4$ . Pour  $X, Y$  comme ci-dessus, on a:  $\text{Tors } G^2\Gamma K(X \times Y) \simeq \mathbf{Z}/2$ .*

*Démonstration.* Posons  $K = K(X \times Y)$ ,  $\bar{K} = K(\bar{X} \times \bar{Y})$ . L'anneau  $\bar{K}$  est engendré par les éléments  $\xi, \eta$  avec les seules relations  $(\xi - 1)^4 = 0 = (\eta - 1)^2$  (v. §2). En particulier, le groupe additif de  $\bar{K}$  est un groupe abélien librement engendré par les éléments  $\xi^i \eta^j$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $j = 0, 1$ . Nous allons aussi utiliser un autre system de générateurs:  $f^i g^j$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $j = 0, 1$ , où  $f = \xi - 1$ ,  $g = \eta - 1$ .

Pour chaque  $l$ , le  $l$ -ième term  $\Gamma^l \bar{K}$  de la gamma-filtration de  $\bar{K}$  est engendré par les produits  $f^i g^j$  avec  $i + j \geq l$ . En particulier,  $G^l \Gamma \bar{K}$  est un groupe abélien librement engendré par les classe résiduelles des produits  $f^i g^j$  avec  $i + j = l$ .

**Lemme 6.3.** *Le sous-anneau  $K \subset \bar{K}$  est additivement engendré par les éléments*

$$1, 4\xi, \xi^2, 4\xi^3, 2\eta, 4\xi\eta, 2\xi^2\eta, 4\xi^3\eta.$$

*Démonstration.* C'est 2.1 à notre situation particulier.  $\square$

**Lemme 6.4.** *Les éléments suivants sont aussi des générateurs du groupe additif de  $K$ :*

$$1, 2f - f^2, 2g, 2f^2, 4fg, 4f^3, \boxed{2f^2g}, 4f^3g$$

(l'élément relevé va produire la torsion — v. 6.9).  $\square$

**Lemme 6.5.** *Il y a les inclusions suivantes:*

$$\begin{aligned} \Gamma^1 K &\ni 2f - f^2, 2g; \\ \Gamma^2 K &\ni 2f^2, 4fg, \boxed{2f^2g}; \\ \Gamma^3 K &\ni 4f^3, 2 \cdot \boxed{2f^2g}; \\ \Gamma^4 K &\ni 4f^3g. \end{aligned}$$

*Démonstration.* L'assertion sur  $\Gamma^1 K$  est évidente.

Puisque  $2f^2, 4fg \in K \cap \Gamma^2 \bar{K}$  et l'homomorphisme  $\alpha^1$  est injectif ([16, lemme 6.3, (i)]), l'assertion sur  $\Gamma^2 K$  a lieu (une vérification direct (v. le rest de la démonstration) est aussi facile).

Finement, on a:

$$\begin{aligned} c_t(4\xi) = (1 + ft)^4 &\Rightarrow c^3(4\xi) = 4f^3 \Rightarrow 4f^3 \in \Gamma^3 K; \\ 2f^2 \in \Gamma^2 K \text{ et } 2g \in \Gamma^1 K &\Rightarrow 4f^2g = (2f^2) \cdot (2g) \in \Gamma^3 K; \\ c^4(4\xi\eta) = (\xi\eta - 1)^4 &= ((f+1)(g+1) - 1) = 4f^3g \in \Gamma^4 K. \end{aligned}$$

$\square$

**Corollaire 6.6.** *Notons  $\alpha^*$  l'homomorphisme de restriction  $G^*\Gamma K \rightarrow G^*\Gamma \bar{K}$ . Pour tout  $i > 0$ , on a:  $\text{Im } \alpha^i \subset 2G^i\Gamma \bar{K}$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme, le groupe  $G^1\Gamma K$  est engendré par les classes résiduelles des éléments  $2f - f^2$  et  $2g$ ; leurs images dans  $G^1\Gamma\bar{K}$  sont effectivement divisibles par 2. Ainsi, l'assertion du corollaire pour  $i = 1$  est démontrée.

Puisque les éléments de  $\Gamma^2K$ ,  $\Gamma^3K$  et  $\Gamma^4K$  énumérés dans le lemme engendrent  $\Gamma^2K$  et sont divisibles par 2 dans  $\bar{K}$ , on obtient l'assertion pour  $i \geq 2$  (on utilise l'absence de torsion dans  $G^*\Gamma\bar{K}$ ).  $\square$

**Corollaire 6.7.**  $\# \text{Tors } G^*\Gamma K \leq 2$ .

*Démonstration.* Comme le groupe  $G^*\Gamma\bar{K}$  est sans torsion,  $\text{Tors } G^*\Gamma K \subset \text{Ker } \alpha^*$ . Nous allons montrer que  $\# \text{Ker } \alpha^* \leq 2$  en utilisant la formule suivante ([7, proposition]):

$$\text{Ker } \alpha^* = \# \text{Coker } \alpha^* / \#(\bar{K}/K).$$

Il est facile de calculer que  $\#(\bar{K}/K) = 2^{10}$ . D'après le lemme,  $\# \text{Coker } \alpha^* \leq 2^{11}$ .  $\square$

**Lemme 6.8.**  $2f^2g \notin \Gamma^3K$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $\text{Im } \alpha^3 \subset 4G^3\Gamma\bar{K}$ .

Le groupe  $\text{Im } \alpha^3$  est engendré par le sous-groupe  $\text{Im } \alpha^1 \cdot \text{Im } \alpha^2$  est le sous-ensemble  $\alpha^3(c^3K)$ , où  $c^3$  est la 3-ième classe de Chern à valeurs dans  $G^*\Gamma K$  ([9, définition 2.7]). Puisque  $\text{Im } \alpha^i \subset 2G^i\Gamma\bar{K}$  pour  $i > 0$  par 6.6, on a:  $\text{Im } \alpha^1 \cdot \text{Im } \alpha^2 \subset 4G^3\Gamma\bar{K}$ . Il suffit donc de vérifier que  $\alpha^3(c^3(S)) \subset 4G^3\Gamma\bar{K}$  pour un système de générateurs du groupe additif de  $K$ . La vérification est triviale si on prend à titre de  $S$  le système de générateurs de 6.3.  $\square$

**Corollaire 6.9.** *Le résidu de  $2f^2g$  dans  $G^2\Gamma K$  a l'ordre 2 et engendre le sous-groupe de torsion.*

*Démonstration.* Le résidu est d'ordre 2 d'après 6.8 et 6.5. Il engendre tout le sous-groupe de torsion (non seulement de  $G^3\Gamma K$  mais aussi d'entier  $G^*\Gamma K$ ) par 6.7.  $\square$

Nous avons fini les démonstrations du théorème et de la proposition.  $\square$

$\square$

**Remarque 6.10.** A la condition du théorème, notons  $F$  le corps de base et supposons qu'il existe une extension quadratique  $L/F$  (ou, plus généralement, une extension de degré indivisible par 4) telle que l'algèbre  $A_L$  n'est plus une algèbre à division et l'algèbre  $B_L$  est décomposée. Dans ce cas,  $f^2g \in T^3K(X_L \times Y_L)$ ; en utilisant l'application de norme, nous obtenons:  $2f^2g \in T^3K(X \times Y)$ , i.e.  $\text{Tors } \text{CH}^2(X \times Y) = 0$ .

Alors, si  $A, B$  sont telles que  $\text{Tors } \text{CH}^2(X \times Y) \neq 0$  (par exemple, si  $A, B$  forment une collection "générique" (6.1)), il n'y a pas d'extension comme ci-dessus. Le premier exemple semblable est construit dans [12].

## 7. PRODUIT DE DEUX SURFACES DE SEVERI-BRAUER

Un surface de Severi-Brauer est une variété de Severi-Brauer de dimension 2.

**Théorème 7.1.** *Soient  $X, Y$  des surfaces de Severi-Brauer sur un (même) corps et  $A, B$  les algèbres correspondantes.*

1. *La torsion dans le groupe  $\text{CH}^2(X \times Y)$  est soit triviale, soit d'ordre 3.*
2. *Si la torsion n'est pas triviale, alors*

$$(*) \quad \text{ind } A = \text{ind } B = \text{ind}(A \otimes B) = \text{ind}(A \otimes B^\circ) = 3$$

où  $B^\circ$  est l'algèbre opposée.

3. *Si la collection  $A, B$  est "générique" (5.4) et satisfait la condition (\*), alors la torsion n'est pas triviale.*

*Démonstration.* Si au moins une des algèbres  $A, B, A \otimes B, A \otimes B^\circ$  est décomposée, il existe une algèbre  $C$  du degré 3 telle que sa classe  $[C]$  dans le groupe de Brauer engendre le même groupe que  $[A]$  et  $[B]$  (ensemble). D'après 1.1, le groupe  $\text{Tors } \text{CH}^2(X \times Y)$  est isomorphe dans ce cas au groupe  $\text{Tors } \text{CH}^2(\text{SB}(C))$  qui est trivial par [7, corollary].

Si  $\text{ind}(A \otimes B) = \text{ind}(A \otimes B^\circ) = 9$ , alors les algèbres  $A, B$  sont disjointes et on peut utiliser 5.2.

Posons  $Y^\circ = \text{SB}(B^\circ)$ . Comme par (1.1)

$$\text{Tors } \text{CH}^2(X \times Y) \simeq \text{Tors } \text{CH}^2(X \times Y^\circ),$$

il suffit de regarder seulement un des deux cas suivants:

- $\text{ind}(A \otimes B) = 3$  et  $\text{ind}(A \otimes B^\circ) = 9$ ;
- $\text{ind}(A \otimes B) = 9$  et  $\text{ind}(A \otimes B^\circ) = 3$ .

**Lemme 7.2.** *Si  $\text{ind } A = \text{ind } B = \text{ind}(A \otimes B) = 3$  et  $\text{ind}(A \otimes B^\circ) = 9$ , alors  $\text{Tors } \text{G}^2\Gamma K(X \times Y) = 0$ .*

*Démonstration.* Posons  $K = K(X \times Y)$ ,  $\bar{K} = K(\bar{X} \times \bar{Y})$ . L'anneau  $\bar{K}$  est engendré par les éléments  $\xi, \eta$  avec les relations  $(\xi - 1)^3 = 0 = (\eta - 1)^3$  (v. §2). En particulier, le groupe additif de  $\bar{K}$  est un groupe abélien librement engendré par les éléments  $\xi^i \eta^j$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ . Nous allons aussi utiliser un autre system de générateurs:  $f^i g^j$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ , où  $f = \xi - 1$ ,  $g = \eta - 1$ .

Pour chaque  $l$ , le  $l$ -ième term  $\Gamma^l \bar{K}$  de la gamma-filtration de  $\bar{K}$  est engendré par les produits  $f^i g^j$  avec  $i + j \geq l$ .

La condition du lemme implique que

$$\begin{aligned} \text{ind } A^{\otimes 2} = \text{ind } B^{\otimes 2} = \text{ind}(A^{\otimes 2} \otimes B^{\otimes 2}) = 3 \quad \text{et} \\ \text{ind}(A \otimes B^{\otimes 2}) = \text{ind}(A^{\otimes 2} \otimes B) = 9. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après 2.1, le sous-anneau  $K \subset \bar{K}$  est additivement engendré par

$$1, 3\xi, 3\xi^2, 3\eta, 3\xi\eta, 9\xi^2\eta, 3\eta^2, 9\xi\eta^2, 3\xi^2\eta^2.$$

Nous allons aussi utiliser un autre system de générateurs:

$$1, 3f, 3g, 3f^2, 3fg, 3g^2, 9f^2g, 3f^2g + 3fg^2 + 6f^2g^2, 9f^2g^2 .$$

Maintenant c'est evident que l'intersection  $K \cap \Gamma^3 \bar{K}$  est engendrée par

$$9f^2g, 3f^2g + 3fg^2 + 6f^2g^2 \text{ et } 9f^2g^2 .$$

Pour démontrer que le groupe  $G^2\Gamma K$  est sans torsion, il suffit de vérifier que les trois elements appartiennent à  $\Gamma^3 K$ .

Comme  $3f^2, 3g^2 \in \Gamma^2 K$  et  $3g \in \Gamma^1 K$ , on a:

$$9f^2g = (3f^2) \cdot (3g) \in \Gamma^3 K, \quad 9f^2g^2 = (3f^2) \cdot (3g^2) \in \Gamma^4 K .$$

L'element resté coïncide avec une 3-ième classe de Chern:

$$\begin{aligned} c^3(3\xi\eta) &= (\xi\eta - 1)^3 = ((f+1)(g+1) - 1)^3 = (fg + f + g)^3 = \\ &= 3fg(f+g)^2 + (f+g)^3 = 6f^2g^2 + 3f^2g + 3fg^2 . \end{aligned}$$

□

Nous finissons la démonstration du théorème avec

**Proposition 7.3.** *Si  $\text{ind } A = \text{ind } B = \text{ind}(A \otimes B) = \text{ind}(A \otimes B^\circ) = 3$ , alors  $\text{Tors } G^2\Gamma K(X \times Y) \simeq \mathbb{Z}/3$ .*

*Démonstration.* Nous utilisons la notation introduite au commencement de la démonstration du dernier lemme.

**Lemme 7.4.** *Le sous-anneau  $K \subset \bar{K}$  est maintenant engendré par 1 et  $3\bar{K}$ . En plus,*

$$\begin{aligned} \Gamma^1 K &= 3\Gamma^1 \bar{K} ; \\ \Gamma^2 K &= 3\Gamma^2 \bar{K} ; \\ \Gamma^3 K &\ni 3f^2g - 3fg^2, 3f^2g + 3fg^2 + 6f^2g^2 ; \\ \Gamma^4 K &\ni 9f^2g^2 . \end{aligned}$$

*Démonstration.* L'assertion sur  $\Gamma^1 K$  est triviale. L'assertion sur  $\Gamma^2 K$  découle d'injectivité de  $\alpha^1$  ([16, lemme 6.3, (i)]); puis  $9f^2g^2 \in \Gamma^4 K$  car  $3f^2, 3g^2 \in \Gamma^2 K$ .

Pour montrer l'assertion sur  $\Gamma^3 K$ , calculons la 3-ième classe de Chern

$$c^3(\xi^2\eta) = (\xi^2\eta - 1)^3 = ((f+1)^2(g+1) - 1)^3 = 27f^2g^2 + 12f^2g + 6fg^2 .$$

Puisque  $9f^2g, 9fg^2 \in \Gamma^3 K$ , on en conclut que  $3f^2g - 3fg^2 \in \Gamma^3 K$ .

Enfin, comme nous avons déjà calculé dans le preuve de 7.2,

$$3f^2g + 3fg^2 + 6f^2g^2 = c^3(3\xi\eta) \in \Gamma^3 K .$$

□

**Corollaire 7.5.**  $\# \text{Tors } G^*\Gamma K \leq 3$ .

*Démonstration.* Analogiquement 6.7. Maintenant, on a:  $\#(\bar{K}/K) = 3^8$  et  $\# \text{Coker } \alpha^* \leq 3^9$  (7.4). □

**Lemme 7.6.**  $3f^2g^2 \notin \Gamma^3K$ .

*Démonstration.* Définissons un homomorphisme  $\phi_9 : \bar{K} \rightarrow \mathbb{Z}/9$  à la manière suivante: écrivons un élément  $x \in \bar{K}$  arbitraire comme une combinaison linéaire

$$x = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} f^i g^j \quad \text{avec } a_{ij} \in \mathbb{Z},$$

posons  $\phi(x) = a_{21} + a_{12} + a_{22}$  et définissons  $\phi_9(x)$  comme le résidu de  $\phi(x)$  modulo 9.

Comme  $\phi_9(3f^2g^2) \neq 0$ , il suffit de montrer que  $\phi_9(\Gamma^3K) = 0$ .

A priori, le groupe  $\Gamma^3K$  est engendré par  $\Gamma^1K \cdot \Gamma^2K$ ,  $c^3(S)$  et  $c^4(S)$  où

$$S = 1, 3\xi, 3\xi^2, 3\eta, 3\xi\eta, 3\xi^2\eta, 3\eta^2, 3\xi\eta^2, 3\xi^2\eta^2.$$

Cependant,  $c^4(s) = 0$  pour tout  $s \in S$ ; on peut donc rayer  $c^4(S)$  de la liste des générateurs.

Puisque

$$\Gamma^1K \cdot \Gamma^2K \subset \Gamma^1K \cdot \Gamma^1K \subset 9\bar{K} \quad (7.4),$$

on a:  $\phi_9(\Gamma^1K \cdot \Gamma^2K) = 0$ .

Il reste  $c^3(S)$ . Pour  $s = 1, 3\xi, 3\xi^2, 3\eta$  et  $3\eta^2$ ,  $\phi(s)$  est déjà 0. Les calculs suivants montrent que  $\phi_9(c^3(s)) = 0$  aussi pour les autres quatre éléments  $s \in S$ :

$$\begin{aligned} c^3(3\xi\eta) &= (\xi\eta - 1)^3 = ((f+1)(g+1) - 1)^3 = (fg + (f+g))^3 = \\ &= 3fg(f+g)^2 + (f+g)^3 = \boxed{6f^2g^2 + 3f^2g + 3fg^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^3(3\xi^2\eta^2) &= (\xi^2\eta^2 - 1)^3 = ((f+1)^2(g+1)^2 - 1)^3 = ((f^2+4fg+g^2)+2(f+g))^3 = \\ &= 12(f^2+4fg+g^2)(f+g)^2 + 8(f+g)^3 = \boxed{120f^2g^2 + 24f^2g + 24fg^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^3(3\xi^2\eta) &= (\xi^2\eta - 1)^3 = ((f+1)^2(g+1) - 1)^3 = (f(f+2g) + (2f+g))^3 = \\ &= 3f(f+2g)(2f+g)^2 + (2f+g)^3 = \boxed{27f^2g^2 + 12f^2g + 6fg^2}; \end{aligned}$$

$$c^3(3\xi\eta^2) = \boxed{27f^2g^2 + 6f^2g + 12fg^2}.$$

□

□

□

## RÉFÉRENCES

- [1] Blanchet, A. *Function fields of generalized Brauer-Severi varieties*. Comm. Algebra 19.1 (1991), 97–118.
- [2] Fulton, W. *Intersection Theory*. Springer-Verlag, 1984.
- [3] Fulton, W., Lang, S. *Riemann-Roch Algebra*. Springer-Verlag, 1985.
- [4] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977.
- [5] Izhboldin, O. T. *On the (non)-excellent property for function field of Severi-Brauer varieties*. Preprint.
- [6] Karpenko, N. A. *Algebro-geometric invariants of quadratic forms*. Leningrad (St. Petersburg) Math. J. 2 (1991), no. 1, 119–138.
- [7] Karpenko, N. A. *On topological filtration for Severi-Brauer varieties*. Proc. Symp. Pure Math. 58.2 (1995), 275–277.
- [8] Karpenko, N. A. *On topological filtration for Severi-Brauer varieties II*. Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 174, 1996, 45–48.
- [9] Karpenko, N. A. *Codimension 2 cycles on Severi-Brauer varieties*. Prépublications de l'Équipe de Mathématiques de Besançon 96/40 (1996), 26 p.
- [10] Karpenko, N. A., Merkurjev, A. S. *Chow groups of projective quadrics*. Leningrad (St. Petersburg) Math. J. 2 (1991), no. 3, 655–671.
- [11] Köck, B. *Chow motif and higher Chow theory of  $G/P$* . Manuscripta Math. 70 (1991), 363–372.
- [12] Mammone, P. *On the tensor product of division algebras*. Arch. Math. 58 (1992), 34–39.
- [13] Manin, Yu. I. *Lectures on the  $K$ -functor in algebraic geometry*. Russian Math. Surveys 24 (1969), no. 5, 1–89.
- [14] Peyre, E. *Products of Severi-Brauer varieties and Galois cohomology*. Proc. Symp. Pure Math. 58.2 (1995), 369–401.
- [15] Quillen, D. *Higher algebraic  $K$ -theory: I*. Lect. Notes Math. 341 (1973), 85–147.
- [16] Sansuc, J.-J. *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*. J. reine angew. Math. 327 (1981), 12–80.

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ, ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES DE BESANÇON, 16,  
ROUTE DE GRAY, F-25030 BESANÇON CEDEX, FRANCE  
E-mail address: karpenko@math.univ-fcomte.fr