THÉORIE DES NOMBRES
BESANÇON

Années 1996/97-1997/98

Une remarque sur la capitulation du groupe des classes au sens restreint

C. MAIRE

UNE REMARQUE SUR LA CAPITULATION DU GROUPE DES CLASSES AU SENS RESTREINT

CHRISTIAN MAIRE

ABSTRACT. On prosose de montrer que le groupe des classes au sens restreint de certains corps quadratiques réels k capitule entièrement dans une sous-extension stricte du corps de Hilbert au sens restreint de k.

1. RÉSULTAT PRINCIPAL

Soient k un corps de nombres et cl_k^+ le groupe des classes de k au sens restreint. Par le théorème de l'idéal principal, on sait que cl_k^+ capitule entièrement dans k_1^+, le corps de Hilbert au sens restreint de k.
On montre ici le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Soit k un corps quadratique réel, dont la norme de l'unité fondamentale est 1. Si la 2-partie de cl_k^+ est $(2,2)$, alors cl_k^+ capitule dans une sous-extension stricte de k_1^+.*

Remarque 1.2. *Il suffit de montrer que la 2-partie $cl_k^+(2)$ de cl_k^+ capitule dans une extension quadratique de k.*

2. QUELQUES RAPPELS

2.1. **Le groupe cl_k^+.** Le groupe des classes au sens restreint est par définition

$$cl_k^+ = \frac{I_k}{P_k^+},$$

où I_k est le groupe des idéaux fractionnaires non nuls de k, et où P_k^+ est le sous-groupe de I_k des idéaux principaux totalement positifs, c'est à dire si $(\alpha) \in P_k^+$, $\alpha \in k^\times$, alors tous les plongements réels de α sont positifs.
On sait alors que le groupe cl_k^+ est isomorphe au groupe de Galois $Gal(k_1^+/k)$, ceci par l'application d'Artin, où k_1^+ est l'extension abélienne maximale de k non ramifiée aux **places finies**.
Si cl_k désigne le groupe des classes de k, on a la formule suivante :

$$|cl_k^+| = |cl_k| \frac{2^{r_1}}{[E_k : E_k^+]}, \tag{1}$$

où r_1 est le nombre de places réelles de k, E_k est le groupe des unités de k, et E_k^+ le sous-groupe des unités de k, totalement positives.

Date: 11 juin 1998.

2.2. **Un peu de théorie des genres.** Soit k un corps quadratique réel, tel que $cl_k^+(2) = (2,2)$.
Nous allons montrer que $k_1^+(2)/\mathbb{Q}$ est abélienne.
Tout d'abord, il est clair que $k_1^+(2)/\mathbb{Q}$ est galoisienne, ceci par maximalité de $k_1^+(2)/k$. Notons alors M le corps des genres relatif à $k_1^+(2)/\mathbb{Q}$, c'est à dire, $M/\mathbb{Q}$ est l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$ contenue dans $k_1^+(2)$. En particulier, M contient k.
On a la suite exacte (cf. [6]) :

$$(2) \qquad 1 \longrightarrow \frac{E_{\mathbb{Q}}^+}{E_{\mathbb{Q}}^+ \cap \mathcal{N}_{k/\mathbb{Q}}} \longrightarrow \bigoplus_v I_v(k/\mathbb{Q}) \longrightarrow Gal(M/\mathbb{Q}) \longrightarrow 1,$$

où $E_{\mathbb{Q}}^+ \cap \mathcal{N}_{k/\mathbb{Q}}$ sont les unités de $\mathbb{Q}$, positives, normes locales partout dans $k/\mathbb{Q}$, et où $I_v(k/\mathbb{Q})$ est le groupe d'inertie dans $k/\mathbb{Q}$ pour une place v de $\mathbb{Q}$.

Notons que $Gal(k/\mathbb{Q}) = \langle\tau\rangle$ agit trivialement sur $Gal(M/k)$ (car $M/\mathbb{Q}$ est abélienne) ; par maximalité de M, $Gal(M/k)$ est le plus grand quotient de $cl_k^+(2)$ sur lequel $Gal(k/\mathbb{Q})$ agit trivialement. Ainsi

$$(3) \qquad Gal(M/k) = \frac{cl_k^+(2)}{cl_k^+(2)^{1-\tau}} = \frac{cl_k^+(2)}{cl_k^+(2)^2} = cl_k^+(2).$$

Il vient alors :

- $M = k_1^+(2)$.
- L'existence de trois places exactement qui se ramifient dans $k/\mathbb{Q}$.

Pour toute la suite p_i désignera un nombre premier congru à 1 modulo 4, et q_i un nombre premier congru à 3 modulo 4.
Ainsi, pour que $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ vérifie les conditions du théorème 1.1, il faut que d soit de la forme :

$$p_1q_2q_3, \; p_1q_2, \; 2p_1q_2, \; \text{ou } 2q_2q_3.$$

Une conséquence de ceci est que $Gal(M/\mathbb{Q}) = (2,2,2)$.
On a donc la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Soit $k/\mathbb{Q}$ une extension quadratique réelle dont la norme de l'unité fondamentale est 1. Supposons que* $cl_k^+(2) = (2,2)$. *Alors l'extension $k_1^+(2)/\mathbb{Q}$ est $(2,2,2)$. Par conséquent, les trois sur-extensions quadratiques de k contenues dans $k_1^+(2)$ sont des extensions bi-quadratiques de $\mathbb{Q}$. Deux de ces corps bi-quadratiques sont imaginaires, le troisième est réel.*

Remarque 2.2. *On peut noter que pour $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, avec $d = p_1p_2p_3$, ou bien $d = 2p_1p_2$, on a $d_2cl_k = 2$, et dans ce cas, soit la norme de l'unité fondamentale est -1, soit $d_4cl_k^+ \geq 1$.*

2.3. **Quelques conditions afin que $cl_k^+(2) = (2,2)$.** On est amené à montrer que le rang d'une certaine matrice (vue multiplicativement) est 2 (cf. [1]).

Pour a un nombre premier, $(.,.)_a$ désignera le symbole de Hilbert, et $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ le symbole de Legendre.

2.3.1. *Cas où* $d = p_1q_2q_3$. On a $cl_k^+(2) = (2,2)$ si et seulement si le rang de la matrice suivante est égal à 2 (notation multiplicative) :

$$\begin{pmatrix} (p_1,d)_{p_1} & (q_2,d)_{p_1} & (q_3,d)_{p_1} \\ (p_1,d)_{q_2} & (q_2,d)_{q_2} & (q_3,d)_{q_2} \\ (p_1,d)_{q_3} & (q_2,d)_{q_3} & (q_3,d)_{q_3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \left(\frac{q_3}{p_1}\right) & \left(\frac{q_2}{p_1}\right) & 1 \\ -\left(\frac{q_3}{q_2}\right) & -\left(\frac{q_2}{p_1}\right)\left(\frac{q_3}{p_2}\right) & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $cl_k^+(2) = (2,2)$ si et seulement si $\left(\frac{q_2}{p_1}\right) = -1$ ou $\left(\frac{q_3}{p_1}\right) = -1$.

2.4. **Cas où** $d = p_1q_2$. On obtient la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{p_1}\right) & \left(\frac{q_2}{p_1}\right) & 1 \\ \left(\frac{2}{q_2}\right) & -\left(\frac{q_2}{p_1}\right) & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $cl_k^+(2) = (2,2)$ si et seulement si $\left(\frac{q_2}{p_1}\right) = -1$ ou $\left(\frac{2}{p_1}\right) = -1$.

2.5. **Cas où** $d = 2q_1a$, a **premier congru à 1 ou 3 modulo 4.** On obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{2}{a}\right) & \left(\frac{q_1}{a}\right) & \left(\frac{-1}{a}\right) \\ \left(\frac{2}{q_1}\right) & -\left(\frac{2*a}{q_1}\right) & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En particulier, pour $a = p_2$, si $\left(\frac{q_1}{p_2}\right) = -1$ ou bien si $\left(\frac{2}{p_2}\right) = -1$, alors $cl_k^+(2) = (2,2)$.

3. Le noyau de capitulation

Soit K/k une extension galoisienne non ramifiée aux places finies ; $G = Gal(K/k)$.

Nous noterons γ l'ensemble des places réelles de k qui se complexifient dans K/k (i.e γ est l'ensemble des places archimédiennes de k qui ont un groupe de décomposition non trivial dans K/k), puis $J_{K/k}$ le noyau de capitulation de cl_k^+ dans cl_K^+, plus précisément $J_{K/k} = ker\left(cl_k^+ \to cl_K^+\right)$, l'homomorphisme étant l'inclusion.

Soit E_k^γ le sous-groupe de E_k constitué des unités de k qui sont positives en dehors de γ. Considèrons alors l'application Φ suivante :

$$\begin{array}{rcl} \Phi \ : E_k^\gamma/E_k^+ & \to & \prod_{i=1}^{|\gamma|} \mathbb{R}^*/\mathbb{R}^{*+} \\ x & \mapsto & (\sigma_i(x))_i \end{array}$$

où les σ_i sont les plongements associés aux places de k qui se complexifient dans K/k.
Enfin notons Γ la co-image de Φ.

On a la suite exacte (cf. [6]) :

$$1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow J_{K/k} \longrightarrow H^1(G, E_K^+) \longrightarrow 1. \tag{4}$$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Soit k un corps quadratique réel.*
Si K/k est quadratique imaginaire (K est totalement imaginaire, et $[K : k] = 2$), et si de plus l'unité fondamentale de k est totalement positive, alors

$$|J_{K/k}| = [E_k : N_{K/k}E_K]. \tag{5}$$

Si K/k est quadratique réel (K est réel, et $[K : k] = 2$), alors

$$|J_{K/k}| = 2 \times [E_k^+ : N_{K/k}E_K^+]. \tag{6}$$

Preuve
L'extension K/k étant cyclique, on a [4] :

$$|H^1(G, E_K^+)| = |H^0(G, E_K^+)| \times \frac{[K : k]}{2^{|\gamma|}}. \tag{7}$$

Ainsi il vient avec (4) :

$$|J_{K/k}| = \frac{|H^0(G, E_K^+)| \times [K : k] \times |\Gamma|}{2^{|\gamma|}} \tag{8}$$

Il suffit ensuite de remarquer les deux points suivants :
- Si K/k est imaginaire, alors $|\gamma| = 2$, $|\Gamma| = \dfrac{2^2}{[E_k : E_k^+]} = 2$ (car l'unité fondamentale de k est totalement positive), et $|H^0(G, E_K^+)| = [E_k : N_{K/k}E_K]$ (K étant imaginaire, $E_K^+ = E_K$).
- Si K/k est réel, alors $\gamma = \emptyset$, $|\Gamma| = 1$, et $|H^0(G, E_K^+)| = [E_k^+ : N_{K/k}E_K^+]$. □

4. Un rappel de théorie des groupes

On peut trouver ce résultat dans [2] ou [5].

Proposition 4.1. *Soit G un 2-groupe fini, tel que $G^{ab} = (2, 2)$. Alors G est l'un des groupes suivants : le groupe abélien $(2, 2)$, le groupe dihedral D_n, le groupe semi-dihedral S_n ou le groupe quaternonien Q_n.*
Notons H_i, $i = 1, 2, 3$, les trois sous-groupes distingués de G d'indice 2.

Alors $G = (2, 2)$ si et seulement si le noyau de transfert de G^{ab} dans deux des trois groupes H_i^{ab} est d'ordre 4. Dans ce cas, l'ordre du noyau de transfert de G^{ab} dans le troisième groupe abélianisé H_i^{ab} est nécessairement 4.

5. Un rappel d'un résultat de Kuboda [3]

Pour une extension quadratique $N/\mathbb{Q}$, si ε est une unité de k de norme 1, on définit l'entier δ_ε par

1. $\delta_\varepsilon = 1$, si $\varepsilon = 1$.
2. $\delta_\varepsilon = -d$, si $\varepsilon = -1$, et $N = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d > 0$ ou $d < 0$.
3. $\delta_\varepsilon = 2$, si $\varepsilon = \sqrt{-1}$, et $N = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.
4. $\delta_\varepsilon = 3$, si $\varepsilon = -\zeta$, ζ étant une racine primitive cubique de 1 ; $\delta_\zeta = 1$. (ici $N = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$)
5. Si ε n'est pas une racine de l'unité, δ_ε est tel que $\varepsilon + 1/\varepsilon + 2 \in \delta_\varepsilon \mathbb{Q}^2$.

Pour k *quadratique réel*, on définit $\delta_k = \delta_\varepsilon$, où ε est l'unité fondamentale de k lorsque celle-ci est de norme 1. Dans ce cas particulier, on a $\delta_k \neq 1,\ d$.
A noter aussi que δ_k divise $Disc(k)$.
Dans le cas où la norme de l'unité fondamentale de k est -1, on définit δ_k comme étant égal à δ_{ε^2}.

On notera S_k et T_k les quantités suivantes :

$$S_k = \varepsilon + 1/\varepsilon + 2, \tag{9}$$

$$T_k = \varepsilon + 1/\varepsilon - 2, \tag{10}$$

lorsque ε sera l'unité fondamentale de k de norme 1 (sinon, on prend ε^2).
On peut remarquer que $S_k \in \delta_k \mathbb{Q}^2$.
On a la proposition suivante :

Proposition 5.1. *Si* $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $T_k \in d\delta_k \mathbb{Q}^2$.

Preuve
Comme ε est de norme 1, par le théorème 90 de Hilbert, il existe $\alpha \in k$, tel que $\varepsilon = \alpha/\alpha^\tau$, où $Gal(k/\mathbb{Q}) = \langle\tau\rangle$. A noter que $\delta_\varepsilon = N_{k/\mathbb{Q}}(\alpha)$.
Ainsi

$$T_k = (\alpha - \alpha^\tau)^2/(N_{k/\mathbb{Q}}(\alpha)) \in d\delta_k \mathbb{Q}^2. \tag{11}$$

□

Pour k *quadratique imaginaire*, on définit $\delta_k = \delta_\varepsilon$, où ε est une racine primitive de l'unité contenue dans k.

On a la proposition suivante (cf. [3]) :

Proposition 5.2. *Soient L une extension bi-quadratique de $\mathbb{Q}$, k_i les trois sous-corps quadratiques, ε_i des unités des corps k_i de norme 1, et δ_i les entiers attachés à ces unités.*
Alors $\prod_i \varepsilon^{a_i} \in L^2$ *si et seulement si* $\prod_i \delta_i^{a_i} \in L^2$.

6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

6.1. **Situation.** Soit $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un corps quadratique réel satisfaisant $cl_k^+(2) = (2,2)$, et dont la norme de l'unité fondamentale est 1.
Notons ε_k l'unité fondamentale de k.

Soient F le 2-corps de Hilbert de k, et L une des deux sur-extension quadratique imaginaire de k ; $k_1^+ = FL$. Nous noterons L^* la seconde extension quadratique imaginaire de k.

On distingue 2 cas : le cas où $\sqrt{-1}$ est ni dans L, ni dans L^* (cas I), et le cas où L (ou L^*) contient $\sqrt{-1}$ (cas II).

6.1.1. *Cas I.* On sait que l'unité fondamentale de L (et de L^*) est ε_k, ou $\sqrt{-\varepsilon_k}$ (cf. [3]). Si l'unité fondamentale de L est ε_k, alors d'après la proposition 3.1, $|J_{L/k}| = 4$. Sinon, L contient $\sqrt{-\varepsilon_k}$, et ainsi $L = k(\sqrt{-\varepsilon_k})$. Par conséquent, l'unité fondamentale de L^* est nécessairement ε_k, et $|J_{L^*/k}| = 4$.

6.1.2. *Cas II.* Supposons que L contient $\sqrt{-1}$; $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-p_1q_2})$.
On sait alors que l'unité fondamentale de L est ε_k ou bien $\sqrt{\sqrt{-1}\varepsilon_k}$ (cf. [3]). Si c'est ε_k, alors $|J_{L/k}| = 4$.

Montrons que si l'unité fondamentale de L est $\sqrt{\sqrt{-1}\varepsilon_k}$, alors l'unité fondamentale de L^* est ε_k :
Dans L, notons $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_1q_2})$, et $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. On a $\delta_{k_1} = p_1q_2$, et $\delta_{k_2} = 2$ (cf. §5). Comme $\sqrt{\sqrt{-1}\varepsilon_k}$ est l'unité fondamentale de L, il vient que $\delta_k\delta_{k_2}$ est un carré dans L, ainsi nécessairement $\delta_k = 2$ ou $2p_1q_2$ (proposition 5.2).

Regardons ensuite dans L^* : Notons $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_1})$, $k_4 = \mathbb{Q}(\sqrt{-q_2})$. Alors $\delta_{k_3} = p_1$ et $\delta_{k_4} = q_2$. Ainsi $\delta_k\delta_{k_3}^i\delta_{k_4}^j$ n'est pas un carré dans L^*, donc $-\varepsilon_k$ n'est pas un carré dans L^*. Par conséquent ε_k est l'unité fondamentale de L^*.

7. ETUDE D'UN CAS PARTICULIER

Reprenons le cas où $k = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1q_2q_3})$, $\left(\frac{q_2}{p_1}\right) = -1$.
Dans cette partie on notera $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$, $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{q_2q_3})$, ε_1, ε_2, ε_k les unités fondamentales de k_1, de k_2 et de k. F désignera le corps biquadratique k_1k_2, c'est à dire F est le 2-corps de Hilbert de k.

On propose de montrer que le théorème 1.1, permet de donner des renseignements sur le signe des plongements de certaines unités de F.

On notera σ_i les quatres plongements de F définis par :

i) σ_1 est le plongement identité de F,

ii) $\sigma_2(\sqrt{p_1}) = -\sqrt{p_1}$, et $\sigma_2(\sqrt{q_2q_3}) = \sqrt{q_2q_3}$,
iii) $\sigma_3(\sqrt{p_1}) = -\sqrt{p_1}$, et $\sigma_3(\sqrt{q_2q_3}) = -\sqrt{q_2q_3}$,
iv) $\sigma_4(\sqrt{p_1}) = \sqrt{p_1}$, et $\sigma_4(\sqrt{q_2q_3}) = -\sqrt{q_2q_3}$.
On posera $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-q_2}, \sqrt{-p_1q_3})$, et $L^* = \mathbb{Q}(\sqrt{-q_3}, \sqrt{-p_1q_2})$.

On a le lemme suivant :

Lemme 7.1.
1) Si $\left(\frac{q_2}{p_1}\right) = \left(\frac{q_3}{p_1}\right) = -1$, *alors* $\sqrt{\varepsilon_k} \in F$.
2) Si $\left(\frac{q_2}{p_1}\right) = -1$ *et* $\left(\frac{q_3}{p_1}\right) = 1$, *alors* $\sqrt{-\varepsilon_k} \in L^* = \mathbb{Q}(\sqrt{-q_3}, \sqrt{-p_1q_2})$.

Preuve
Notons $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{-q_2})$ et $k_4 = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_1q_3})$. Alors $\delta_{k_3} = q_2$ et $\delta_{k_4} = p_1q_3$.
De $\left(\frac{q_2}{p_1}\right) = -1$, on a

$$(q_2, d)_{p_1} = (p_1q_3, d)_{p_1} = (p_1, d)_{q_2} = -1, \tag{12}$$

ainsi, δ_k est égal soit à q_3, soit à p_1q_2, soit à q_2q_3. On peut alors remarquer que $\delta_k\delta_{k_3}^i\delta_{k_4}^j$ n'est pas un carré dans L, ainsi $\sqrt{-\varepsilon_k}$ n'est pas dans L.
1) Si de plus, $\left(\frac{q_3}{p_1}\right) = -1$, alors $\delta_k = q_2q_3$, c'est donc un carré dans F. Ainsi, $\sqrt{\varepsilon_k} \in F$.
2) Si $\left(\frac{q_3}{p_1}\right) = 1$, alors $\delta_k = q_3$ ou p_1q_2. On voit alors que $-\varepsilon_k$ est un carré dans L^*, ainsi $\sqrt{-\varepsilon_k} \in L^*$. □

7.1. **Supposons :** $\left(\frac{q_2}{p_1}\right) = \left(\frac{q_3}{p_1}\right) = -1$. D'après le lemme précédent, ε est l'unité fondamentale de L et de L^*. Alors $|J_{L/k}| = |J_{L^*/k}| = 4$. Dans ce cas, $|J_{F/k}| = 4$, ceci d'après la proposition 4.1.
De plus, notons que :

$$N_{F/k}(\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k}) = N_{k_1/\mathbb{Q}}(\varepsilon_1)N_{k/\mathbb{Q}}(\sqrt{\varepsilon_k}) = -(-\varepsilon_k) = \varepsilon_k, \tag{13}$$

où ε_1 est l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$, de norme égale donc à -1.
Il vient ainsi le corollaire suivant :

Corollaire 7.2. *Supposons* $\left(\frac{q_2}{p_1}\right) = \left(\frac{q_3}{p_1}\right) = -1$, *et notons* ε_k *et* ε_1 *les unités fondamentales de* $k = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1q_2q_3})$ *et de* $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$. *Alors l'unité* $\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k}$ *vue dans le compositum des 2 corps quadratiques, n'est pas totalement positive.*

Nous allons donner deux preuves de ce résultat.
Preuve I
Rappelons que si $cl_k(2) = (2)$, alors $E_k = N_{F/k}E_F$ (cf. [5], [6]). En particulier, ε_k est norme d'unité dans l'extension F/k.
De $|J_{F/k}| = 4$, on a $[E_k^+ : N_{F/k}E_F^+] = 2$ (proposition 3.1). Ainsi il vient que ε_k n'est pas norme dans F/k d'une unité de de F totalement positive.

Preuve II
On rappelle que $\delta_k = q_2q_3$. D'après la proposition 5.1, $\sqrt{S_k} = a\sqrt{q_2q_3}$ et $\sqrt{T_k} = b\sqrt{p_1}$, $a, b \in \mathbb{Q}$.
D'autre part, on connait $\sqrt{\varepsilon_k}$ (cf. [3]) :

$$\sqrt{\varepsilon_k} = \frac{\sqrt{S_k} + \sqrt{T_k}}{2}. \tag{14}$$

Ainsi $\sigma_2(\sqrt{S_k} + \sqrt{T_k})$ est positif, et $\sigma_2(\varepsilon_1)$ est négatif, car ε_1 est de norme -1.
Donc $\sigma_2(\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k})$ est négatif.

7.2. **Supposons :** $\left(\frac{q_2}{p_1}\right) = -1, \left(\frac{q_3}{p_1}\right) = 1$. D'après le lemme 7.1, $\sqrt{-\varepsilon_k} \in L^*$, où $L^* = \mathbb{Q}(\sqrt{-q_3}, \sqrt{-p_1q_2})$. Ainsi $|J_{L^*/k}| = 2$, et $|J_{L/k}| = 4$.
Par la proposition 5.2, on a donc nécessairement $|J_{F/k}| = 2$.

Avant de poursuivre, notons le lemme suivant :

Lemme 7.3. *Si* $\left(\frac{q_2}{q_3}\right) = 1$, *alors* $\delta_k = p_1q_2$, *et* $\delta_{k_2} = q_2$.
Si $\left(\frac{q_2}{q_3}\right) = -1$, *alors* $\delta_k = \delta_{k_2} = q_3$.
Dans ces deux cas, $\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2} \in F$.

On peut alors remarquer que

$$N_{F/k}(\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2})^2 = N_{k_2/\mathbb{Q}}(\varepsilon_2)N_{F/k}(\varepsilon_k) = \varepsilon_k^2. \tag{15}$$

Ainsi,

$$\varepsilon_k = N_{F/k}(\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}), \tag{16}$$

ou bien

$$\varepsilon_k = N_{F/k}(\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}). \tag{17}$$

On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 7.4. *Si* $\left(\frac{q_2}{q_3}\right) = 1$, *alors* $\varepsilon_k = N_{F/k}(\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2})$, *et* $\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}$ *est totalement positive.*
Si $\left(\frac{q_2}{q_3}\right) = -1$, *alors* $\varepsilon_k = N_{F/k}(\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_{k_2}})$, *et* $\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_{k_2}}$ *est totalement positive.*

Preuve
Nous allons montrer uniquement le premier point.
Supposons que $\left(\frac{q_2}{q_3}\right) = 1$, alors d'après le lemme 7.4 et la proposition 5.1, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{\varepsilon_k} &= 1/2(\sqrt{S_k} + \sqrt{T_k}) \\ &= a\sqrt{p_1q_2} + b\sqrt{q_3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sqrt{\varepsilon_2} &= 1/2(\sqrt{S_{k_2}} + \sqrt{T_{k_2}}) \\ &= a'\sqrt{q_2} + b'\sqrt{q_3}\end{aligned}$$

où a, b, a', b' sont dans $\mathbb{Q}$.
Il vient alors,

$$\begin{aligned}\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_k} &= 1/4(\sqrt{S_k}\sqrt{S_{k_2}}+\sqrt{S_k}\sqrt{T_{k_2}}+\sqrt{T_k}\sqrt{S_{k_2}}+\sqrt{T_k}\sqrt{T_{k_2}}) \\ &= aa'q_2\sqrt{p_1}+ab'\sqrt{p_1q_2q_3}+ba'\sqrt{q_2q_3}+bb'q_3.\end{aligned}$$

Ainsi
$\sigma_2(\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_k}) = 1/4(\sqrt{S_{k_2}}(\sqrt{T_k}-\sqrt{S_k})+\sqrt{T_{k_2}}(\sqrt{T_k}-\sqrt{S_k}))$.
$\sigma_3(\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_k}) = 1/4(\sqrt{S_k}(\sqrt{T_{k_2}}-\sqrt{S_{k_2}})+\sqrt{T_k}(\sqrt{T_{k_2}}-\sqrt{S_{k_2}}))$.
$\sigma_4(\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_k}) = 1/4((\sqrt{S_k}-\sqrt{T_k})(\sqrt{S_{k_2}}-\sqrt{T_{k_2}}))$.
On peut alors noter que $\sigma_2(\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_k})$ et $\sigma_3(\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_k})$ sont négatifs, ainsi $\varepsilon_k = \varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}$. Il apparait alors que les quatre plongements de $\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_k}$ sont positifs. □

Remarque 7.5. *On peut également montrer le corollaire 7.3 sur le modèle de la preuve I du corollaire 7.2.*
En effet, puisque $|J_{L/k}| = 2$, d'après la proposition 3.1, $[E_k^+ : N_{F/k}E_F^+] = 1$. Ainsi ε_k est norme d'unité positive. Il suffit ensuite de remarquer que ε_k ne peut être norme, dans F/k, que de $\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}$ ou de $\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}$.

7.3. **Illustrations.** Nous allons donner deux exemples qui illustrent le corollaire 7.3.

7.3.1. *Premier exemple.* Prenons $k = \mathbb{Q}(\sqrt{5*19*23})$, $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{19*23})$ ($p_1 = 5$, $q_2 = 23$, et $q_3 = 19$).
L'unité fondamentale de k est

$$\varepsilon_k = 2447977239109027 + 1070294735201 04(1+\sqrt{5*19*23})/2.$$

On a

$$\sqrt{\varepsilon_k} = 3297886\sqrt{5*23} + 8113491\sqrt{19}. \tag{18}$$

L'unité fondamentale de k_2 est

$$\varepsilon_2 = 10 + (1+\sqrt{19*23})/2, \tag{19}$$

et

$$\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}(\sqrt{19}+\sqrt{23}). \tag{20}$$

On a donc

$$\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2} = \frac{1}{2}(154156329+75851378\sqrt{5}+8113491\sqrt{19*23}+3297886\sqrt{5*19*23}).$$

On note alors que

$$N_{F/k}(\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}) = \varepsilon_k. \tag{21}$$

Ainsi, d'après le corollaire 7.3, $\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}$ est totalement positive.
Voici les quatres plongements de cette unité :

i) $\sigma_1(\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}) \approx 847628209.995$
ii) $\sigma_2(\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}) \approx 0.0000000647$
iii) $\sigma_3(\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}) \approx 15452508.395$
iv) $\sigma_4(\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}) \approx 0.00000000808$

7.3.2. *Second exemple.* On prend $\mathbb{Q}(\sqrt{5*7*11})$.
L'unité fondamentale de k est

$$\varepsilon_k = 90947 + 9768 * (1+\sqrt{5*7*11})/2. \tag{22}$$

On a

$$\sqrt{\varepsilon_k} = 37\sqrt{5*7} + 66\sqrt{11}. \tag{23}$$

L'unité fondamentale de $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{7*11})$ est

$$\varepsilon_2 = 4 + (1+\sqrt{7*11})/2, \tag{24}$$

et

$$\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{11}). \tag{25}$$

On a ainsi

$$\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2} = \frac{1}{2}(726 + 259\sqrt{5} + 66\sqrt{7*11} + 37\sqrt{5*7*11}). \tag{26}$$

On note alors que

$$N_{F/k}(\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}) = \varepsilon_k. \tag{27}$$

L'unité $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_2}$ est donc totalement positive. En voici les quatres plongements

i) $\sigma_1(\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}) \approx 1305.140$
ii) $\sigma_2(\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}) \approx 0.00680$
iii) $\sigma_3(\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}) \approx 146.851$
iv) $\sigma_4(\sqrt{\varepsilon_k\varepsilon_2}) \approx 0.000766$

REFERENCES

[1] G. Gras, *Sur les l-Classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier l*, Ann. Inst. Fourier **23**, fasc. 3 et 4 (1973).
[2] H. Kisilevsky, *Number fields with Class Number congruent to 4 mod 8 and Hilbert's Theorem 94*, J. Number Theory **8** (1976), 271-279.
[3] T. Kubota, *Über den Bizyklischen Biquadratischen Zahlkörper*, Nagoya Math. J. **10** (1955), 65-85.
[4] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, Addison Wesley, New York, 1970.
[5] F. Lemmermeyer, *Construction of Hilbert Class Field II*, preprint.
[6] C. Maire, *T-S capitulation*, Publ. Math. fac. Sci. de Besançon (94-95).

Ch. Maire
Laboratoire A2X - Université Bordeaux I
351, Cours de la Libération - 33405 Talence Cedex - France
Email : maire@math.u-bordeaux.fr