

Le radical de Kaplansky

K.J. BECHER

Le radical de Kaplansky *

Karim Johannes Becher

*Département de Mathématiques de Besançon, Faculté des Sciences et Techniques,
16, Route de Gray, 25030 Besançon Cedex, France*

E-mail: becher@math.univ-fcomte.fr

1. Introduction	1
2. Notations et rappels	3
3. Structure du radical et exemples	5
4. Radical et formes quadratiques	8
5. Corps quasi-pythagoriciens	10
6. Radical et extension du corps	13
7. Un problème de réduction d'indice	17
8. Agrandissement et réduction du radical	19
Références	26

1 Introduction

Dans toute la suite, F désigne un corps de caractéristique différente de 2. Le *radical* de F , noté $R(F)$, est l'ensemble des éléments $x \in F^\times$ tels que soit x est un carré dans F soit $F(\sqrt{x})/F$ est une extension quadratique pour laquelle l'homomorphisme de norme $F(\sqrt{x})^\times \rightarrow F^\times$ est surjectif. Il s'avère que $R(F)$ est un sous-groupe de F^\times .

Cette notion de radical pour un corps a été introduite par I. Kaplansky lorsqu'il étudiait les corps qui admettent une seule algèbre de quaternions à division [8]. Par la suite, elle a été étudiée dans un cadre général par C. M. Cordes, qui la baptisa *radical de Kaplansky*, en l'honneur de son inventeur [3]. Cordes remarque que, dans certains énoncés en théorie des formes quadratiques, on peut remplacer le groupe des carrés $F^{\times 2}$ par le radical $R(F)$.

*Le présent travail fait partie de la thèse de doctorat de l'auteur, effectuée à l'*Université de Franche-Comté* à Besançon sous la direction de Mme Eva Bayer-Fluckiger et M. Detlev Hoffmann et soutenue le 25 Septembre 2001. L'auteur tient à remercier ses directeurs de thèse pour leur soutien ainsi que M. Jean-Pierre Tignol et M. David Leep pour les discussions instructives qu'il a partagé avec eux au sujet de cet article et les suggestions précieuses dont ils lui ont fait part. Il est également très reconnaissant envers M. Emmanuel Lequeu pour son aide quant à la rédaction.

C'est le cas, par exemple, pour le lemme de Kneser qui affirme que sur un corps non réel toute forme anisotrope de dimension n représente au moins n classes de carrés ; Cordes montre alors que, pour $n \geq 2$, une telle forme représente au moins n classes (entières) modulo le radical. En particulier, il obtient ainsi une estimation pour le u -invariant d'un corps non réel avec un nombre fini de classes de carrés.

On note $\sum F^{\times 2}$ le sous-groupe de F^{\times} formé par les sommes non nulles de carrés dans F . Une partie majeure des travaux ultérieurs sur le radical a été consacrée à la construction de corps F de radical non trivial, i.e. où les deux inclusions $F^{\times 2} \subset R(F) \subset \sum F^{\times 2}$, valables en général, sont strictes. C'est encore Cordes qui a donné le premier exemple d'un tel corps. M. Kula [12] et L. Berman [1], indépendamment l'un de l'autre, ont construit des exemples de corps de radical non trivial avec un nombre fini de classes de carrés.

Le présent travail a pour but de résumer et d'approfondir les connaissances sur le radical de Kaplansky et de fournir de nouveaux exemples.

Dans les sections 3 et 4, nous exposons un certain nombre de faits sur le radical et nous donnons des exemples simples de la forme qu'il peut prendre.

Les deux sections suivantes s'inspirent d'un travail de D. Kijima, M. Nishi et T. Iwakami ([9], [10] et [7]). Dans la section 5, nous étudions les corps dits *quasi-pythagoriciens*, dans lesquels toute somme de carrés appartient au radical. Le premier résultat sur le radical, établi par Kaplansky lui-même, s'inscrit dans ce contexte. Dans la section 6, nous cherchons à mettre en relation les radicaux de deux corps dont l'une est extension de l'autre. Le cas d'une extension quadratique présente un intérêt particulier : les quotients respectifs, pour chacun des deux corps, du groupe multiplicatif par le radical sont reliés par un certain complexe dont l'exactitude a été étudiée par Kijima, Nishi et Iwakami.

Le comportement du radical par rapport aux formes quadratiques, étudié dans la section 4, incite à regarder les liens entre radical et algèbres simples centrales, ce qui est fait dans la section 7.

Dans [11], Kula développe la théorie des schémas de formes quadratiques qui lui permet, en particulier, d'obtenir des corps de radical non trivial et avec un nombre fini de classes de carrés. Cette approche suggère que, pour un corps F , la structure des formes quadratiques modulo le radical $R(F)$ et le quotient $R(F)/F^{\times 2}$ paramètrent la structure des formes quadratiques sur F de façon indépendante. Aussi souhaiterait-on faire varier le radical par extension des scalaires tout en préservant la structure des formes quadratiques modulo le radical. La construction *d'agrandissement du radical*, développée dans cet esprit en dernière section, donne lieu à des exemples très généraux de corps de radical non trivial pour lesquels la structure des formes quadratiques modulo le radical est imposée.

2 Notations et rappels

Nous utiliserons librement les définitions et résultats de base en théorie algébrique des formes quadratiques sur un corps de caractéristique différente de 2. Les références standards sont [13] et [18]. Les formes quadratiques dont il est question dans la suite sont toutes supposées non dégénérées et l'on dira souvent seulement "forme" pour "forme quadratique". Les formes quadratiques de dimension 2 sont aussi appelées *formes binaires*. Pour deux formes quadratiques φ_1 et φ_2 on note $\varphi_1 \perp \varphi_2$ (resp. $\varphi_1 \otimes \varphi_2$) leur somme orthogonale (resp. leur produit tensoriel) et l'on écrit $\varphi_1 \cong \varphi_2$ pour signifier que φ_1 et φ_2 sont isométriques.

Soit φ une forme quadratique sur F . Si $a_1, \dots, a_m \in F^\times$ sont les valeurs de φ sur une base orthogonale alors on écrit $\varphi \cong \langle a_1, \dots, a_m \rangle$. Pour un entier positif n on note $n \times \varphi$ la somme orthogonale $\varphi \perp \dots \perp \varphi$ (n fois). L'ensemble des éléments non nuls de F représentés par φ est noté $D_F(\varphi)$. Si $D_F(\varphi) = F^\times$ alors on dit que φ est *universelle*.

2.1 Lemme. *Soit φ une forme quadratique sur F et $a \in F^\times$. Pour que φ représente a il faut et il suffit qu'il existe une forme quadratique φ' sur F telle que $\varphi \cong \varphi' \perp \langle a \rangle$. De plus, dans ce cas on a l'égalité*

$$D_F(\varphi) = \bigcup_{x \in D_F(\varphi')} D_F(\langle x, a \rangle).$$

Démonstration : C'est clair. □

On note $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ la *n-forme de Pfister* $\langle 1, a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, a_n \rangle$. C'est en particulier une forme multiplicative de dimension 2^n .

Si les formes quadratiques φ_1 et φ_2 sur F sont Witt équivalentes alors on écrit $\varphi_1 \doteq \varphi_2$. On désigne par $W(F)$ l'anneau de Witt de F et par $I(F)$ son idéal fondamental. Pour $n \geq 1$ on écrit $I^n F$ pour sa n -ième puissance, au lieu de $(I(F))^n$. Le *déterminant* de $\varphi \cong \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ est la classe du produit $a_1 \cdots a_m$ dans $F^\times / F^{\times 2}$. Il est noté $d(F)$. On appelle alors *discriminant* de φ la classe $d_\pm(\varphi) := (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot d(\varphi) \in F^\times / F^{\times 2}$. Il ne dépend que de la classe de φ dans $W(F)$. Ainsi le discriminant définit une application $d_\pm : W(F) \rightarrow F^\times / F^{\times 2}$. De plus, sa restriction à $I(F)$ est un homomorphisme de groupes. Par abus de notation, nous regarderons souvent $d_\pm(\varphi)$ comme un élément de F^\times , déterminé à un facteur carré près.

Nous notons $\text{Br}(F)$ le groupe de Brauer de F . Sa loi de groupe est notée additivement. Soit A une F -algèbre simple centrale. Le *degré* de A est par définition la racine carrée de la dimension de A sur F . On note $[A]$ la classe de A dans $\text{Br}(F)$ et on appelle *exposant* de A , noté $\exp_F(A)$, l'ordre de

[A] dans $\text{Br}(F)$. L'indice de A , noté $\text{ind}_F(A)$, est le degré de l'unique F -algèbre à division D qui représente la même classe que A dans $\text{Br}(F)$. A est dite *déployée* lorsqu'elle représente la classe triviale dans $\text{Br}(F)$, i.e. lorsque $A \cong \mathcal{M}_n(F)$ pour un $n \geq 1$.

On rappelle que, pour $a, b \in F^\times$, la F -algèbre de quaternions $(a, b)_F$ a pour forme norme la 2-forme de Pfister $\langle\langle -a, -b \rangle\rangle$.

2.2 Lemme. *Pour $a, b \in F^\times$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La F -algèbre $(a, b)_F$ est déployée.*
- (ii) *La 2-forme de Pfister $\langle\langle -a, -b \rangle\rangle$ est hyperbolique.*
- (iii) *La forme quadratique $\langle 1, -a, -b \rangle$ est isotrope.*

Référence : [13, Chap. III, Theorem. 2.7.].

2.3 Lemme. *Pour $a, b \in F^\times$ on a $D_F(\langle 1, a \rangle) \cap D_F(\langle 1, b \rangle) \subset D_F(\langle 1, -ab \rangle)$.*

Démonstration : Soit $x \in D_F(\langle 1, a \rangle) \cap D_F(\langle 1, b \rangle)$. Il vient $-a, -b \in D_F(\langle 1, -x \rangle)$ et ainsi $ab \in D_F(\langle 1, -x \rangle)$, d'où $x \in D_F(\langle 1, -ab \rangle)$. \square

Soit K/F une extension de corps. L'extension de scalaires induit un homomorphisme canonique de groupes $\text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}(K)$ ainsi qu'un homomorphisme canonique d'anneaux $W(F) \rightarrow W(K)$. Le noyau de $\text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}(K)$ est noté $\text{Br}(K/F)$ et appelé *groupe de Brauer relatif de K/F* . Pour une extension finie K/F , on note $N_{K/F}$ l'homomorphisme de norme $K^\times \rightarrow F^\times$.

2.4 Proposition. *Soit $K := F(\sqrt{a})$, avec $a \in F^\times \setminus F^{\times 2}$. Les homomorphismes d'inclusion $F^\times \hookrightarrow K^\times$ et de norme $N_{K/F} : K^\times \rightarrow F^\times$ donnent lieu à une suite exacte de groupes*

$$1 \longrightarrow \{F^{\times 2}, aF^{\times 2}\} \longrightarrow F^\times / F^{\times 2} \longrightarrow K^\times / K^{\times 2} \longrightarrow F^\times / F^{\times 2}.$$

Référence : [13, Chap. VII, Theorem 3.4.].

2.5 Proposition (Principe de la Norme). *Soient K/F une extension quadratique, φ une forme quadratique sur F et $x \in K^\times$. Pour qu'il existe $c \in F^\times$ tel que $cx \in D_K(\varphi_K)$ il faut et il suffit que $N_{K/F}(x) \in D_F(\varphi) \cdot D_F(\varphi)$.*

Référence : [6, Norm Principle 2.13.].

Remarque : On utilisera le Principe de la Norme surtout dans le cas où φ est une forme de Pfister ; dans ce cas on a $D_F(\varphi) \cdot D_F(\varphi) = D_F(\varphi)$, puisque φ est multiplicative.

Une extension K/F qui s'injecte dans une clôture quadratique de F est appelée *2-extension*. L'énoncé suivant est classique :

2.6 Lemme. *Soit K/F une 2-extension non triviale. Alors K contient une extension quadratique de F .*

Démonstration : Si l'on choisit un élément $x \in K^\times \setminus F^\times$, alors $F(x)/F$ est une 2-extension non triviale contenue dans K/F . On peut donc supposer que K/F est finie. Soit L/F une clôture galoisienne de K/F . Comme toute clôture quadratique de F est une extension galoisienne de F , L/F est également une 2-extension. On note G le groupe de Galois de L/F et H le groupe de Galois de L/K . Alors G est un 2-groupe et, comme l'extension K/F est non triviale, on a $H \neq G$. On choisit un sous-groupe maximal H' de G qui contient H . Alors H' est d'indice 2 dans G (cf. [2, Chap. I, §6, Proposition 12]) et $L^{H'}$, le sous-corps de L fixé par H' , est une extension quadratique de F contenue dans K . \square

3 Structure du radical et exemples

Nous appelons *radical de F* l'ensemble

$$R(F) := \bigcap_{a \in F^\times} D_F(\langle 1, a \rangle).$$

Il vient de cette définition que le radical de F est un sous-groupe de F^\times et que l'on a les inclusions $F^{\times 2} \subset R(F) \subset \sum F^{\times 2}$. Dans cette section, nous donnons des exemples qui illustrent les diverses positions possibles du radical $R(F)$ par rapport à $F^{\times 2}$ et $\sum F^{\times 2}$. Il convient d'abord de chercher des caractérisations équivalentes pour les éléments du radical.

3.1 Proposition. *Pour $x \in F^\times$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $x \in R(F)$.
- (ii) La forme $\langle 1, -x \rangle$ est universelle sur F .
- (iii) Pour tout $a \in F^\times$ on a l'égalité $D_F(\langle 1, a \rangle) = D_F(\langle 1, ax \rangle)$.
- (iv) La F -algèbre $(x, y)_F$ est déployée quel que soit $y \in F^\times$.
- (v) $\text{Br}(F(\sqrt{x})/F) = 0$.

Référence : Les équivalences $(i \Leftrightarrow ii \Leftrightarrow iv)$ sont mentionnées dans [3, p. 253].

Démonstration : Les conditions (i) et (ii) sont chacune équivalentes à ce que la forme $\langle 1, -x, -y \rangle$ soit isotrope quel que soit $y \in F^\times$, ce qui est, d'après (2.2), également équivalent à (iv) . De (2.3) on déduit l'égalité

$$D_F(\langle 1, a \rangle) \cap D_F(\langle 1, -x \rangle) = D_F(\langle 1, ax \rangle) \cap D_F(\langle 1, -x \rangle)$$

pour $a, x \in F^\times$, d'où l'implication $(ii \Rightarrow iii)$. Pour la réciproque, il suffit de prendre $a := -1$.

Sans hypothèse sur $x \in F^\times$, le groupe de Brauer relatif $\text{Br}(F(\sqrt{x})/F)$ consiste en les classes de F -algèbres de quaternions $(x, y)_F$, avec $y \in F^\times$. L'équivalence $(iv \Leftrightarrow v)$ s'ensuit. \square

3.2 Corollaire. *Pour que le corps F satisfasse $R(F) = F^\times$ il faut et il suffit que toute forme binaire sur F soit universelle.* \square

Un corps F qui vérifie $R(F) = F^\times$ est non réel. De façon plus générale, on s'intéresse aux corps F pour lesquels $R(F) = \sum F^{\times 2}$. Ces corps, dits *quasi-pythagoriciens*, seront étudiés en section 5.

3.3 Exemples. Dans les cas suivants le corps F vérifie $R(F) = F^\times$:

- (i) F est un corps fini (de caractéristique impaire),
- (ii) $F = k((X))$ où k est un corps quadratiquement clos (avec $\text{car}(k) \neq 2$),
- (iii) $F = k(X)$ où k est un corps algébriquement clos (avec $\text{car}(k) \neq 2$).

En effet, dans les cas (i) et (ii) , F est non réel avec $|F^\times/F^{\times 2}| = 2$, donc il existe seulement deux formes binaires sur F et elles sont universelles. Dans (iii) le corps F possède la propriété \mathcal{C}_1 (voir [18, Chap. 2, § 15]) et ainsi toute forme binaire sur F est universelle.

Il arrive souvent que le radical du corps est réduit au groupe des carrés. On dit que le corps F est *sans radical* si $R(F) = F^{\times 2}$.

3.4 Exemples. (1) *Tout corps local est sans radical.* En effet, sur un corps local F il existe une F -algèbre de quaternions à division qui est déployée par toute extension quadratique de F [13, Chap. IV, Lemma 2.14] ; par conséquent, on a $\text{Br}(F(\sqrt{x})/F) \neq 0$ pour $x \in F^\times \setminus F^{\times 2}$; il s'ensuit par l'implication $(i \Rightarrow v)$ de (3.1) que $R(F) = F^{\times 2}$.

(2) *Tout corps pythagoricien est sans radical.* C'est clair car pour un corps pythagoricien F on a par définition $\sum F^{\times 2} = F^{\times 2}$ et ainsi les inclusions

$F^{\times 2} \subset R(F) \subset \sum F^{\times 2}$ sont des égalités. En fait, un corps est pythagoricien si et seulement s'il est quasi-pythagoricien et sans radical.

(3) *Tout corps de nombres est sans radical.* Pour le vérifier, on considère pour un corps de nombres F ses complétés F_{\wp} pour toutes les places \wp sur F . Alors, de l'égalité $F^{\times} = F^{\times} F_{\wp}^{\times 2}$ on déduit par l'équivalence ($i \Leftrightarrow ii$) de (3.1) que $R(F) \subset R(F_{\wp})$. Or, $R(F_{\wp}) = F_{\wp}^{\times 2}$ puisque F_{\wp} est soit un corps local soit un corps réellement clos et ainsi pythagoricien. Un élément de $R(F)$ devient donc un carré dans tout complété F_{\wp} ; le "théorème du carré global" [14, p. 182] dit alors que cet élément est un carré dans F .

3.5 Proposition. *Soit F un corps complet pour une valuation discrète avec un corps résiduel de caractéristique différente de 2 et non quadratiquement clos. Alors F est sans radical.*

Démonstration : Soient v la valuation pour laquelle F est complet et π une uniformisante pour v . Il suit de [13, Chap. VI, Proposition 1.9.] que $D_F(\langle 1, a\pi \rangle) = F^{\times 2} \cup a\pi F^{\times 2}$ pour tout $a \in F^{\times}$ tel que $v(a) = 0$. Comme le corps résiduel n'est pas quadratiquement clos il existe un élément $a \in F^{\times} \setminus F^{\times 2}$ tel que $v(a) = 0$. Il vient $R(F) \subset D_F(\langle 1, \pi \rangle) \cap D_F(\langle 1, a\pi \rangle) = F^{\times 2}$, donc $R(F) = F^{\times 2}$. \square

3.6 Corollaire. *Si F est un corps non quadratiquement clos alors $F((X))$ est sans radical.* \square

On s'intéresse maintenant aux corps qui ne sont ni quasi-pythagoriciens ni sans radical. On dira que le corps F est *de radical non trivial* lorsque $F^{\times 2} \subsetneq R(F) \subsetneq \sum F^{\times 2}$. Pour les corps non réels cette définition coïncide avec celle qui est donnée dans [3, p. 259]. Nous donnons un exemple d'une extension algébrique non réelle de \mathbb{Q} avec 8 classes de carrés et de radical non trivial.

3.7 Exemple. Dans \mathbb{Q}_3 les entiers $-2, -5$ et 7 sont des carrés. \mathbb{Q}_3 contient donc le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-5})$, dans lequel 7 n'est pas un carré. Parmi les sous-corps de \mathbb{Q}_3 qui sont extension algébrique de $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-5})$ et dans lesquels 7 n'est pas un carré, on choisit un corps F maximal. Alors $F(\sqrt{7})$ est la seule extension quadratique de F dans \mathbb{Q}_3 . Les quatre classes de carrés de \mathbb{Q}_3 étant représentées par $1, 2, 3$ et 6 , il s'ensuit que les classes de $2, 3, 7$ forment une \mathbb{F}_2 -base de $F^{\times}/F^{\times 2}$; en particulier $|F^{\times}/F^{\times 2}| = 8$.

On déduit de $\mathbb{Q}_3^{\times} = F^{\times} \mathbb{Q}_3^{\times 2}$ que $R(F) \subset R(\mathbb{Q}_3)$. Comme \mathbb{Q}_3 est sans radical il vient $R(F) \subset F^{\times} \cap \mathbb{Q}_3^{\times 2} = F^{\times 2} \cup 7 F^{\times 2}$. On calcule $2 = 3^2 - 7$, $3 = (\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-5})^2 - 7$ et $2 \cdot 3 \cdot 7 = 7^2 - 7$; on en conclut $D_F(\langle 1, -7 \rangle) = F^{\times}$, d'où $R(F) = F^{\times 2} \cup 7 F^{\times 2}$.

4 Radical et formes quadratiques

Dans cette section, nous exposons plusieurs résultats qui éclairent le rôle joué par le radical de Kaplansky dans la théorie des formes quadratiques. En particulier, nous mettons en correspondance le radical avec l'idéal de l'anneau de Witt formé par les formes binaires universelles (4.4), et, pour tout élément $a \in R(F)$, nous déterminons le noyau de l'homomorphisme canonique $W(F) \rightarrow W(F(\sqrt{a}))$ (4.5).

4.1 Lemme. *Soit β une forme binaire sur F . Pour que β soit universelle il faut et il suffit que son discriminant $d_{\pm}(\beta)$ appartienne à $R(F)$. Si tel est le cas, alors $\beta \cong \langle 1, -d_{\pm}(\beta) \rangle$ et pour toute forme quadratique φ sur F on a*

$$\varphi \otimes \beta \doteq \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi \text{ est de dimension paire,} \\ \beta & \text{si } \varphi \text{ est de dimension impaire.} \end{cases}$$

β soit universelle il faut et il suffit que $\langle 1, -d_{\pm}(\beta) \rangle$ soit universelle, i.e. que $d_{\pm}(\beta) \in R(F)$.

Démonstration : La forme β est semblable à $\langle 1, -d_{\pm}(\beta) \rangle$. Pour que β soit universelle il faut et il suffit que $\langle 1, -d_{\pm}(\beta) \rangle$ soit universelle, i.e. que $d_{\pm}(\beta) \in R(F)$.

On suppose maintenant que β est universelle. En particulier, β représente 1, d'où $\beta \cong \langle 1, -d_{\pm}(\beta) \rangle$. Soit φ une forme quadratique sur F . Alors $\beta \otimes \varphi$ est isotrope dès lors que $\dim(\varphi) \geq 2$. Si $\dim(\varphi) = 2$ alors $\beta \otimes \varphi$ est semblable à une 2-forme de Pfister et, étant isotrope, elle est hyperbolique. Par conséquent, $\beta \otimes \varphi$ est hyperbolique si φ est de dimension paire. Si φ est de dimension impaire alors on écrit $\varphi \cong \varphi' \perp \langle z \rangle$, avec un élément z de F^{\times} et une forme de dimension paire φ' , et on obtient $\varphi' \otimes \beta \doteq 0$ et ainsi $\varphi \otimes \beta \doteq z\beta \cong \beta$. \square

4.2 Proposition (Cordes). *Soient $a_1, \dots, a_n \in F^{\times}$ et $r_1, \dots, r_n \in R(F)$ avec $n \geq 2$.*

- (a) *Les formes $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ et $\langle a_1 r_1, \dots, a_n r_n \rangle$ représentent les mêmes éléments de F^{\times} .*
- (b) *Si $n \geq 3$ alors $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ est isotrope si et seulement si $\langle a_1 r_1, \dots, a_n r_n \rangle$ est isotrope.*
- (c) *$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle \cong \langle\langle a_1 r_1, \dots, a_n r_n \rangle\rangle$.*

Référence : Les parties (a) et (b) proviennent de [3, Proposition 1 & Corollary]. Une version plus générale de (c) se trouve dans [21, Theorem 2.4].

Démonstration : Tous les énoncés s'obtiennent par récurrence à partir du cas où $r_1 = \dots = r_{n-1} = 1$. On se place alors dans cette situation et l'on pose $a := a_n$, $r := r_n$, $\varphi := \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ et $\pi := \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle\rangle$.

(a) Supposons que $\varphi \perp \langle a \rangle$ représente $x \in F^\times$. On peut alors écrire $\varphi \cong \varphi' \perp \langle b \rangle$ où b est un élément de F^\times tel que x est représenté par la forme binaire $\langle b, a \rangle$ et φ' est une forme sur F . Comme $r \in R(F)$, l'implication (i \Rightarrow iii) de (3.1) donne $bx \in D_F(\langle 1, ab \rangle) = D_F(\langle 1, rab \rangle)$ et ainsi $x \in D_F(\langle b, ar \rangle) \subset D_F(\varphi \perp \langle ar \rangle)$. Cela montre l'inclusion $D_F(\varphi \perp \langle a \rangle) \subset D_F(\varphi \perp \langle ar \rangle)$. Par symétrie, on a l'égalité.

(b) Soit $n \geq 3$. Si $\varphi \perp \langle a \rangle$ est isotrope alors on peut écrire $\varphi \cong \varphi' \perp \langle -a \rangle$ avec φ' une forme non triviale. Comme $\langle -a, ar \rangle$ est universelle, $\varphi \perp \langle ar \rangle$ est isotrope. Par symétrie on a l'équivalence de l'énoncé.

(c) La forme $\pi \otimes \langle a, -ar \rangle$ est hyperbolique d'après (4.1). Il vient $a\pi \cong ar\pi$ et ainsi $\pi \otimes \langle 1, a \rangle \cong \pi \otimes \langle 1, ar \rangle$. \square

4.3 Corollaire (Cordes). *Pour toute forme quadratique φ de dimension au moins 2 sur F , l'ensemble $D_F(\varphi)$ est l'union des classes de F^\times modulo $R(F)$.* \square

4.4 Proposition. *L'application $R(F) \rightarrow W(F)$ qui à un élément $x \in R(F)$ associe la classe de la forme $\langle 1, -x \rangle$ est un homomorphisme de groupes. Son noyau est $F^{\times 2}$ et son image est l'idéal de $W(F)$ formé par les classes des formes binaires universelles.*

Démonstration : Pour $x, y \in R(F)$ la forme quadratique $\langle 1, -x, 1, -y \rangle$ est isotrope puisqu'elle contient des sous-formes binaires universelles. Il vient $\langle 1, -x, 1, -y \rangle \doteq \beta$ pour une forme binaire β de discriminant $xy \in R(F)$, donc pour $\beta \cong \langle 1, -xy \rangle$. Cela montre que l'application $R(F) \rightarrow W(F)$ est un homomorphisme de groupes. Il est clair que son noyau est $F^{\times 2}$ et, en vertu de (4.1), que son image est un idéal, constitué des classes des formes binaires universelles. \square

4.5 Théorème. *Soit $K = F(\sqrt{a})$ avec $a \in R(F) \setminus F^{\times 2}$. Alors $\langle 1, -a \rangle$ est, à isométrie près, la seule forme quadratique anisotrope sur F qui devienne isotrope par extension des scalaires à K . En particulier, $\langle 1, -a \rangle$ représente la seule classe non triviale dans le noyau de l'homomorphisme canonique $W(F) \rightarrow W(K)$.*

Démonstration : Comme a n'est pas un carré dans F , la forme $\langle 1, -a \rangle$ est anisotrope sur F et hyperbolique sur K . Supposons maintenant que φ est une forme quadratique anisotrope sur F telle que φ_K est isotrope. Donc φ contient une sous-forme binaire β de discriminant a [18, 2.5.1. Lemma]. D'après (4.1), β est universelle et isométrique à $\langle 1, -a \rangle$, car $a \in R(F)$. Comme φ est anisotrope, il vient $\varphi \cong \beta \cong \langle 1, -a \rangle$. \square

5 Corps quasi-pythagoriciens

Le corps F est dit *quasi-pythagoricien* lorsque $R(F) = D_F(\langle 1, 1 \rangle)$. Cette notion a été introduite par Kijima et Nishi dans [10]. Nous allons donner différentes caractérisations des corps quasi-pythagoriciens, pour la plupart connues. Elles permettent de donner une nouvelle preuve, de nature structurelle, d'un résultat important de [10], à savoir qu'une extension quadratique $F(\sqrt{a})$ d'un corps quasi-pythagoricien F est également un corps quasi-pythagoricien lorsque $a \in \sum F^{\times 2}$ (5.2). En ce qui concerne les corps quasi-pythagoriciens à ordre unique, il s'avère que ce sont exactement ceux décrits par I. Kaplansky dans le premier résultat sur le radical (5.3).

Une forme quadratique φ est dite *faiblement isotrope* (resp. *de torsion*) s'il existe $n \geq 1$ tel que $n \times \varphi$ est isotrope (resp. hyperbolique). Une forme non faiblement isotrope est dite *fortement anisotrope*.

5.1 Proposition. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) F est quasi-pythagoricien.
- (ii) $R(F) = \sum F^{\times 2}$.
- (iii) Pour tout élément $a \in \sum F^{\times 2}$ on a l'égalité $D_F(\langle 1, a \rangle) = R(F)$.
- (iv) Il existe $a \in F^\times$ tel que $D_F(\langle 1, a \rangle) = R(F)$.
- (v) $I^2 F$ est sans torsion.
- (vi) Sur F , toute 2-forme de Pfister anisotrope est fortement anisotrope.
- (vii) L'homomorphisme $I^2 F \rightarrow I^3 F$ donné par la multiplication par la forme $\langle 1, 1 \rangle$ est injectif.

Référence : Les équivalences ($i \Leftrightarrow ii \Leftrightarrow v$) sont données dans [10, Section 2].

Démonstration : ($i \Rightarrow ii$) : On suppose $D_F(\langle 1, 1 \rangle) = R(F)$. Par (2.1) et l'implication ($i \Rightarrow iii$) de (3.1) on obtient

$$D_F(\langle 1, 1, 1 \rangle) = \bigcup_{x \in D_F(\langle 1, 1 \rangle)} D_F(\langle 1, x \rangle) = \bigcup_{x \in R(F)} D_F(\langle 1, x \rangle) = D_F(\langle 1, 1 \rangle),$$

i.e. dans F , tout élément qui est somme de trois carrés est déjà une somme de deux carrés. Il vient $\sum F^{\times 2} = D_F(\langle 1, 1 \rangle) = R(F)$.

($ii \Rightarrow iii$) : Pour $a \in \sum F^{\times 2}$, les inclusions $R(F) \subset D_F(\langle 1, a \rangle) \subset \sum F^{\times 2}$ deviennent des égalités sous l'hypothèse (ii).

($iii \Rightarrow iv$) : On prend $a := 1$.

($iv \Rightarrow i$) : Supposons que $D_F(\langle 1, a \rangle) = R(F)$. Il vient $a \in R(F)$ et par l'implication ($i \Rightarrow iii$) de (3.1) il s'ensuit que $D_F(\langle 1, 1 \rangle) = D_F(\langle 1, a \rangle) = R(F)$.

($ii \Rightarrow v$) : Supposons que $R(F) = \sum F^{\times 2}$. Soit φ une forme anisotrope de dimension au moins trois sur F . On va montrer que $n \times \varphi$ est anisotrope pour tout $n \geq 1$. Soit $\varphi \cong \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ avec $a_1, \dots, a_m \in F^\times$ et $m \geq 3$. Si $n \times \varphi$ est isotrope pour un $n \geq 1$, alors il existe $r_1, \dots, r_m \in \sum F^{\times 2} = R(F)$ tels que $\langle r_1 a_1, \dots, r_m a_m \rangle$ est isotrope. C'est donc aussi vrai pour φ , d'après (4.2). Cela montre que toute forme anisotrope de dimension au moins 3 est fortement anisotrope. Il s'ensuit que $I^2 F$ est sans torsion.

($v \Rightarrow vi, vii$) : C'est clair.

($vi \Rightarrow ii$) : Soit $a \in \sum F^{\times 2}$. Pour tout $b \in F^\times$ la forme $\langle -a, b \rangle$ est de torsion, donc hyperbolique par l'hypothèse (vi). Cela montre que $\langle 1, -a \rangle$ est universelle, d'où $a \in R(F)$.

($vii \Rightarrow v$) : Par hypothèse, l'idéal $I^2 F$ ne contient pas d'élément d'ordre 2. Or, l'ordre de tout élément de torsion de $W(F)$ est une puissance de 2 [18, 2.6.4. Theorem, (ii)]. Donc $I^2 F$ est sans torsion. \square

5.2 Corollaire (Kijima, Nishi). Soient F un corps quasi-pythagoricien et $K = F(\sqrt{a})$ pour $a \in \sum F^{\times 2}$. Alors K est quasi-pythagoricien.

Référence : [10, p. 34].

Démonstration : La proposition (5.1) assure que $a \in R(F)$ et que l'homomorphisme $I^2 F \rightarrow I^3 F$ donné par la multiplication par la forme $\langle 1, 1 \rangle$ est injectif. On peut supposer que $a \notin F^{\times 2}$. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} I^2 F & \longrightarrow & I^2 K & \longrightarrow & I^2 F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ I^3 F & \longrightarrow & I^3 K & \longrightarrow & I^3 F \end{array}$$

où les flèches verticales représentent les multiplications respectives avec la forme $\langle 1, 1 \rangle$ et où les flèches horizontales sont données par l'homomorphisme canonique $W(F) \rightarrow W(K)$ et le transfert $W(K) \rightarrow W(F)$ associé à la F -forme linéaire $s : K \rightarrow F$ avec $s(1) = 0$ et $s(\sqrt{a}) = 1$ (cf. [18, Chap. 2, §5]). Il résulte du théorème (4.5) que l'homomorphisme $I^3 F \rightarrow I^3 K$ est injectif et de [4, Theorem 3.3.] que la première ligne du diagramme est exacte. Une chasse de diagramme montre alors que la flèche verticale du milieu est aussi injective. Ainsi, d'après (5.1), K est quasi-pythagoricien. \square

5.3 Corollaire (Kaplansky). *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) F est réel et la seule F -algèbre de quaternions à division est $(-1, -1)_F$.
- (ii) F est quasi-pythagoricien et admet un seul ordre.
- (iii) $R(F)$ est d'indice 2 dans F^\times .

Référence : L'équivalence $(i \Leftrightarrow iii)$ est l'énoncé de [8, Theorem 1].

Démonstration : $(i \Rightarrow ii)$: L'unique 2-forme de Pfister anisotrope sur F est $\langle\langle 1, 1 \rangle\rangle$, la forme norme de $(-1, -1)_F$, et cette forme est fortement anisotrope car F est réel. Par la caractérisation (5.1, vi) il suit que F est quasi-pythagoricien. Pour $a \in F^\times \setminus D_F(\langle 1, 1 \rangle)$ la F -algèbre de quaternions $(-1, a)_F$ est à division, donc isomorphe à $(-1, -1)_F$ et il s'ensuit que $-a \in D_F(\langle 1, 1 \rangle)$. Comme F est réel, cela montre que $\sum F^{\times 2}$ est d'indice 2 dans F^\times , i.e. F admet un seul ordre.

$(ii \Rightarrow iii)$: D'après les hypothèses, $R(F)$ est égal à $\sum F^{\times 2}$ qui est d'indice 2 dans F^\times .

$(iii \Rightarrow i)$: On choisit $x \in F^\times \setminus R(F)$. L'hypothèse et les relations $R(F) \subset D_F(\langle 1, -x \rangle) \subsetneq F^\times$ entraînent que $D_F(\langle 1, -x \rangle) = R(F)$. Il s'ensuit par l'implication $(iv \Rightarrow ii)$ de la proposition (5.1) que $R(F) = \sum F^{\times 2}$. Donc F est réel, $F^\times = R(F) \cup -R(F)$ et la F -algèbre $(-1, -1)_F$ est à division.

Supposons maintenant que $(a, b)_F$ est à division, avec $a, b \in F^\times$. Il vient $a, b \notin R(F)$, donc $-a, -b \in R(F)$. À l'aide de la partie (c) de la proposition (4.2), on obtient $\langle\langle -a, -b \rangle\rangle \cong \langle\langle 1, 1 \rangle\rangle$ et alors $(a, b)_F \cong (-1, -1)_F$. \square

Le corps des réels \mathbb{R} satisfait les conditions équivalentes du corollaire (5.3). En effet, le théorème de Frobenius affirme que $(-1, -1)_\mathbb{R}$ est la seule \mathbb{R} -algèbre centrale à division. Pour tout entier positif m , K. Szymiczek a donné un exemple de corps réel F tel que $|F^\times / F^{\times 2}| = 2^m$ et tel que $R(F)$ est d'indice 2 dans F^\times [19, p. 217]. On pourra également obtenir des exemples de tels corps en appliquant le corollaire (8.5) au corps \mathbb{R} .

6 Radical et extension du corps

Cette section vise à établir des relations entre les deux radicaux $R(F)$ et $R(K)$ pour une extension K/F . D'abord, nous cherchons à savoir à quelle condition l'inclusion $R(F) \subset R(K)$ est valable. Ensuite, nous nous restreignons au cas d'une extension quadratique K/F et nous abordons le problème de savoir si la suite exacte canonique qui fait intervenir les groupes des carrés

$$1 \longrightarrow \{F^{\times 2}, aF^{\times 2}\} \longrightarrow F^{\times}/F^{\times 2} \longrightarrow K^{\times}/K^{\times 2} \longrightarrow F^{\times}/F^{\times 2}$$

(voir proposition (2.4)) admet un analogue au moins partiel pour les radicaux. On obtient effectivement un complexe

$$F^{\times}/R(F) \longrightarrow K^{\times}/R(K) \longrightarrow F^{\times}/R(F).$$

La question de l'exactitude de ce complexe a été posée à l'origine par D. Kijima et M. Nishi. Nous nous inspirons là de l'étude entreprise dans [9], [10] et [7]. Enfin, nous donnons un exemple simple d'extension quadratique K/F où F est sans radical alors que K est de radical non trivial.

6.1 Théorème (Cordes). *Pour toute extension quadratique K/F on a les inclusions $R(F) \subset R(K)$ et $N_{K/F}(R(K)) \subset R(F)$.*

Référence : [3, Proposition 3, Corollary] et [3, Proposition 5].

Démonstration : Soit $a \in R(F)$. Pour $x \in K^{\times}$, comme la forme $\langle 1, -a \rangle$ représente $N_{K/F}(x)$ sur F , le Principe de la Norme assure l'existence d'un élément c de F^{\times} tel que $cx \in D_K(\langle 1, -a \rangle)$; comme $c \in D_F(\langle 1, -a \rangle)$, il vient $x \in D_K(\langle 1, -a \rangle)$. Ainsi la forme $\langle 1, -a \rangle$ est universelle aussi sur K . Cela montre l'inclusion $R(F) \subset R(K)$.

Pour voir que $N_{K/F}(R(K)) \subset R(F)$, considérons maintenant $x \in R(K)$. Pour $a \in F^{\times}$ la forme $\langle 1, a \rangle$ représente x sur K ; d'après le Principe de la Norme, la même forme sur F représente alors $N_{K/F}(x)$. On en conclut que $N_{K/F}(x) \in R(F)$. \square

6.2 Corollaire. *Pour toute 2-extension K/F on a $R(F) \subset R(K)$.*

Démonstration : Soient $r \in R(F)$ et $x \in K^{\times}$. Alors $F(x)/F$ est une 2-extension finie. À l'aide de (2.6) on choisit une suite de corps F_0, \dots, F_n , où $F_0 = F$ et $F_n = F(x)$, telle que F_i/F_{i-1} est une extension quadratique pour $1 \leq i \leq n$. Par récurrence sur i , on obtient, grâce à (6.1), que $r \in R(F_i)$. En particulier, $\langle 1, -r \rangle$ représente x sur le corps $F_n = F(x)$, donc aussi sur K . Cela montre que $R(F) \subset R(K)$. \square

Pour une extension K/F transcendante ou finie de degré autre que 2, il peut arriver que $R(F) \not\subset R(K)$.

6.3 Exemples. (1) Soit F un corps non quadratiquement clos tel que $R(F) = F^\times$. Alors pour $K := F((X))$ on a $R(K) = K^{\times 2}$ (3.6) et $F^\times \not\subset K^{\times 2}$, d'où $R(F) \not\subset R(K)$.

(2) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Notons F_0 la clôture quadratique du corps \mathbb{Q} . On choisit une extension K_0/F_0 de degré n (voir la remarque suivante). Il est connu que le groupe des classes de carrés de K_0 est infini [13, Chapter VII, Appendix, Corollary 3]. Posons $F := F_0((X))$ et $K := K_0((X))$. Il vient alors $[K : F] = [K_0 : F_0] = n$, $R(F) = F^\times$ et $R(K) = K^{\times 2}$. En particulier, $X \in R(F) \setminus R(K)$.

Remarque : Pour obtenir une extension K_0/F_0 de degré $n \geq 3$ donné, où F_0 est la clôture quadratique de \mathbb{Q} , on peut utiliser la construction suivante, qui a été suggérée à l'auteur par D. Leep :

On choisit une extension galoisienne L/\mathbb{Q} de groupe de Galois \mathcal{S}_n et on note k le sous-corps de L fixé par \mathcal{A}_n . Ainsi k/\mathbb{Q} est une extension quadratique et L/k une extension galoisienne de groupe \mathcal{A}_n . Comme \mathcal{A}_n n'a pas de sous-groupe d'indice 2, le corps L ne contient aucune sous-extension quadratique de k . Ceci dit que les extensions L/k et F_0/k sont linéairement disjointes. Ainsi LF_0/F_0 est également une extension galoisienne de groupe \mathcal{A}_n . On choisit un sous-groupe H de \mathcal{A}_n isomorphe à \mathcal{A}_{n-1} , donc d'indice n . Alors le sous-corps de LF_0 fixé par H est une extension de degré n de F_0 .

6.4 Corollaire. *Pour toute extension quadratique K/F , les homomorphismes d'inclusion $F^\times \hookrightarrow K^\times$ et de norme $N_{K/F} : K^\times \rightarrow F^\times$ induisent un complexe*

$$F^\times/R(F) \longrightarrow K^\times/R(K) \longrightarrow F^\times/R(F).$$

Démonstration : Le fait que les deux homomorphismes soient bien définis provient du théorème. Les relations $N_{K/F}(F^\times) = F^{\times 2} \subset R(F)$ montrent alors que leur composition dans l'ordre donné est triviale. \square

6.5 Corollaire. *Soit K/F une extension quadratique telle que $K = F(\sqrt{a})$ pour $a \in R(F) \setminus F^{\times 2}$. Alors on a l'égalité $R(F) = F^\times \cap R(K)$ et le complexe*

$$1 \longrightarrow F^\times/R(F) \longrightarrow K^\times/R(K) \longrightarrow F^\times/R(F) \longrightarrow 1$$

issu de (6.4) est exact à gauche et à droite.

Démonstration : Soit $x \in F^\times \cap R(K)$. Pour $y \in F^\times$, la F -algèbre de quaternions $(x, y)_F$, devenant déployée après extension des scalaires à K , est elle-même déjà déployée, puisque $\text{Br}(K/F) = 0$ (3.1). Par conséquent, $x \in R(F)$. Cela montre qu'ici l'inclusion $R(F) \subset F^\times \cap R(K)$ (6.1) est une

égalité. Aussi le complexe est-il exact à gauche. Comme $a \in R(F)$ la norme $N_{K/F}$ est surjective, d'où l'exactitude à droite. \square

La question de l'exactitude du complexe du corollaire (6.4) est équivalente à :

6.6 Question (Kijima, Nishi). *Pour K/F une extension quadratique, a-t-on l'égalité $N_{K/F}^{-1}(R(F)) = F^\times R(K)$?*

David Leep a annoncé récemment un exemple qui montre que la réponse à cette question, en général, est négative : il construit une extension quadratique K/F telle que $R(F) \neq F^{\times 2}$ alors que $R(K) \subset F^\times K^{\times 2}$; il s'ensuit que $F^\times R(K) = N_{K/F}^{-1}(F^{\times 2}) \neq N_{K/F}^{-1}(R(F))$, puisque $R(F) \subset N_{K/F}(K^\times)$.

Néanmoins, dans certains cas, la question admet une réponse positive :

6.7 Corollaire (Kijima, Nishi). *Soient F un corps quasi-pythagorien et $K = F(\sqrt{a})$ avec $a \in R(F) \setminus F^{\times 2}$. Alors le complexe donné dans (6.5) est exact.*

Référence : [10, Theorem 2.13.].

Démonstration : Comme F est quasi-pythagorien, d'après (5.2), il en est de même pour K . À l'aide du Principe de la Norme, on obtient

$$N_{K/F}^{-1}(R(F)) = N_{K/F}^{-1}(D_F(\langle 1, 1 \rangle)) = F^\times D_K(\langle 1, 1 \rangle) = F^\times R(K),$$

ce qui prouve l'exactitude du complexe au milieu. \square

Pour une extension quadratique $K = F(\sqrt{a})$, le corollaire (6.5) affirme que l'inclusion $R(F) \subset F^\times \cap R(K)$ est une égalité lorsque $a \in R(F)$. Pourtant, si $a \notin R(F)$, on peut avoir une inclusion stricte $R(F) \subsetneq F^\times \cap R(K)$ comme l'illustre l'exemple suivant.

6.8 Exemple. Soient F un sous-corps maximal réel de \mathbb{Q}_2 et $K = F(\sqrt{-2})$. Alors F est sans radical, tandis que $R(K)$ contient une classe non triviale modulo $K^{\times 2}$ représentée par -7 . En effet, avec $a := 2$, $b := 5$ et $c := 7$, on vérifie que les hypothèses de (6.9) ci-dessous sont satisfaites, en utilisant que $F(\sqrt{-7})$ est l'unique extension quadratique de F contenue dans \mathbb{Q}_2 et que 7 n'est une somme de trois carrés ni dans F ni dans \mathbb{Q}_2 .

Par ailleurs, dans [1, Section 2], L. Berman construit, pour tout $n \geq 0$, un corps réel pythagorien F tel que le corps $K := F(\sqrt{-1})$ vérifie les conditions $|K^\times/R(K)| = 4$ et $|R(K)/K^{\times 2}| = 2^n$; pour l'extension quadratique K/F on a alors $R(F) \subsetneq F^\times \cap R(K)$ si $n > 0$.

6.9 Proposition. Soient F un corps réel tel que $|F^\times/F^{\times 2}| = 16$ et a, b des éléments de $D_F(\langle 1, 1 \rangle)$ tels que $a + b$ n'est pas somme de 3 carrés dans F . On note $K := F(\sqrt{-a})$ et $c := a + b$. Alors :

- (a) F est sans radical et admet un unique ordre,
- (b) $D_F(\langle 1, c \rangle) = \sum F^{\times 2}$,
- (c) K est non réel avec $|K^\times/K^{\times 2}| = 32$,
- (d) $R(K) = K^{\times 2} \cup -cK^{\times 2}$ et $-c \notin K^{\times 2}$.

Démonstration : Pour $a_1, \dots, a_m \in F^\times$ on note $gr(a_1, \dots, a_m)$ le sous-groupe de F^\times engendré par a_1, \dots, a_m .

(a) On montre d'abord que les éléments a et b représentent des classes distinctes et non triviales modulo le radical de F . Si l'on avait $a \in R(F)$ alors on obtiendrait par (4.2, a) que $D_F(\langle a, b \rangle) = D_F(\langle 1, b \rangle) \subset D_F(\langle 1, 1, 1 \rangle)$, ce qui est impossible car $a + b$ n'est pas somme de 3 carrés dans F . On conclut que $a \notin R(F)$ et, par le même argument, que $b \notin R(F)$. Enfin, si l'on suppose que $ab \in R(F)$, alors on obtient $D_F(\langle 1, ab \rangle) = D_F(\langle 1, 1 \rangle) \ni a$ et par suite $a + b = a(1 + (a^{-1})^2 ab) \in D_F(\langle 1, 1 \rangle)$, ce qui est aussi une contradiction avec l'hypothèse que $a + b$ n'est pas somme de moins de 4 carrés dans F .

Il s'ensuit que $R(F)$ est d'indice 4 dans $gr(a, b)R(F)$. Étant donné que $|F^\times/F^{\times 2}| = 16$, on déduit de la chaîne d'inclusions

$$F^{\times 2} \subset R(F) \subset gr(a, b)R(F) \subset D_F(\langle 1, 1 \rangle) \subsetneq \sum F^{\times 2} \subsetneq F^\times$$

les égalités $R(F) = F^{\times 2}$ et $D_F(\langle 1, 1 \rangle) = gr(a, b)F^{\times 2}$, ainsi que le fait que $\sum F^{\times 2}$ soit d'indice 2 dans F^\times , ce qui est équivalent à ce que le seul ordre de F soit $\sum F^{\times 2}$.

(b) En plus, on obtient $\sum F^{\times 2} = gr(a, b, c)F^{\times 2}$ car $c \notin D_F(\langle 1, 1 \rangle)$. Il est clair que $D_F(\langle 1, a \rangle) \subset D_F(\langle 1, 1, 1 \rangle) \not\ni c$ et que $D_F(\langle 1, a \rangle) \not\subset D_F(\langle 1, 1 \rangle)$. Il vient $D_F(\langle 1, a \rangle) \cap D_F(\langle 1, 1 \rangle) = F^{\times 2} \cup aF^{\times 2}$, puis $D_F(\langle 1, a \rangle) = gr(a, bc)F^{\times 2}$. Par conséquent, la F -algèbre de quaternions $(-c, a)_F$, isomorphe à $(-b, ac)_F$ puisque $-c + a = -b$, est déployée. Par symétrie des hypothèses sur a et b , on a également que $(-c, b)_F$ est déployée. Cela montre que $a, b, c \in D_F(\langle 1, c \rangle)$, d'où $D_F(\langle 1, c \rangle) = \sum F^{\times 2}$.

(c) Il est clair que K est non réel. L'image de la norme $N_{K/F} : K^\times \rightarrow F^\times$ est $D_F(\langle 1, a \rangle) = gr(a, bc)F^{\times 2}$. Par (2.4) on en déduit que $|K^\times/K^{\times 2}| = \frac{1}{2} \cdot |F^\times/F^{\times 2}| \cdot |D_F(\langle 1, a \rangle)/F^{\times 2}| = 32$.

(d) L'élément $-c$ n'est pas un carré dans K . Comme $\sum F^{\times 2} = D_F(\langle 1, c \rangle)$ est un ordre de F et $-a \in -\sum F^{\times 2} \cap K^{\times 2}$, il vient $F^\times \subset D_K(\langle 1, c \rangle)$. D'un

autre côté, $N_{K/F}(K^\times) = D_F(\langle 1, a \rangle) \subset \sum F^{\times 2} = D_F(\langle 1, c \rangle)$. Ainsi le principe de la Norme assure que la forme $\langle 1, c \rangle$ est universelle sur K , i.e. que $-c \in R(K)$. Cela montre que $K^{\times 2} \cup -cK^{\times 2} \subset R(K)$.

Montrons l'inclusion réciproque. Considérons un élément $x \in R(K)$. Par le théorème (6.1) et par (a), on obtient $N_{K/F}(x) \in R(F) = F^{\times 2}$. En vertu de (2.4), on peut alors supposer que $x \in F^\times$. D'après le Principe de la Norme, la forme $\langle 1, -x \rangle$, qui est universelle sur K , représente sur F toutes les normes de K/F , et donc, en particulier, les éléments a et bc . Ainsi $x \in D_F(\langle 1, -a \rangle) \cap D_F(\langle 1, -bc \rangle)$. Comme $R(F) = F^{\times 2}$ et $|F^\times / F^{\times 2}| = 16$, chacune des formes $\langle 1, -a \rangle$ et $\langle 1, -bc \rangle$ représente sur F au plus 8 classes de carrés. De $-1, -a, -c \in D_F(\langle 1, -a \rangle)$ et de $-a, -c, -bc \in D_F(\langle 1, -bc \rangle)$ on déduit que $D_F(\langle 1, -a \rangle) = gr(-1, a, c)F^{\times 2}$ et $D_F(\langle 1, -bc \rangle) = gr(-a, b, -c)F^{\times 2}$. Il vient alors $x \in gr(-a, -c)F^{\times 2} \subset K^{\times 2} \cup -cK^{\times 2}$. \square

7 Un problème de réduction d'indice

Considérons ici une extension quadratique K/F dont la forme norme $N_{K/F}$ est surjective. On peut alors écrire $K = F(\sqrt{a})$ avec $a \in R(F) \setminus F^{\times 2}$ et on sait que l'homomorphisme canonique $\text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}(K)$ est injectif (3.1). On connaît également le noyau de l'homomorphisme canonique $W(F) \rightarrow W(K)$: il contient une seule classe non triviale représentée par la forme $\langle 1, -a \rangle$. En fait, il s'est avéré qu'aucune forme anisotrope sur F autre que $\langle 1, -a \rangle$ ne peut devenir isotrope sur K (4.5). On se demande alors si l'on ne peut pas constater un fait plus fort que l'injectivité de $\text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}(K)$, qui serait l'absence de réduction de l'indice pour toute F -algèbre simple centrale lors de l'extension des scalaires à K . On formule ce problème de la manière suivante :

7.1 Question. *Soit K/F une extension quadratique comme ci-dessus. Existe-t-il une F -algèbre centrale à division D telle que D_K ne soit pas à division ?*

Remarques : (1) Pour répondre à cette question, on peut se restreindre à considérer les F -algèbres centrales à division d'exposant une puissance de 2. En effet, le théorème de décomposition primaire pour les algèbres simples centrales (cf. [15, p. 261] ou [16, Theorem 7.2.13]) assure que $D \cong D_1 \otimes_F D_2$ pour deux F -algèbres simples centrales D_1 et D_2 telles que D_1 est de degré impair et D_2 est de degré une puissance de 2 ; ainsi $(D_1)_K$ est à division puisque $[K : F] = 2$ et par suite D_K est à division si et seulement si $(D_2)_K$ est à division [15, § 14.4, Proposition b (viii)].

(2) Pour une extension K/F quelconque, il peut arriver que $\text{Br}(K/F) = 0$ alors qu'il existe une F -algèbre centrale à division sur F qui ne reste pas à division après extension des scalaires à K . C'est le cas dans l'exemple ci-dessous. Pour autant, on ne connaît pas d'exemple d'une telle situation où l'extension soit finie [17, p. 22, Remark].

7.2 Exemple. Soit B une F -algèbre de biquaternions à division. Notons φ sa forme d'Albert, définie à similitude près, et K le corps de fonctions $F(\varphi)$. Alors l'homomorphisme $\text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}(K)$ est injectif et B_K n'est pas à division. Ces deux constatations se font, par exemple, à partir de la formule, due à A. Merkurjev, de réduction d'indice sur le corps de fonctions d'une quadrique [20].

7.3 Proposition. Soient A une F -algèbre simple centrale et $K = F(\sqrt{a})$ avec $a \in \text{R}(F)$. Alors $\exp_K(A_K) = \exp_F(A)$. De plus, si $\text{ind}_F(A) = \exp_F(A)$ alors $\text{ind}_K(A_K) = \text{ind}_F(A)$.

Démonstration : L'ordre de $[A]$ dans $\text{Br}(F)$ et de $[A_K]$ dans $\text{Br}(K)$ est le même parce que l'homomorphisme canonique $\text{Br}(F) \rightarrow \text{Br}(K)$ est injectif. Cela dit que $\exp_K(A_K) = \exp_F(A)$. Sous l'hypothèse supplémentaire $\text{ind}_F(A) = \exp_F(A)$, les inégalités $\exp_K(A_K) \leq \text{ind}_K(A_K) \leq \text{ind}_F(A)$ (variables pour toute extension K/F) sont alors des égalités. \square

7.4 Corollaire. Soient F une extension algébrique de \mathbb{Q} et $K = F(\sqrt{a})$ avec $a \in \text{R}(F)$. Si D est une F -algèbre centrale à division alors D_K est aussi à division.

Démonstration : L'égalité $\text{ind}_F(A) = \exp_F(A)$ vaut pour toute F -algèbre simple centrale A sur un corps de nombre F , par conséquent aussi, lorsque F est une extension algébrique de \mathbb{Q} . À l'aide de (7.3) on conclut aux égalités $\text{ind}_K(D_K) = \text{ind}_F(D) = \text{deg}_F(D) = \text{deg}_K(D_K)$ qui montrent que D_K est à division. \square

Remarque : La conclusion est valable dès que F est un corps tel que $\text{ind}_F(A) = \exp_F(A)$ pour toute F -algèbre simple centrale A . Cette condition est satisfaite par d'autres types intéressants de corps que les extensions algébriques de \mathbb{Q} .

7.5 Proposition. Soit $K = F(\sqrt{a})$ avec $a \in \text{R}(F)$. Soit D une F -algèbre centrale à division de degré 2^n , $n \geq 1$. Si toute extension L/F contenue dans D et de degré divisant 2^{n-1} est telle que $\text{R}(F) \subset \text{R}(L)$ alors D_K est à division.

Démonstration : Supposons que D_K n'est pas à division. On sait que l'extension quadratique K/F se plonge alors dans D [15, § 13.4, Corollary]. Ainsi il existe $\alpha \in D$ tel que $\alpha^2 = a$. En vertu du théorème de Skolem-Noether, l'automorphisme d'extension non trivial de $F(\alpha)/F$ s'étend à D en un automorphisme intérieur $\text{Int}(u)$ avec $u \in D^\times$. Cet élément u anticommute alors avec α . Tous les éléments de $F(u^2)$ commutent avec α ce qui n'est pas le cas de u . Il vient $F(u^2) \subsetneq F(u)$, donc $L := F(u^2)$ n'est pas un sous-corps maximal de D et alors $[L : F]$ divise 2^{n-1} . Les éléments α et u engendrent une L -algèbre de quaternions Q , contenue dans D et donc nécessairement à division. De plus, Q est déployée par l'extension quadratique $L(\sqrt{a})$. Ainsi $\text{Br}(L(\sqrt{a})/L)$ n'est pas trivial et par suite $a \notin \text{R}(L)$. Donc $\text{R}(F) \not\subset \text{R}(L)$, contrairement à l'hypothèse. \square

7.6 Corollaire. *Soient $K = F(\sqrt{a})$ avec $a \in \text{R}(F)$ et D une F -algèbre centrale à division telle que D_K n'est pas à division. Alors le degré de D est divisible par 8 et strictement supérieur à l'exposant de D .*

Démonstration : En vertu de la remarque qui suit la question (7.1), on peut supposer que D est de degré 2^n , avec $n \geq 1$. Comme $\text{ind}_K(D_K) < \text{ind}_F(D)$ par hypothèse, (7.3) montre que $\text{exp}_F(D) < \text{ind}_F(D)$. D'après (7.5), D contient une extension L de F telle que $[L : F]$ divise 2^{n-1} et $\text{R}(F) \not\subset \text{R}(L)$. D'après (6.1), L/F n'est pas une extension quadratique, d'où $n \geq 3$, ce qui achève la preuve. \square

Remarque : Sous les hypothèses du corollaire, si le degré de D est 8 alors son exposant est 4. En effet, le corollaire dit que $\text{exp}_F(D) \leq 4$ et nous allons voir que $\text{exp}_F(D) \neq 2$. Si $\text{exp}_F(D) = 2$ alors un théorème de Rowen et sa preuve [16, p. 279-280, Exercice 32] montrent qu'il existe $b, c \in F^\times$ tels que D est déployée par $F(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$; pour $L := F(\sqrt{b}, \sqrt{c})$ le corollaire (6.2) dit que $a \in \text{R}(L)$, ce qui est en contradiction avec le fait que D_L représente une classe non triviale dans $\text{Br}(L(\sqrt{a})/L)$.

8 Agrandissement et réduction du radical

Nous avons vu que le radical $\text{R}(F)$ se projette de façon naturelle sur un idéal de l'anneau de Witt $W(F)$ (4.4). Notons $KW(F)$ l'anneau quotient de $W(F)$ par cet idéal. Nous nous intéressons aux extensions K/F pour lesquelles les anneaux $KW(F)$ et $KW(K)$ sont canoniquement isomorphes. En quelque sorte, on pourrait dire que les corps F et K présentent alors au radical près la même structure pour les formes quadratiques.

