# CALCUL EXPLICITE DE CERTAINES CELLULES DE KAZHDAN-LUSZTIG POUR LE TYPE $A_{n-1}$

*par*

Nicolas Jacon

***Résumé.*** — The aim of this paper is to give an explicit characterization of the Kazhdan-Lusztig cells which contains the elements with maximal length in parabolic subgroups of $\mathfrak{S}_n$.

## Table des matières



## Introduction

Soit $W$ un groupe de Coxeter. Dans [**KL**], Kazhdan et Lusztig ont donné un moyen de partitionner $W$ en "cellules à gauche". Ces cellules jouent un rôle fondamental par exemple dans la théorie des représentations des algèbres de Hecke et des groupes de Lie (voir par exemple [**Lu2**]). Dans le cas du groupe symétrique, groupe qui nous intéresse ici (c'est à dire lorsque $W = A_{n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$), la correspondance de Robinson-Schensted fournit un algorithme relativement simple pour la détermination de ces cellules. Cependant, il pourrait être intéressant de déterminer explicitement l'ensemble des éléments appartenant à une cellule donnée.

Le but de cette note est de résoudre ce problème pour une certaine classe de cellules : les cellules contenant un élément de longueur maximal dans un sous-groupe parabolique de la forme $\mathfrak{S}_\lambda$ où $\lambda$ est une partition de $n$. Dans la première partie, nous rappelons la définition de ces cellules (pour le type $A_{n-1}$) et de la correspondance de Robinson-Schensted. Puis, nous déterminons explicitement la forme des cellules ci-dessus, la preuve du théorème principal (Théorème 2.3) étant élémentaire et purement combinatoire.

## 1. Cellules de Kazhdan-Lusztig pour le groupe symétrique, correspondance de Robinson-Schensted

Nous introduisons dans cette partie la relation d'équivalence $\sim_L$ permettant de définir les cellules de Kazhdan-Lusztig dans le cadre du groupe symétrique. Dans le cadre général des groupes de Coxeter, cette relation fait appel à la théorie de Kazhdan-Lusztig et en particulier à la base de Kazhdan-Lusztig associée à l'algèbre de Hecke du groupe de Coxeter (voir [**KL**]). Cependant, dans le cadre qui nous intéresse ici, Kazhdan et Lusztig ont montré que cette relation se définit

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 20F55.

complètement élémentairement à l'aide de la correspondance de Robinson-Schensted (voir par exemple [**Ar**]).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique en $n$ éléments. Pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, nous désignons par $s_i$ la transposition $(i\ i+1)$. Alors $\mathfrak{S}_n$ a une présentation par :

– générateurs : $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$ ;
– relations :

$$\begin{array}{ll} s_i^2 = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, n-1 \\ s_i s_{i+1} s_i = s_i s_{i+1} s_i & \text{pour } i = 1, \ldots, n-2 \\ s_j s_i = s_i s_j & \text{pour } |i-j| > 1. \end{array}$$

Nous allons maintenant introduire la relation d'équivalence $\sim_L$. Soit $l : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}$ la fonction longueur usuelle définie sur $\mathfrak{S}_n$. Soit $w \in \mathfrak{S}_n$, alors l'ensemble de descente (à gauche) de $w$ est l'ensemble suivant :

$$L(w) = \{s \in S \mid l(sw) < l(w)\}.$$

Soit maintenant $x$ et $y$ deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ et soit $s \in S$, on écrit $x \sim_{L,s} w$ si et seulement si :

– $x = sw$, $l(sw) = l(w) + 1$ et $L(w) \not\subset L(x)$,
– ou $w = sx$, $l(sx) = l(x) + 1$ et $L(x) \not\subset L(w)$.

La relation d'équivalence $\sim_L$ est alors la clôture transitive de la relation $\sim_{L,s}$ c'est à dire que l'on a $x \sim_L y$ si et seulement si il existe des éléments $x_0 = x,\ x_1,\ \ldots,\ x_{r-1},\ x_r = y$ de $\mathfrak{S}_n$ et $s_{j_0},\ s_{j_1},\ \ldots,\ s_{j_{r-1}}$ des éléments de $S$ tels que $x_i \sim_{L,s_{j_i}} x_{i+1}$ pour $i = 0, \ldots, r-1$. Les classes d'équivalence de $\sim_L$ sont appelées les cellules (à gauche) de Kazhdan-Lusztig. Elles permettent entre autres de construire les représentations irréductibles de l'algèbre de Hecke de type $A_{n-1}$.

Un critère agréable permet de vérifier si deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ sont dans la même cellule : c'est la correspondance de Robinson-Schensted (voir [**Fu**] pour un exposé détaillé de cette correspondance et de ses applications). Pour donner cette correspondance, introduisons quelques notations. Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ une partition de rang $n$ (tel que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r$). Le diagramme de Young de $\lambda$ est l'ensemble

$$D(\lambda) = \{(i,j) \in \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0} \mid 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Les éléments du diagramme de $\lambda$ sont appelés les boîtes de $\lambda$.

On associe maintenant à chaque élément $w \in \mathfrak{S}_n$ une paire de tableaux de Young standard $(P(w), Q(w))$ de même forme $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, une partition de $n$ (c'est à dire que les tableaux $P(w)$ et $Q(w)$ de forme $\lambda$ sont remplies par les entiers $\{1, \ldots, n\}$ de telle sorte que les coefficients sont disposés en ordre croissant dans chaque ligne de gauche à droite et dans chaque colonne de haut en bas).

***Exemple 1.1***. — Ci-dessous un tableau standard de forme $\lambda = (4, 2, 2, 1, 1)$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 & 10 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2} 5 & 6 \\ \cline{1-2} 8 \\ \cline{1-1} 9 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Au départ, $P(w)$ et $Q(w)$ sont vides. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on insère récursivement sur les lignes de $P(w)$ l'entier $w(i)$ de façon à obtenir un tableau standard. Si tous les entiers situés sur la première ligne de $P(w)$ sont inférieurs à $w(i)$, on insère $w(i)$ sur la première ligne. Sinon, on remplace le plus petit entier $j$ supérieur à $w(i)$ par $w(i)$ et on insère $j$ sur la ligne suivante. Le processus débute sur la première ligne et s'arrête lorsque l'entier inséré ne prend la place d'aucun autre. Parallèlement, on note dans $Q(w)$ l'ordre d'apparition des boîtes. On obtient une application qui est en fait une bijection :

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{S}_n & \to & \bigcup_{\lambda\in\Pi_n} T_\lambda \times T_\lambda \\ w & \mapsto & (P(w), Q(w))\end{array}$$

où $T_\lambda$ désigne l'ensemble des tableaux standard de forme $\lambda$ et $\Pi_n$ l'ensemble des partitions de $n$.

***Exemple 1.2***. — Ci-dessous la correspondance de Robinson-Schensted pour $\mathfrak{S}_3$.

$$(P(1),Q(1))=\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\right)\quad (P(s_2s_1),Q(s_2s_1))=\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)$$

$$(P(s_1),Q(s_1))=\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)\quad (P(s_1s_2),Q(s_1s_2))=\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)$$

$$(P(s_2),Q(s_2))=\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)\quad (P(s_1s_2s_1),Q(s_1s_2s_1))=\left(\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}\right)$$

Finalement, deux éléments $w_1$ et $w_2$ sont dans la même cellule à gauche si et seulement si $Q(w_1) = Q(w_2)$. Ceci fournit donc un algorithme très efficace pour tester si deux éléments sont dans la même cellule.

## 2. Calcul explicite

Nous gardons les notations adoptées dans les sections précédentes auxquelles nous ajoutons les suivantes. Pour $i \leq j < n$, nous notons

$$r_{(i)}^{(j)} := s_j s_{j-1} \dots s_i$$

et

$$w_{(i)}^{(j)} := s_i s_{i+1} s_i \dots s_j s_{j-1} \dots s_i = r_{(i)}^{(i)} r_{(i)}^{(i+1)} \dots r_{(i)}^{(j)}.$$

Considérons une partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ de $n$ (où on suppose que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$). Soit $\mathfrak{S}_\lambda$ le sous groupe parabolique de $\mathfrak{S}_n$ correspondant. Il est engendré par la partie $\{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}\}$ de $S$ où l'ensemble $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ est obtenu en enlevant les entiers $\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \dots, \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j$ de $\{1, 2, \dots, n\}$. Soit maintenant $w_\lambda$ l'élément de longueur maximale dans $\mathfrak{S}_\lambda$. Il est bien connu que :

$$w_\lambda = w_{(1)}^{(\lambda_1-1)} w_{(\lambda_1+1)}^{(\lambda_1+\lambda_2-1)} \dots w_{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i+1)}^{(\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i-1)} \dots w_{(\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i+1)}^{(n-1)}.$$

Notons $\Gamma_\lambda$ la cellule (à gauche) contenant l'élément $w_\lambda$. Le but de cette note est de déterminer explicitement cet ensemble $\Gamma_\lambda$. Par [**Lu**, 5.26.1] (résultat de Barbasch et Vogan, généralisé par Geck dans [**Ge**]), il existe une partie $X_\lambda$ de $\mathfrak{S}_n$ vérifiant :

$$\Gamma_\lambda = \{x w_\lambda \mid x \in X_\lambda\},$$

et tel que pour tout $x \in X_\lambda$, on a $l(x w_\lambda) = l(x) + l(w_\lambda)$.

***Lemme 2.1***. — *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ une partition de $n$. Soit $j \in [1, p-1]$ tel que $\lambda_j \neq \lambda_{j+1}$. Alors :*

$$r_{(\sum_{i=1}^{j} \lambda_i)}^{(n-1)} \in X_\lambda.$$

*Preuve.* — On construit pour $w_\lambda$ et $r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} w_\lambda$ les tableaux de Young $Q(w_\lambda)$ et $Q(r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} w_\lambda)$ donnés par la correspondance de Robinson-Schensted. On obtient dans les deux cas le même tableau. Ceci prouve que ces deux éléments sont dans la même cellule à gauche. □

Nous avons maintenant le résultat suivant :

***Lemme 2.2.*** — *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ une partition de $n$, on suppose que $\lambda_j \neq \lambda_{j+1}$ pour $j \in [1, p-1]$, alors :*

$$r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} w_\lambda = w_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\dots,\lambda_p)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)}.$$

*Preuve.* — On a :

$$w_\lambda = w^{(\lambda_1-1)}_{(1)} w^{(\lambda_1+\lambda_2-1)}_{(\lambda_1+1)} \dots w^{(\sum_{i=1}^{j+1}\lambda_i-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i+1)} \dots w^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i+1)}.$$

On obtient donc :

$$r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} w_\lambda = w^{(\lambda_1-1)}_{(1)} \dots w^{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-2}\lambda_i+1)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} w^{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)} \dots w^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i+1)}.$$

En utilisant les relations de $\mathfrak{S}_n$, on obtient :

$$r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} w^{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)} = w^{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i-2)}_{(\sum_{i=1}^{j-2}\lambda_i+1)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)}.$$

De plus, on a :

$$r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)} w^{(\sum_{i=1}^{j+1}\lambda_i-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i+1)} \dots w^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i+1)} = w^{(\sum_{i=1}^{j+1}\lambda_i-2)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)} w^{(\sum_{i=1}^{j+2}\lambda_i-1)}_{(\sum_{i=1}^{j+1}\lambda_i+1)} \dots w^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i+1)}.$$

On en déduit, par récurrence :

$$r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} w_\lambda = w_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\dots,\lambda_p)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)},$$

ce qui conclut la preuve. □

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal :

***Théoreme 2.3.*** — *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ une partition de $n$. En utilisant les notations introduites ci-dessus, on a :*

$$X_\lambda = \bigcup_{j=1}^{p} X_{(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_j-1,\dots,\lambda_p)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)},$$

*en prenant comme convention : $r^{(j)}_{(i)} = 1$ si $j < i$ et $X_{(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_p)} = \{0\}$ si $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ n'est pas une partition.*

*Preuve.* — On commence par montrer que si $(\lambda_1, \dots, \lambda_j - 1, \dots, \lambda_p)$ est une partition de $n-1$, on a :

$$X_{(\lambda_1,\dots,\lambda_j-1,\dots,\lambda_p)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} \subset X_{(\lambda_1,\dots,\lambda_j,\dots,\lambda_p)}.$$

Soit donc $x \in X_{(\lambda_1,\dots,\lambda_j-1,\dots,\lambda_p)}$, d'après le lemme 2.2, on a :

$$r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} w_\lambda = w_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\dots,\lambda_p)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)}.$$

Il suit donc :

$$xr^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} w_\lambda = xw_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_p)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)}.$$

Par définition, il existe une suite $(s_{i_l})_{l=1,\ldots,m}$ d'éléments de $\{s_1,\ldots,s_{n-2}\}$ (le système de générateurs de $\mathfrak{S}_{n-1}$) telle que :

$$w_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_p)} \sim_{L,s_{i_1}} \cdots \sim_{L,s_{i_m}} xw_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_p)}$$

On peut composer par $r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)}$ à droite car les éléments $s_{i_l}$ intervenant dans les équivalences sont dans $\mathfrak{S}_{n-1}$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} w_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_p)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)} &\sim_{L,s_{i1}} \cdots \\ \cdots &\sim_{L,s_{i_m}} xw_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_p)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i+1)} \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.2, il suit :

$$r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} w_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)} \sim_{L,s_{i_1}} \cdots \sim_{L,s_{i_m}} xr^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} w_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)}.$$

Or, d'après le lemme 2.1, on a :

$$r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} \in X_\lambda,$$

il suit donc :

$$w_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)} \sim_L r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} w_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)},$$

d'où :

$$w_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)} \sim_L xr^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} w_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)}.$$

On a donc montré :

$$\bigcup_{j=1}^{p} X_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_j-1,\ldots,\lambda_p)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} \subset X_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)}.$$

Notons également que les éléments de $\bigcup_{j=1}^{p} X_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_j-1,\ldots,\lambda_p)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)}$ sont tous distincts. On conclut la preuve par cardinalité : le cardinal des cellules $\Gamma_\lambda$ correspond aux dimensions des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$. On a :

$$|\Gamma_\lambda| = |X_\lambda|.$$

D'après [**Fu**, 4.3.8], on a :

$$|X_\lambda| = \sum_{j=1}^{p} |X_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_j-1,\ldots,\lambda_p)}|,$$

avec $|X_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_j-1,\ldots,\lambda_p)}| = 0$ si $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_j-1,\ldots,\lambda_p)$ n'est pas une partition. Il suit donc :

$$\bigcup_{j=1}^{p} X_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_j-1,\ldots,\lambda_p)} r^{(n-1)}_{(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i)} = X_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)}$$

ce qu'il fallait montrer. □

Le corollaire suivant va maintenant nous donner la forme explicite des éléments composant la cellule $\Gamma_\lambda$. Notons que la donnée de ce type de cellules suffit pour construire toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$. Introduisons quelques notations supplémentaires. Soit $\lambda$ une partition de $n$ avec $n_1(\lambda)$ parts égales à 1, $n_2(\lambda)$ parts égale à 2,…,$n_r(\lambda)$ égales à $r$. On notera alors $\lambda = (1^{n_1(\lambda)},\ldots,(i-1)^{n_{i-1}(\lambda)}, i^{n_i(\lambda)},\ldots,r^{n_r(\lambda)})$. De plus, si $n_k(\lambda) \neq 0$, on notera $\lambda^{(i)}$ la partition

$(1^{n_1(\lambda)}, \ldots, (i-1)^{n_{i-1}(\lambda)+1}, i^{n_i(\lambda)-1}, \ldots, r^{n_r(\lambda)})$ de $n-1$. Le résultat suivant est une conséquence direct du Théorème 2.3.

***Corollaire 2.4.*** — *Soit $\lambda = (1^{n_1(\lambda)}, \ldots, (i-1)^{n_{i-1}(\lambda)}, i^{n_i(\lambda)}, \ldots, r^{n_r(\lambda)})$ une partition de $n$. Soit $X_\lambda$ comme dans le Théorème 2.3. Alors, $x \in X_\lambda$ si et seulement si, il existe une suite d'entiers $i_j \in [1, r]$ avec $j = 2, \ldots, n$ vérifiant $n_{i_j}(\lambda^{(i_{j+1},\ldots,i_n)}) \neq 0$ et :*

$$x = r^{(1)}_{(\sum_{k=i_2}^{r} kn_k(\lambda^{(i_3,i_4,\ldots,i_n)}))} r^{(2)}_{(\sum_{k=i_3}^{r} kn_k(\lambda^{(i_4,i_5,\ldots,i_n)}))} \cdots$$
$$\cdots r^{(n-2)}_{(\sum_{k=i_{n-1}}^{r} kn_k(\lambda^{(i_n)}))} r^{(n-1)}_{(\sum_{k=i_n}^{r} kn_k(\lambda))}.$$

*$y \in \Gamma_\lambda$ si et seulement si il existe une suite d'entiers $i_j \in [1, r]$ avec $j = 2, \ldots, n$ vérifiant :*

$$y = r^{(1)}_{(\sum_{k=i_2}^{r} kn_k(\lambda^{(i_3,i_4,\ldots,i_n)})-i_2+1)} r^{(2)}_{(\sum_{k=i_3}^{r} kn_k(\lambda^{(i_4,i_5,\ldots,i_n)})-i_3+1)} \cdots$$
$$\cdots r^{(n-2)}_{(\sum_{k=i_{n-1}}^{r} kn_k(\lambda^{(i_n)})-i_{n-1}+1)} r^{(n-1)}_{(\sum_{k=i_n}^{r} kn_k(\lambda)-i_1+1)}.$$

## Références

[Ar] S. Ariki, *Robinson-Schensted correspondence and left cells*, Comb. meth. in rep. theory (Kyoto, 1998), Adv. Studies in Pure Math., **28**, 2000.

[Fu] W. Fulton, *Young tableaux*, London Math. Soc. Student Texts, **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Ge] M. Geck, *On the induction of Kazhdan-Lusztig cells*, Bull. London. Math. Soc., 608–614, **35**, 2003.

[KL] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53**, 1979.

[Lu] G. Lusztig, *Left cells in Weyl groups. Lie group representations*, I, 99–111, Lecture Notes in Math., **1024**, Springer, Berlin, 1983.

[Lu2] G. Lusztig, *Intersection chomology methods in representation theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematics, Kyoto, Japan, (I. Satake, ed.), Springer-Verlag, 1991, 155–174, 1990.

---

*9 novembre 2006*

Nicolas Jacon, UFR Sciences et techniques - 16, route de Gray - 25 030 Besançon cedex.
*E-mail :* `jacon@math.univ-fcomte.fr`