THÉORIE DES NOMBRES
BESANÇON

Années 1998/2001

Théorie d'Iwasawa des noyaux sauvages étales d'un corps de nombres

T. NGUYEN QUANG DO

Théorie d'Iwasawa des noyaux sauvages étales d'un corps de nombres

Thong NGUYEN QUANG DO

Abstract

For a prime number p and a number field F which contains "sufficiently" (but of course finitely) many roots of unity, the higher étale wild kernels of F are all canonically isomorphic.

§ 0 - Introduction :

Dans une note récente ([So] ; voir aussi [JS]), F. Soriano-Gafiuk a montré que pour un nombre premier p et un corps de nombres F contenant "suffisamment" de racines p-primaires de l'unité et vérifiant la conjecture de Gross, le p-Sylow du noyau sauvage H_2F de F est isomorphe au p-groupe des classes "logarithmiques" $\widetilde{Cl}(F)$ introduit par J.-F. Jaulent dans [J]. La démonstration de [So] utilise les méthodes logarithmiques de [J] et s'appuie essentiellement sur un isomorphisme canonique $H_2F/p \simeq \widetilde{Cl}(F)/p$ (en présence des racines $2p$-ièmes de l'unité). Or cet isomorphisme est une conséquence immédiate de la description cohomologique du K_2 ([T], 5-1) et du noyau sauvage ([Sc], 6.1) ce qui laisse à penser que les méthodes cohomologiques permettraient à peu de frais (mais, bien sûr, en perdant l'aspect algorithmique des méthodes logarithmiques) de retrouver, et même de renforcer et généraliser le résultat de [So]. C'est ce que l'on se propose de faire dans la présente note, en rappelant au passage le théorème d'isomorphisme de Schneider, qui ne nous semble pas assez connu.

Notations Dans toute la suite, $S = S(F)$ désignera l'ensemble des places de F divisant p et l'infini, et $G_S = G_S(F)$ sera le groupe de Galois sur F de l'extension algébrique S-ramifiée (i.e. non ramifiée en dehors de S) maximale de F. Pour $j = 1, 2$ et pour $i \in \mathbb{Z}$, on considèrera les groupes de cohomologie galoisienne $H^j(G_S, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ et les groupes de cohomologie p-adique $H^j(G_S, \mathbb{Z}_p(i))$, où $(\cdot)(i)$ est le $i^{\text{ème}}$ "tordu" à la Tate ([T], § 3).

Définition 0.1 *Avec des notations évidentes pour les groupes de cohomologie locaux, on pose* $III_S^{(i)}(F) := \ker\, (H^2(G_S(F), \mathbb{Z}_p(i)) \xrightarrow{\text{loc.}} \oplus_{v\in S} H^2(F_v,\ \mathbb{Z}_p(i)))$, *pour tout* $i \in \mathbb{Z}$.

La terminologie dans la littérature n'est pas très bien fixée pour ces noyaux de localisation (P. Schneider dans [Sc] se réfère seulement à "gewisse Galoiscohomologiegruppen"). Pour $i \geq 2$, $III_S^{(i)}(F)$ est usuellement appelé le $(2i-2)^{\text{ième}}$ *noyau sauvage étale* ([K], [N] etc ...). L'adjectif "étale" dissimule la référence au nombre premier p, mais l'adjectif "sauvage" est justifié par le fait que, pour $i = 2$, la conjecture de Quillen-Lichtenbaum (démontrée dans ce cas par Tate) entraîne que $III_S^2(F)$ est canoniquement isomorphe à la p-partie du noyau sauvage de F. Pour $i=1$, le corps de classes permet de montrer sans difficulté que $III_S^{(1)}(F)$ est isomorphe au p-groupe $Cl_S(F)$ des S-classes de diviseurs de F. Pour tout $i \neq 1$, on a l'interprétation suivante en termes de modules d'Iwasawa :

Définition 0.2 *Soit $X = \varprojlim Cl_S(F(\mu_{p^n}))$ où μ_{p^n} désigne le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité.*

Par le corps de classes, X est isomorphe au groupe de Galois sur $F(\mu_{p^\infty})$ de la pro-p-extension abélienne de $F(\mu_{p^\infty})$ qui est non-ramifiée, totalement décomposée aux places de $F(\mu_{p^\infty})$ au-dessus de p (donc en toutes les places), maximale pour ces propriétés. Alors :

§ 1 - Co-descente :

Les noyaux de localisation précédents peuvent être décrits comme modules de co-descente

Théorème 1.1 *([Sc], § 6, lemma 1) Supposons que F contienne μ_4 si $p=2$. Alors pour tout $i \in \mathbb{Z}, i \neq 1$, nous avons un isomorphisme canonique*

$$III_S^{(i)}(F) \simeq X(i-1)_\Gamma, \text{ où } (\cdot)_\Gamma \text{ désigne les co-invariants par } \Gamma = \mathrm{Gal}\,(F(\mu_{p^\infty})/F).$$

Idée de la preuve : Par la dualité de Poitou-Tate, $III_S^{(i)}(F)$ est le dual de ker $(H^1(G_S(F), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)) \xrightarrow{\text{loc}} \oplus_{v \in S} H^1(F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)))$. Les hypothèses ($F$ contient μ_4 si $p=2$, et $i \neq 1$) entraînent la trivialité cohomologique de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))$ pour l'action de Γ (lemme de Tate), d'où $H^1(G_S(\Gamma), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)) \simeq H^1(G_S(F(\mu_{p^\infty}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)))^\Gamma$ par inflation. On conclut par la théorie de Kummer. □

Remarque : À isomorphisme près, X_Γ n'est autre que le p-groupe $\widetilde{\mathrm{Cl}}(F)$ des classes logarithmiques, dont la définition dans [J] est en fait la traduction "logarithmique" d'une suite exacte de Sinnott ([FGS], Appendix) en théorie du corps de classes (suite qui "remplace" l'isomorphisme du théorème 1.1 pour $i=1$).

En tenant compte de la remarque suivant 0.1, on peut proposer la notation unifiée suivante : pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $H_{2i}F := X(i)_\Gamma$.

Examinons d'abord les propriétés fonctorielles des noyaux $H_{2i}(.)$ dans la tour $F(\mu_{p^\infty})/F$.

Corollaire 1.2 *Sous les hypothèses de 1.1, soit L/K une extension finie, de groupe de Galois G, contenant F et contenue dans $F(\mu_{p^\infty})$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$:*

a) *La co-descente naturelle (cohomologiquement, c'est la co-restriction) induit un isomorphisme $(H_{2i}\,L)_G \simeq H_{2i}\,K$.*

b) *L'extension naturelle (cohomologiquement, c'est la restriction) induit une surjection $H_{2i}\,K \twoheadrightarrow \nu_G(H_{2i}\,L)$, où ν_G est la norme algébrique de G.*

Preuve :

(Notons que sous nos hypothèses, l'extension $F(\mu_{p^\infty})/F$ est procyclique, donc G est forcément cyclique)

a) Avec des notations évidentes, $H_{2i}\,K = X(i)_{\Gamma_K}$, $H_{2i}\;L = X(i)_{\Gamma_L}$ et $G = \Gamma_K/\Gamma_L$. La co-descente naturelle étant induite par l'identité de X, l'assertion a) est évidente.

b) L'extension naturelle est induite par la norme algébrique, c'est-à-dire qu'elle prend place dans le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} X(i)_{\Gamma_L} \arrow[rr, "\nu_G"] \arrow[dr, "cores"'] & & X(i)_{\Gamma_L} \\ & X(i)_{\Gamma_K} \arrow[ur, "res"'] & \end{tikzcd}$$

Comme la co-descente est surjective, l'image de l'extension est bien l'image de ν_G. □

Remarque : En général, les propriétés de 1.2 ne restent pas valables en dehors de la tour $F(\mu_{p^\infty})/F$ (voir e.g. [KM]).

Quand i varie dans $\mathbb{Z}$, les noyaux $H_{2i}\,F$ ne sont pas a priori liés. Cependant :

Corollaire 1.3 *Pour tout entier m tel que F contient μ_{p^m} (resp. 4 si $p = 2$ et $m = 1$), pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, l'identité de X induit un isomorphisme de modules galoisiens $H_{2i}\,F/p^m \simeq \left(H_{2j}\,F/p^m\right)(i-j)$.*

Preuve : Soit γ un générateur topologique de Γ, et posons $\omega = \gamma - 1$. Par définition, $H_{2j}\,F = \left(X/\omega^{(j)}X\right)(j)$, où $\omega^{(j)}$ est caractérisé par la nouvelle action $\gamma^{(j)}(x) = \kappa(\gamma)^j\,\gamma(x)$, κ étant le caractère cyclotomique. Si F contient μ_{p^m}, alors $\kappa(\gamma) \equiv 1(\text{mod } p^m)$, et donc les idéaux $\left(\omega^{(i)}, p^m\right)$ et $\left(\omega^{(j)}, p^m\right)$ sont égaux dans l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$, d'où l'égalité des groupes - quotients $X/\left(\omega^{(i)}, p^m\right)X = X/\left(\omega^{(j)}, p^m\right)X$. □

Pour passer des quotients mod p^m aux modules eux-mêmes, on a besoin de certaines conjectures classiques de la cohomologie galoisienne et de la théorie d'Iwasawa, qui apparaissent sous diverses formes e.g. dans [Sc], [N], etc ...

Conjecture (C_i) *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $H_{2i}F$ est fini.*

Il est connu que le cas $i = -1$ (resp. 0) correspond à la conjecture de Leopoldt (resp. Gross). Pour $i \geq 1$, la conjecture (C_i) est vraie, à cause de la finitude du groupe $K_{2i}(\mathcal{O}_S)$ (voir [Sc], 6.6).

Pour tout $i \neq 0$, une formulation cohomologique de la conjecture (C_i) (voir e.g. [Sc]) est que $H^2(G_S(F),\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i+1)) = 0$.

On retrouve (et généralise) facilement le résultat principal de Keune, qui peut être considéré comme une version "finie" de 1-2 a) :

Corollaire 1.4 (cf. [Ke], thm 6.6)

Supposons que F vérifie (C_i) et soit r un entier assez grand pour que p^r annule $H_{2i}F$ et qu'aucune place au-dessus de p ne se décompose dans l'extension $F(\mu_{p^\infty})/F(\mu_{p^r})$. Posons $E = F(\mu_{p^r})$ et $G = \mathrm{Gal}\ (E/F)$. On a un isomorphisme de modules galoisiens $H_{2i}F \simeq ((Cl_S(E)/p^r)(i))_G$, où $Cl_S(E)$ désigne le groupe des S-classes d'idéaux de E.

Preuve : D'après 1.2, $H_{2i}F \simeq (H_{2iE})_G = (H_{2i}E)_G/p^r$. Par définition et d'après la dualité de Poitou-Tate, $(H_{2i}\,E)_G/p^r$ est le dual de ${}_{p^r}\ \mathrm{Ker}^1_S(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))^G$ où $\mathrm{Ker}^1_S(E,\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))$ désigne le noyau de la localisation $H^1(G_S(E),\ \mathbb{Q}_p(\mathbb{Z}_p(-i)) \to \oplus_{v\in S} H^1(E_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))$ et ${}_{p^r}(.)$ la p^r-torsion. À partir de la suite exacte $0 \to \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}(-i) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i) \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i) \to 0$ et avec l'hypothèse supplémentaire de non décomposition, il est immédiat de voir que ${}_{p^r}\ \mathrm{Ker}^1_S(E,\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-i))$ est le noyau de la localisation $H^1(G_S(E),\ \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}(-i)) \to \oplus_{v\in S}\, H^1(E_v,\ \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}(-i))$. Mais $H^1(G_S(E),\ \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}(-i)) = \mathrm{Hom}\,(G_S(E),\ \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})(-i)$, et par le corps de classes, le noyau précédent est le dual de $(Cl_S(E)/p^r)(i)$. En résumé, $H_{2i}F \simeq ((Cl_S(E)/p^r)(i))_G$, comme annoncé. □

On étudie aussi facilement le cas où F contient "suffisamment" de racines de l'unité ([So], [JS]).

Corollaire 1.5 (cf [So], ou [JS], théo. 7-i))

Supposons que $H_{2i}F$ est annulé par p^s et que F contient $\mu_{p^{s+1}}$. Alors pour tout $j \in \mathbb{Z}$, l'identité de X induit un isomorphisme de modules galoisiens $H_{2i}F \simeq (H_{2j}F)(i-j)$.

Preuve : C'est évident, d'après 1.3. □

Corollaire 1.6 (cf. [JS], théor. 7-ii))

Si $H_{2i}F$ est annulé par p^s mais F contient seulement μ_{p^s}, suppsons en outre que l'extension $H_{2i}F \to H_{2i}F(\mu_{p^{s+1}})$ est injective. Alors, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, l'identité de X induit un isomorphisme de modules galoisiens $H_{2i}F \simeq (H_{2j}F)(i-j)$.

Preuve : Posons $E = F(\mu_{p^{s+1}})$ et $G =$ Gal (E/F).

Si l'extension $H_{2i}F \to (H_{2i}\,E)^G$ est injective, elle est également surjective, car $(H_{2i}\,E)^G$ et $(H_{2i}\,E)_G \simeq H_{2i}\,F$ ont même ordre (le groupe G étant cyclique). Alors, d'après 1-2 b), on a $H_{2i}\,F \xrightarrow{\sim} \nu_G(H_{2i}\,E)$.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, notons $\overline{\nu}^{(j)}$ l'endomorphisme de $H_{2j}\,E/p^{s+1}$ obtenu à partir de ν_G par passage au quotient modulo p^{s+1}. Commes les $\overline{\nu}^{(j)}$ sont congrus entre eux modulo p^{s+1}, on a, avec des notations évidentes, un diagramme commutatif

$$
\begin{array}{ccc}
H_{2j}\,E/p^{s+1} & \xrightarrow{\overline{\nu}^{(j)}} & Im\,\overline{\nu}^{(j)} \\
\wr\| & & \| \\
H_{2i}\,E/p^{s+1}(j-i) & \xrightarrow{\overline{\nu}^{(j)}} & Im\,\overline{\nu}^{(j)} \\
\overline{cores}\searrow & & \sim\nearrow\overline{res} \\
& (H_{2i}F)(j-i) &
\end{array}
$$

qui montre que $\overline{\nu}^{(j)}$ admet une section, égale à l'application $\overline{\text{res}}^{-1}$ suivie du "twist" $(j-i)$ de la composée $H_{2i}\,F \xrightarrow{\text{res}} H_{2i}\,E \xrightarrow{\text{nat}} H_{2i}\,E/p^{s+1}$. Donc $H_{2j}\,E/p^{s+1} \simeq H_{2i}\,F(j-i) \oplus \operatorname{Ker}\overline{\nu}^{(j)}$. Mais le diagramme montre aussi que $\operatorname{Ker}\overline{\nu}^{(j)}$ est isomorphe à l'image par $\overline{\text{cores}}$ de $p^s\,H_{2j}\,E/p^{s+1}\,H_{2j}\,E$, donc est annulé par p (cette dernière propriété est bien connue, voir e.g. [KM], [T], ...). Par suite, $H_{2j}\,E$ est annulé par p^s. □

Remarque : L'hypothèse d'injectivité de 1.6 est "expliquée" en 2.9 ci-dessous.

§ 2 - Descente :

On a vu que, par construction même,les noyaux $H_{2i}(.)$ se comportent bien vis-à-vis de la co-descente galoisienne (i.e. en prenant les co-invariants) dans la tour $F(\mu_{p^\infty})/F$. On ne peut naturellement pas en attendre autant par descente galoisienne (i.e. en prenant les invariants), à cause de phénomènes de capitulation. Il convient alors de modifier légèrement les noyaux $H_{2i}(.)$.

Lemme 2.1 - définition

On garde les notations du § 1. Soit X^0 le sous-module fini maximal de X. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ t.q. F vérifie la conjecture (C_i), $(X^0(i))_\Gamma$ s'injecte dans $X(i)_\Gamma$, et l'on notera $\widetilde{H}_{2i}\,F = \widetilde{X}(i)_\Gamma$ le conoyau.

Preuve : En posant $\widetilde{X} = X/X^0$, la suite exacte $0 \to X^0(i) \to X(i) \to \widetilde{X}(i) \to 0$ donne par co-descente une suite exacte $\ldots \to \widetilde{X}(i)^\Gamma \to X^0(i)_\Gamma \to X(i)_\Gamma \to \widetilde{X}(i)_\Gamma \to 0$. Or le Λ-module de torsion $\widetilde{X}(i)$ a même série caractéristique que $X(i)$ et n'a pas de sous-module fini non nul. La conjecture (C_i) signifie que $\widetilde{X}(i)^\Gamma$ est fini, donc nul. □

Définition 2.2

Rappelons que pour un Λ-module de torsion Y, le *co-adjoint* $\beta(Y)$ est défini comme étant le conoyau de la localisation : $Y \to \bigoplus_{\mathfrak{P}} Y_{\mathfrak{P}}$, où $\mathfrak{P}$ parcourt tous les idéaux premiers de hauteur 1 de Λ. C'est le dual de l'adjoint $\alpha(Y)$ au sens d'Iwasawa ([Iw], 1.3). On sait que pour toute *suite admissible* d'éléments $\pi_n \in \Lambda$ (i.e. les π_n sont disjoints du diviseur de Y

et convergent vers 0, et π_n divise π_{n+1} pour tout n), $\beta(Y) \simeq \varinjlim Y/\pi_n Y$. En particulier, si $\mu(Y)=0$, la suite des p^n est admissible, et $\beta(Y)$ n'est autre que $Y \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

Notons $E_0 = F$, $E_n = F\left(\mu_{p^n}\right)$ et $E_\infty = F(\mu_{p^\infty})$. Nous dirons que E_∞ *vérifie la conjecture* (C_i) si tous les E_n $(n \geq 0)$ vérifient (C_i) (il s'agit en fait d'une propriété "finie", qu'il suffit de vérifier pour tout $n \leq \lambda(X)$). Notre but principal va être de montrer le résultat suivant, qui fait pendant au théo. 1.1 de Schneider :

Théorème 2.3

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ tel que E_∞ vérifie la conjecture (C_i), on a un isomorphisme canonique $\widetilde{H}_{2i}\,F \simeq \beta(X)\,(i)^\Gamma$, où $\Gamma =$ Gal (E_∞/F).

La démonstration va se faire par une succession de lemmes. Notons $H_{2i}\,E_\infty = \varinjlim H_{2i}\,E_n$, $\widetilde{H}_{2i}\,E_\infty = \varinjlim \widetilde{H}_{2i}\,E_n$ (les morphismes de liaison étant les extensions naturelles) et $\mathrm{Cap}^{(i)}\,(E_\infty/E_n) =$ Ker $\left(H_{2i}\,E_n \to H_{2i}\,E_\infty\right)$.

Lemme 2.4

Dans les hypothèses de 2.3, on a :

a) des isomorphismes $H_{2i}\,E_\infty = \widetilde{H}_{2i}\,E_\infty \simeq \beta(X(i))$

b) un isomorphisme $\widetilde{H}_{2i}\,F \simeq \left(\widetilde{H}_{2i}\,E_\infty\right)^\Gamma$

c) un diagramme commutatif (comparer à [KM], 3.6)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathrm{Cap}^{(i)}\,(E_\infty) & \to & H_{2i}\,F & \xrightarrow{\text{ext}} & \left(H_{2i}\,E_\infty\right)^\Gamma & \to & 0 \\
 & & \uparrow \wr & & \| & & \uparrow \wr & & \\
0 & \to & \left(X^0(i)\right)_\Gamma & \to & H_{2i}\,F & \to & \widetilde{H}_{2i}\,F & \to & 0,
\end{array}$$

les flèches verticales étant induites par l'homomorphisme d'extension.

Preuve :

Dans a), l'isomorphisme $H_{2i}\,E_\infty \simeq \beta(X(i))$ résulte immédiatement de la conjecture (C_i) pour E_∞ et de la description du co-adjoint. Pour l'égalité $H_{2i}\,E_\infty = \widetilde{H}_{2i}\,E_\infty$, il suffit de remarquer que l'extension naturelle $X(i)_{\Gamma_n} \to X(i)_{\Gamma_m}$ (pour $m \geq n$) n'est autre que la multiplication par $\dfrac{\gamma^{p^m}-1}{\gamma^{p^n}-1}$, donc annule le sous-module fini borné $X^0(i)_{\Gamma_n}$ pour $m \gg n \gg 0$.

Pour montrer b), notons d'abord que l'extension $\widetilde{X}(i)_{\Gamma_n} \to \widetilde{X}(i)_{\Gamma_m}$ est injective : c'est un calcul immédiat, en utilisant la nullité de $\widetilde{X}(i)^{\Gamma_m}$ (qui résulte de la conjecture (C_i) et de la nullité de $\widetilde{X}^0$). Soit $G_{m,n} = \Gamma_m/\Gamma_n$. Comme c'est un groupe cyclique, les invariants et les co-invariants par $G_{m,n}$ de $\widetilde{X}(i)_{\Gamma_m}$ ont même ordre, d'où l'isomorphisme $\widetilde{X}(i)_{\Gamma_n} \xrightarrow{\sim}$

$\widetilde{X}(i)_{\Gamma_m}^{G_{m,n}}$, ce qui montre que $\widetilde{H}_{2i}\,F \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}_{2i}\,(E_\infty)^\Gamma$ par passage à la limite. L'assertion c) est alors évidente. □

L'étape suivante est purement algébrique : elle consiste à montrer que les foncteurs "co-adjoint" et "twist" commutent. Plus précisément :

Lemme 2.5

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\beta(X(i)) \simeq \beta(X)(i)$.

Preuve :

Soit (π_n) une suite admissible pour X. Alors $\beta(X)(i) \simeq \varinjlim\, (X/\pi_n X)(i)$. Mais $(X/\pi_n X)(i) = X(i)/\pi_n^{(-i)} X(i)$, avec des notations qui s'expliquent d'elles-mêmes (comme dans la preuve de 1.3). Evidemment, $(\pi_n^{(-i)})$ est une suite admissible pour $X^{(i)}$, d'où le résultat cherché. □

Le théorème 2.3 résulte immédiatement des lemmes 2.4 et 2.5.

Cas particuliers :

i) Si le sous-module fini maximal de X (c'est un noyau de capitulation) est nul, on peut remplacer $\widetilde{H}_{2i}\,F$ par $H_{2i}\,F$ dans tous les résultats précédents.

ii) S'il n'y a qu'une seule place au-dessus de p dans E_0 et qu'elle est totalement ramifiée dans E_∞, on sait que X_{Γ_n} est isomorphe au p-groupe des S-classes de E_n, donc $\beta(X)$ est isomorphe au p-groupe des S-classes de E_∞.

On peut déduire du théorème 2.3 des conséquences parallèles à celles qu'on a tirées du théorème 1.1.

Corollaire 2.6

Dans les hypothèses de 2.3, soit L/K une extension finie, de groupe de Galois G, contenant F et contenue dans E_∞. Alors $\widetilde{H}_{2i}\,L$ est cohomologiquement trivial pour G, et $H_{2i}\,L$ et $\mathrm{Cap}^{(i)}(E_\infty/L)$ ont même cohomologie.

Preuve :

Par définition, la co-descente induit un isomorphisme $(\widetilde{H}_{2i}\,L)_G \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}_{2i}\,K$. D'après 2.4, l'extension induit un isomorphisme $\widetilde{H}_{2i}\,K \xrightarrow{\sim} (\widetilde{H}_{2i}\,L)^G$, d'où l'on déduit, en reprenant le raisonnement de 1.2, que $\nu_G(\widetilde{H}_{2i}\,L) = (\widetilde{H}_{2i}\,L)^G$. Comme G est cyclique, la trivialité cohomologique de $\widetilde{H}_{2i}\,L$ en découle immédiatement. La dernière assertion est alors évidente. □

Corollaire 2.7

Pour tout entier m tel que F contient μ_{p^m} (resp. 4 si $p = 2$ et $m = 1$), pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$ tels que E_∞ vérifie (C_i) et (C_j), on a un isomorphisme de modules galoisiens ${}_{p^m}\widetilde{H}_{2i}\,F \simeq \left({}_{p^m}\widetilde{H}_{2j}\,F\right)(i-j)$.

Preuve : c'est évident, en utilisant 2.3. $\square$

Corollaire 2.8

Supposons que E_∞ vérifie (C_i) et soit p^s l'exposant de $\widetilde{H}_{2i}\, F$. Posons $E = F(\mu_{p^s})$ et $G =$ Gal (E/F). On a un isomorphisme de modules galoisiens $\widetilde{H}_{2i}\, F \simeq \left({}_{p^s}\widetilde{Cl}(E)\,(i)\right)^G$, où $\widetilde{Cl}(.)$ désigne le groupe des classes logarithmiques (voir la remarque suivant 1.1).

Preuve : D'après 2.3, ${}_{p^s}\widetilde{H}_{2i}\, F \simeq \left({}_{p^s}\widetilde{H}_{2i}\, E\right)^G$ et d'après 2.7, ${}_{p^s}\widetilde{H}_{2i}\, E \simeq {}_{p^s}\widetilde{H}_0\, E(i) = {}_{p^s}\widetilde{Cl}(E)\,(i)$. $\square$

Corollaire 2.9

Supposons que E_∞ vérifie (C_i) et que F contient μ_{p^s}, où p^s est l'exposant de $\widetilde{H}_{2i}\, F$. Si E_∞ vérifie également (C_j), on a un isomorphisme de modules galoisiens $\widetilde{H}_{2i}\, F \simeq (\widetilde{H}_{2j}\, F)(i-j)$.

Preuve : C'est la même démonstration que dans 2.8, en remplaçant $\widetilde{H}_0$ par $\widetilde{H}_{2j}$. $\square$

Bibliographie

[FGS] L.J. Federer and B.H. Gross. Regulators and Iwasawa modules. *Invent. Math.*, 62 (3) : 443-457, 1981. With an appendix by Warrren Sinnot.

[Iw] K. Iwasawa. On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields. *Annals of Math.*, 98, 246-326, 1973.

[J] J.-F. Jaulent. Sur le noyau sauvage des corps de nombres. *Acta Arithm.*, 67, 335-348, 1994.

[JS] J.-F. Jaulent et F. Soriano. Sur le noyau sauvage des corps de nombres et le groupe des classes logarithmiques. *Math. Zeit.*, 238 (2), 335-354, 2001.

[Ke] F. Keune. On the structure of the K_2 of the ring of integers in a number field. *K-Theory*, 2, 625-645, 1989.

[KM] M. Kolster and A. Movahhedi. Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation. *Ann. Inst. Fourier*, 50 (1), 35-65, 2000.

[Ko] M. Kolster. Remarks on étale K-theory and Leopoldt's conjecture. In *Séminaire de Théorie des Nombres*, Paris, 1991-92, 37-62, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

[N] T. Nguyen Quang Do. Analogues supérieurs du noyau sauvage. *Séminaire de Théorie des Nombres Bordeaux (2)*, 4 (2) : 263-271, 1992.

[Sc] P. Schneider. Über gewisse Galoiscohomologiegruppen. *Math. Zeit.*, 168 (2) : 181-205, 1979.

[So] F. Soriano-Gafiuk. Sur le noyau hilbertien d'un corps de nombres. *C.R. Acad. Sci. Paris sér. I Math.*, 330 (10) : 863-866, 2000.

[T] J. Tate. Relations between K_2 and Galois cohomology. *Invent. Math.*, 36 : 257-274, 1976.

Laboratoire de Mathématiques
UMR 6623
Université de Franche-Comté
25030 Besançon Cedex