SUR LA COMPARAISON DES NOYAUX DE TATE D'ORDRE SUPÉRIEUR

par

David Vauclair

Résumé. — We study generalized Tate kernels attached to a number field. It is known that there is a relationship between the equality of two of them and the size of some capitulation kernel in cyclotomic Iwasawa theory. By introducing some finer "Tate kernels $mod\, p^k$", we are able to describe this relationship very precisely, and to understand its asymptotic nature.

Table des matières

Introduction

Soit p un nombre premier impair, et F un corps de nombres. Supposons d'abord que F contienne une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité, notée ζ_p. Dans **[G]** (voir aussi **[KC]**), l'auteur fait l'étude des deux sous-groupes suivants de $F^\times$:

- $D^{(0)}(F)$, formé des éléments $x \in F^\times$ dont l'extension de Kummer associée $F(\sqrt[p]{x})/F$ est soit triviale soit le premier étage d'une $\mathbb{Z}_p$-extension.

- le noyau de Tate $D^{(2)}(F)$ formé des éléments $x \in F^\times$ pour lesquels le symbole de Steinberg $\{x, \zeta_p\} \in K_2F$ est trivial.

Sous la conjecture de Leopoldt, on sait que l'image de ces deux groupes dans $F^\times/F^{\times p}$ possède le même ordre. Aussi J. Coates avait-il posé la question suivante, rapportée dans **[G]** :

Question 0.1. — *Supposons la conjecture de Leopoldt vraie pour F et p. A-t-on alors $D^{(0)}(F) = D^{(2)}(F)$?*

R. Greenberg (loc. cit.) a montré que la réponse à cette question dépend de F. Si le noyau de capitulation asymptotique dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F (noté $X'(F_\infty)^0$) est trivial, alors l'égalité a lieu ; cela se produit par exemple pour $F = \mathbb{Q}(\mu_p)$, sous la conjecture de Vandiver. Greenberg produit aussi une condition explicite (qu'il vérifie pour $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-3.257})$) sous laquelle l'égalité n'a pas lieu.

Ces résultats mettent en évidence le fait suivant : la "différence" entre $D^{(2)}$ et $D^{(0)}$ est "contrôlée" par le noyau de capitulation. Ce travail vise à préciser le sens de la phrase précédente. Pour cela, il faut considérer une situation plus générale. Soit $i \in \mathbb{Z}$ et F_n le $n^{\text{ième}}$ étage de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique F_∞/F ; on ne suppose plus $\zeta_p \in F$. Nous introduisons des noyaux de Tate généralisés

$mod\,p^k$, notés $V_i(F_n,p^k)$. Si $\zeta_p\in F$, ils sont tels que $V_i(F_n,p)=D^{(i)}(F_n)/F_n^{\times p}$ pour $i=0,2$ et plus généralement pour $i\neq 1$, si l'on prend pour $D^{(i)}(F_n)$ la définition adoptée par [**KM**], [**AM**] et [**H**]. Le cas $i=1$ demande un traitement particulier (cf [**H**] et [**V2**]), et nous l'éviterons ici.

Fixons un corps de base F. Le problème de la comparaison de $V_i(F_n,p^k)$ avec $V_j(F_n,p^k)$ a un sens dès que $i\equiv j\,mod[F_n(\mu_{p^k}):F_n]$. Sous cette hypothèse, notre résultat principal (cf 2.2) met en relation les quantités suivantes :

- le nombre de racines de l'unité contenues dans F_n ; on note $m(F_n)=max\{m,\mu_{p^m}\subset F_n(\mu_p)\}$.
- la distance p-adique entre i et j.
- on suppose que les groupes $X^{(i)}(F_\infty)^{\Gamma_n}=X'(F_\infty)(i-1)^{\Gamma_n}$ et $X^{(j)}(F_\infty)^{\Gamma_n}=X'(F_\infty)(j-1)^{\Gamma_n}$ (cf notations) sont finis, i.e. que i et j sont F_n bons (cf 1.7), et l'on note $h(F_n,i,j)$ le minimum de leurs deux exposants.
- l'entier $k=k(F_n,i,j)\leq v_p(i-j)+m(F_n)$ maximal pour lequel l'égalité $V_i(F_n,p^k)=V_j(F_n,p^k)$ a lieu.

Nous montrons qu'il existe un entier explicite n_0 (dépendant de F) tel que pour $n\geq n_0$, on ait

$$k(F_n,i,j)+h(F_n,i,j)=m(F_n)+v_p(i-j)$$

Pour n quelconque, on a seulement l'inégalité $k(F,i,j)+h(F,i,j)\geq m(F)+v_p(i-j)$. Les techniques employées sont une adaptation de celles de [**G**] à la situation considérée ici. Bien sûr on retrouve les résultats de [**G**] mentionnés plus haut.

Les noyaux de Tate généralisés $mod\,p^k$ apparaissent naturellement lorsqu'on s'intéresse à certains problèmes de capitulation (cf par exemple [**KM**] ou [**V1**]). Dans le dernier paragraphe, nous travaillons à affaiblir l'hypothèse selon laquelle i et j doivent être F-bons. On complète ainsi la preuve du théorème 4.9 de [**V1**] en affaiblissant l'hypothèse de Leopoldt, ce qui rend le résultat applicable en pratique (on peut supposer Leopoldt seulement pour le corps de base, voir loc. cit. rem. 4.13)

Notations

F un corps de nombres.
p un nombre premier impair.
G_F le groupe de Galois absolu de F.
$G_S=G_S(F)$ le groupe de Galois de l'extension (p)-ramifiée maximale de F.
$F_\infty=\cup F_n$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F.
$\Gamma=Gal(F_\infty/F)$.
$\Lambda=\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ l'algèbre d'Iwasawa.
$m(F)=max\{m,\mu_{p^m}\subset F(\mu_p)\}$.
$A'(F)=\mathcal{C}l'(F)\otimes\mathbb{Z}_p$ la p-partie du groupe des (p)-classes de F.
$X'=\varprojlim A'(F_n)$.
$H^q(F,\bullet)$ la cohomologie continue de G_F.
$H^q_S(F,\bullet)=H^q(G_S(F),\bullet)$ la cohomologie continue de $G_S(F)$.
$H^q_{Iw}(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))=\varprojlim H^q_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))$.
$X^{(i)}(F_\infty)=H^2_{Iw}(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))$.
$\mathcal{X}^{(-i)}(F)=H^1_S(F,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^\vee$ où $\bullet^\vee$ désigne la dualité de Pontryagin.
$\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)=\varprojlim\mathcal{X}^{(-i)}(F_n)$.
$V_i(F,p^k)=Im\,(H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))\to H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k(i)))$, le $i^{\text{ème}}$ noyau de Tate $mod\,p^k$, si $i\neq 1$.
$V_i=D^{(i)}(F)/p$, voir cor. 1.5 pour $D^{(i)}(F)$ et $D^{(i)}(F,p^k)$.
$V_i(E/F,p^k)=Im\,(H^1_S(E,\mathbb{Z}_p(i))^{G(E/F)}\to H^1_S(E,\mathbb{Z}/p^k(i)))$ la partie F-rationnelle du $i^{\text{ème}}$ noyau de Tate $mod\,p^k$.
$exp(M)$ l'exposant du groupe abélien fini M.
M^{div} le sous-groupe divisible maximal du groupe abélien M.

M^0 le sous module fini maximal du Λ-module noethérien M.
$h = exp(X'(F_\infty)^0)$ l'exposant du p-groupe fini $X'(F_\infty)^0$.
$h(F,i,j) = min(exp(X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma), exp(X^{(j)}(F_\infty)^\Gamma))$.
$k(F,i,j) = max\{k \leq m(F) + v_p(i-j), V_i(F,p^k) = V_j(F,p^k)\}$.

1. Définition des noyaux de Tate généralisés

Soit F un corps de nombres et supposons momentanément qu'il contient ζ_p, une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité. Notons $\{.,.\}$ le symbole de Steinberg. Le noyau de Tate est habituellement défini comme le sous-groupe suivant $D^{(2)}(F)$ de $F^\times$:

$$D^{(2)}(F) := \{x \in F^\times, \{x, \zeta_p\} = 0\}$$

et comme il contient $F^{\times p}$, l'étude de $D^{(2)}(F)$ est strictement équivalente à celle de sa réduction $mod\,p$: $V_2(F,p) = D^{(2)}(F)/p \subset F^\times/F^{\times p}$ que l'on qualifiera de noyau de Tate $mod\,p$. Nous proposons ici, pour F quelconque (ne contenant pas nécessairement μ_p) et $i \neq 1$, une définition cohomologique directe et générale des noyaux de Tate $mod\,p^k$. Pour F contenant μ_p et $k = 1$, nous retrouverons les groupes $D^{(i)}(F)/p$, où $D^{(i)}(F)$ est la généralisation naturelle de $D^{(2)}(F)$ (voir cor. 1.5). Notons $H^q(F, \bullet)$ (resp. $H^q_S(F, \bullet)$) la cohomologie continue du groupe de Galois absolu G_F de F (resp. du groupe de Galois G_S de l'extension (p)-ramifiée maximale de F) comme définie dans **[T]**.

Définition 1.1. — *Soit F un corps de nombres quelconque, $i \in \mathbb{Z}$, $i \neq 1$. On note $V_i(F,p^k)$ l'image du morphisme naturel*

$$H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$$

On l'appelle le $i^{\text{ième}}$ noyau de Tate $mod\,p^k$.

Remarque 1.2. — *Le cas $i = 1$ demanderait un traitement particulier. Pour éviter les complications inutiles, nous l'éviterons systématiquement dans cet article, et nous y reviendrons dans* **[V2]**, *où une étude différente sera proposée.*

L'objet de ce travail est la comparaison - lorsqu'elle a un sens - des différents noyaux de Tate $mod\,p^k$. Pour que cette comparaison soit possible, il faut pouvoir identifier les groupes $H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$ et $H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(j))$; nous demanderons donc que l'image de G_S par la puissance $(i-j)^{\text{ième}}$ du caractère cyclotomique $mod\,p^k$ (ie. à valeurs dans $(\mathbb{Z}/p^k)^\times$) soit triviale, ce qui revient à $i \equiv j\, mod [F(\mu_p) : F]$ et

$$k \leq m(F) + v_p(i-j)$$

où $m(F) = max\{m, \mu_{p^m} \subset F(\mu_p)\}$. Lorsque c'est le cas, on identifiera $V_i(F,p^k)$ à un sous-groupe de $H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(j))$ et l'on dira que $V_i(F,p^k)$ et $V_j(F,p^k)$ sont comparables.

Remarque 1.3. — *La définition ci-dessus permet de changer k facilement : comme le diagramme à lignes exactes suivant commute*

$$\begin{array}{ccccc}
H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{p^{k+1}} & H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^{k+1}(i)) \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{p^{k}} & H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^{k}(i))
\end{array}$$

la dernière flèche verticale permet d'identifier naturellement $V_i(F,p^k)$ avec $V_i(F,p^{k+1})/p^k$.

Remarque 1.4. — *L'inflation de G_S à G_F permet de voir $H^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$ comme un sous-groupe de $H^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$. Comme on suppose $i \neq 1$, l'inflation produit aussi un isomorphisme canonique $H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) = H^1(F, \mathbb{Z}_p(i))$ (c'est une conséquence directe de la suite exacte de localisation en cohomologie étale, cf* **[S]***). On peut donc voir $V_i(F,p^k)$ comme le sous-groupe $H^1(F, \mathbb{Z}_p(i))/p^k$ de $H^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$.*

Proposition 1.1. — *Soient* $i \equiv j \bmod [F(\mu_p) : F]$, $k \le m(F) + v_p(i-j)$ *et notons* $\delta^{(i-j)}$ *le* G_F*-cobord associé à la suite exacte*

$$0 \to \mathbb{Z}_p(i-j) \xrightarrow{p^k} \mathbb{Z}_p(i-j) \longrightarrow \mathbb{Z}/p^k(i-j) \to 0$$

Alors le sous-groupe $H^1(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^k \cap H^1(F,\mathbb{Z}_p(j))/p^k$ *de* $H^1(F,\mathbb{Z}_p(j))/p^k$ *est l'orthogonal de* $\delta^{(i-j)}(\mathbb{Z}/p^k(i-j))$ *pour le cup-produit*

$$H^1(F,\mathbb{Z}_p(j))/p^k \otimes H^1(F,\mathbb{Z}_p(i-j))[p^k] \to H^2(F,\mathbb{Z}_p(i))$$

Preuve : La fonctorialité du cup produit par rapport au décalage donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F,\mathbb{Z}_p(j)) & \otimes & H^1(F,\mathbb{Z}_p(i-j)) & \xrightarrow{\cup} & H^2(F,\mathbb{Z}_p(i)) \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \delta^{(i-j)}} & & \uparrow{\scriptstyle \delta^{(i)}} \\ H^1(F,\mathbb{Z}_p(j)) & \otimes & \mathbb{Z}/p^k(i-j) & \xrightarrow{\cup} & H^1(F,\mathbb{Z}/p^k(i)) \end{array}$$

puis un autre :

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F,\mathbb{Z}_p(j))/p^k & \otimes & H^1(F,\mathbb{Z}_p(i-j))[p^k] & \xrightarrow{\cup} & H^2(F,\mathbb{Z}_p(i)) \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \delta^{(i-j)}} & & \uparrow{\scriptstyle \delta^{(i)}} \\ H^1(F,\mathbb{Z}_p(j))/p^k & \otimes & \mathbb{Z}/p^k(i-j) & \xrightarrow{\cup} & H^1(F,\mathbb{Z}/p^k(i)) \end{array}$$

Maintenant, le cup produit de la ligne inférieure est simplement l'inclusion de groupes

$$H^1(F,\mathbb{Z}_p(j))/p^k \subset H^1(F,\mathbb{Z}/p^k(i)).$$

On voit donc sur ce diagramme que l'orthogonal de $\delta^{(i-j)}(\mathbb{Z}/p^k(i-j))$, vu comme sous-groupe de $H^1(F,\mathbb{Z}_p(j))/p^k \subset H^1(F,\mathbb{Z}/p^k(i))$, est l'intersection de $H^1(F,\mathbb{Z}_p(j))/p^k$ avec le noyau de l'homomorphisme de Bockstein

$$\delta^{(i)} : H^1(F,\mathbb{Z}/p^k(i)) \to H^2(F,\mathbb{Z}_p(i))$$

Mais le noyau en question est $H^1(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^k$ et cela termine la preuve.

□

Notons δ_1 l'application de Kummer, c'est-à-dire le morphisme de connexion associé à la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow \varprojlim \overline{F}^\times \longrightarrow \overline{F}^\times \to 0$$

Corollaire 1.5. — *Soit* $i \equiv 1 \bmod [F(\mu_p) : F]$, $i \neq 1$, $k \le m(F) + v_p(i-1)$. *Notons* $D^{(i)}(F,p^k)$ *le sous-groupe de* $F^\times$ *orthogonal à* $\mu_p^{\otimes i-1}$ *pour le symbole*

$$F^\times \otimes \mu_{p^k}^{\otimes i-1} \xrightarrow{(.,.)} H^2(F,\mathbb{Z}_p(i))$$

défini par $(x,y) = \delta x \cup \delta_1 y$. *Alors* $V_i(F,p^k)$*, vu comme sous-groupe de* $F^\times/F^{\times p}$*, s'identifie à* $D^{(i)}(F,p^k)/p^k$. *En particulier,* $V_i(F,p)$ *s'identifie avec* $V_i := D^{(i)}(F)/p$*, où* $D^{(i)}(F) := D^{(i)}(F,p)$ *est par définition le noyau de Tate généralisé de* [**AM**], [**KM**] *et* [**H**].

Preuve : Compte tenu de la remarque 1.4, il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $j = 1$, en remarquant que

$$H^1(F,\mathbb{Z}/p^k(1)) = F^\times/F^{\times p^k} = H^1(F,\mathbb{Z}_p(1))/p^k$$

□

Ce corollaire justifie l'appellation “noyau de Tate $mod\, p^k$”.

Définition 1.6. — *Soit* $X^{(i)}(F_\infty) = H^2_{Iw}(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))$*, et* $\delta_i = rg_{\mathbb{Z}_p} X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma$. *On dit que* i *est* F*-bon si* $\delta_i = 0$.

Remarque 1.7. — *Puisque* $X^{(i)}(F_\infty)_\Gamma = H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$ *(cela tient à* $cd_p G_S \le 2$*, voir* [**V3**] *pour plus de détails),* δ_i *est le* $\mathbb{Z}_p$*-rang de* $H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$. *C. Soulé a montré que tout* $i \ge 2$ *est* F*-bon* [**S**]. *Par ailleurs,* 0 *l'est si et seulement si* F *vérifie la conjecture de Leopoldt en* p.

Proposition 1.2. — *Notons s le nombre de (p)-places de F, et $\epsilon_i = 1$ si $i \equiv 1\, mod\, [F(\mu_p) : F]$ ou $i = 0$, $\epsilon_i = 0$ sinon. Le p-rang de $V_i(F, p^k)$ est alors donné par $r_2+\delta_i+\epsilon_i$ si i est pair, $r_1+r_2+\delta_i+\epsilon_i$ si est impair.*

Preuve : Il s'agit d'un résultat facile, dont nous donnons rapidement les éléments de la preuve. On renvoie à **[V3]** pour plus de détails. Pour simplifier, on ne traite que le cas $i \neq 0$. On a alors $H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))[p] = \mathbb{Z}/p(i)^{G_S}$, et le p-rang annoncé est obtenu en ajoutant ϵ_i au $\mathbb{Z}_p$-rang de $H^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$. Pour $i \geq 2$, ce dernier est bien connu : il résulte, via **[S]**, d'un résultat de Borel concernant les groupes de K-théorie algébrique. Pour $i \neq 0$, $i < 2$, on se ramène au cas $i \geq 2$ de la façon suivante : on a $\mathcal{X}^{(-i)}(F) = \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)_\Gamma$ où F_∞/F est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F et Γ son groupe de Galois. Il est facile d'en déduire $rg_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(F) = rg_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)+rg_{\mathbb{Z}_p} t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)_\Gamma$. Maintenant le Λ-rang de $\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)$ est le même que celui de $\mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)$ où $j \equiv i\ mod[F(\mu_p) : F]$, $j \geq 2$; et ce dernier se déduit facilement des formules de Borel pour tous les F_n. Par ailleurs, on sait que $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)$ est pseudo-isomorphe au module $X^{(i)}(F_\infty)$ dont l'action de Γ aurait été inversée. Le résultat s'en déduit facilement.

□

2. Comparaison $mod\, p^k$

On fixe $i \equiv j\, mod\, [F(\mu_p) : F]$, et on suppose toujours que $V_i(F, p^k)$ et $V_j(F, p^k)$ sont comparables, ie. $k \leq m(F) + v_p(i - j)$.

Commençons par rappeler les notations évoquées dans l'introduction :

Définition 2.1. — *Soit F_∞/F la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $F = F_0$, Γ son groupe de Galois, et $X^{(i)}(F_\infty) = H^2_{Iw}(F, \mathbb{Z}_p(i))$ le module d'Iwasawa habituel (cf Notations). Pour i, j F_n-bons (cf def 1.6), on adopte les notations suivantes :*
- h est l'exposant du sous-module fini maximal (aussi appelé noyau de capitulation) $X^{(i)}(F_\infty)^0$ de $X^{(i)}(F_\infty)$. Notons que si $i \equiv 1\, mod\, [F(\mu_p) : F]$, les groupes $X^{(i)}(F_\infty)^0$ et $X'(F_\infty)^0$ sont égaux.
- $h(F, i, j)$ est le plus petit des exposants des groupes $X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma$ et $X^{(j)}(F_\infty)^\Gamma$ (ces groupes sont finis car i est j sont F_n-bons).
- $k(F, i, j) = max\{k \leq m(F) + v_p(i - j), V_i(F, p^k) = V_j(F, p^k)\}$ est la précision maximale d'égalité des $i^{ième}$ et $j^{ième}$ noyaux de Tate.
- n_0 est le plus petit étage n tels que l'un des deux modules $X^{(i)}(F_\infty)^0$, $X^{(j)}(F_\infty)^0$ soit fixé par Γ_n.

L'objet de ce paragraphe est la preuve du résultat principal :

Théorème 2.2. — *Soient i, j deux entiers F_n-bons, congrus $mod\, [F(\mu_p) : F]$. Alors on a l'égalité suivante*

$$k(F_n, i, j) + h(F_n, i, j) = m(F_n) + v_p(i - j)$$

pour tout $n \geq n_0$. De plus l'inégalité

$$k(F_n, i, j) + h(F_n, i, j) \geq m(F_n) + v_p(i - j)$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

Avant de passer à la preuve, notons tout de suite que les résultats de **[G]** mentionnés dans l'introduction sont contenus dans ce théorème. En effet, notant $V_i = V_i(F, p)$, on retrouve :

Proposition 2.1. — *(**[G]** §6) Si F vérifie la conjecture de Leopoldt et contient μ_p, alors*
(i) Si $m(F) \geq h + 1$, alors $V_0 = V_2$.
(ii) Si $X'(F_\infty)^0$ est cyclique d'ordre p et si $m(F) = 1$, alors $V_0 \neq V_2$.

Preuve : 0 est F-bon puique F vérifie la conjecture de Leopoldt ; et 2 l'est toujours (cf rem. 1.7).
(i) Comme $h(F, 2, 0) \leq h$ et $v_p(2 - 0) = 0$, l'inégalité du théorème 2.2 donne

$$k(F, 2, 0) \geq m(F) - h(F, 2, 0) \geq m(F) - h \geq 1$$

si bien que $V_0 = V_2$ par définition de $k(F,2,0)$.
(ii) Si $h=1$, alors on a automatiquement $n_0 = 0$ et $h(F,2,0) = h = 1$. L'égalité du théorème 2.2 donne donc

$$k(F,2,0) = m(F) - h = 0$$

ie. $V_2 \neq V_0$.

□

Les résultats de **[AM]** et **[H]** ayant trait à la comparaison des noyaux de Tate généralisés pour $i \neq 1$ se déduisent de l'inégalité de 2.2 de la même manière.

Pour prouver 2.2, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3. — *Soit $i \in \mathbb{Z}$; si F contient μ_{p^k}, alors les sous-groupes $V_i(F,p^k)$ et $V_j(F,p^k)$ de $H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k(j))$ sont les images réciproques respectives de $(H^1_S(F_\infty,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^\Gamma)^{div}[p^k]$ et de $(H^1_S(F_\infty,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma)^{div}[p^k]$ vus comme sous-groupe de $H^1_S(F_\infty,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))$ (comme groupe c'est aussi $H^1_S(F_\infty,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$), par l'application naturelle*

$$\phi_j : H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k(j)) \to H^1_S(F_\infty,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))$$

Preuve : Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{Z}_p(i) & \xrightarrow{p^k} & \mathbb{Z}_p(i) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^k(i) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \frac{1}{p^k}} & & \downarrow{\scriptstyle \frac{1}{p^k}} & & \\ 0 & \to & \mathbb{Z}_p(i) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p(i) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i) & \to & 0 \end{array}$$

En prenant la G_S-cohomologie, on obtient le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccc} Z_i & \longrightarrow & Z_i & \hookrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^k & \hookrightarrow & H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k(i)) & \twoheadrightarrow & H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))[p^k] \\ \downarrow & & {\scriptstyle f_i}\downarrow & & \downarrow \\ H^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[p^k] & \overset{g_i}{\hookrightarrow} & H^1_S(F,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))[p^k] & \twoheadrightarrow & H^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))[p^k] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

où Z_i désigne $H^0_S(F,\mathbb{Z}/p^k(i))$ si $i \neq 0$ et 0 si $i=0$. On voit sur ce diagramme que $V_i(F,p^k) = f_i^{-1}(Im\, g_i) = H^1_S(F,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{div}[p^k]$. Comme $H^1(\Gamma,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ est divisible, on obtient par inflation-restriction la suite exacte suivante :

$$H^1(\Gamma,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))[p^k] \hookrightarrow H^1_S(F,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{div}[p^k] \twoheadrightarrow (H^1_S(F_\infty,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^\Gamma)^{div}[p^k]$$

Finalement, $V_i(F,p^k)$ est l'image réciproque de $H^1_S(F,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{div}[p^k]$ par l'application composée

$$\phi_i : H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k(i)) \xrightarrow{f_i} H^1_S(F,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \xrightarrow{res_F^{F_\infty}} H^1(F_\infty,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

Maintenant, les applications ϕ_i et ϕ_j coïncident en tant que morphismes de groupes, comme on peut s'en convaincre en observant le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k(i)) & \xrightarrow{res} & H^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}/p^k(i)) \\ {\scriptstyle f_i}\downarrow & & \downarrow \\ H^1_S(F,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) & \underset{\sim}{\xrightarrow{res}} & H^1_S(F_\infty,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^\Gamma \end{array}$$

□

Preuve de 2.2 : Quitte à changer F, on peut toujours supposer $F_n = F$. Cela revient à traduire la condition supplémentaire "$n \geq n_0$" par "l'un des deux modules $X^{(i)}(F_\infty)^0$, $X^{(j)}(F_\infty)^0$ est fixé par Γ". Il s'agit de montrer que

$$k \leq m(F) + v_p(i-j) - h(F,i,j) \Rightarrow V_i(F,p^k) = V_j(F,p^k)$$

et que sous la condition supplémentaire, on a en fait l'équivalence.

D'après le lemme 2.3, $V_i(F, p^k)$ et $V_j(F, p^k))$ sont égaux si et seulement si les sous-groupes $(H^1_S(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^\Gamma)^{div}[p^k]$ et $(H^1_S(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma)^{div}[p^k]$ de $H^1(F_\infty, \mathbb{Z}/p^k(j))^\Gamma$ (lui-même sous-groupe de $H^1_S(F_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j)))$ sont égaux. En passant aux orthogonaux via l'accouplement parfait suivant (voir Notations pour $\mathcal{X}^{(-j)}$)

(1) $$H^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p/p^k(j))^\Gamma \otimes \mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)_\Gamma/p^k \to \mathbb{Z}/p^k$$

on obtient l'équivalence

$$V_i(F, p^k) = V_j(F, p^k) \Leftrightarrow (t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)_\Gamma))/p^k = (t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)_\Gamma))/p^k$$

où l'on regarde $(t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)_\Gamma))/p^k$ et $(t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)_\Gamma))/p^k$ comme des sous-espaces de

$$\mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)_\Gamma/p^k = \mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)_\Gamma/p^k.$$

Maintenant i et j sont supposés F-bons, $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty))_\Gamma$ et $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty))_\Gamma$ sont donc de $\mathbb{Z}_p$-torsion (cf **[V3]**, Cor. 1.2.41), si bien que

$$(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty))_\Gamma/p^k \subset (t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)_\Gamma))/p^k \cap (t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-j)}(F_\infty)_\Gamma))/p^k$$

L'égalité en question équivaut donc à la suivante, en tant que sous-groupes de $(f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty))_\Gamma/p^k$:

$$(t_{\mathbb{Z}_p}(f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty))_\Gamma)/p^k = (t_{\mathbb{Z}_p}(f_\Lambda \mathcal{X}^{-j)}(F_\infty))_\Gamma)/p^k$$

Il est bien connu (Voir par ex. **[J]** cor. 6.5 b, ou **[V3]**, rem. 3.2.27) que le Λ-module $(X^{(i)}(F_\infty)^0)^\vee$ est isomorphe au conoyau de l'application canonique

$$f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty) \to Hom_\Lambda(Hom_\Lambda(f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty), \Lambda), \Lambda)$$

La preuve de la proposition 2.2 se réduit donc au lemme algébrique suivant, en prenant $M = f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)$, $e = i - j$ et $h' = h(F, i, j)$.

Lemme 2.4. — *Soit M un Λ-module noethérien, sans torsion et soit $e \in \mathbb{Z}$. Soit H le conoyau de l'application naturelle $M \to Hom_\Lambda(Hom_\Lambda(M, \Lambda), \Lambda)$. Notons encore*

$$h' = min(v_p(exp(H^\Gamma)), v_p(exp(H(e)^\Gamma)))$$

et

$$n = v_p((\mathbb{Z}_p{}^\times : \kappa(\Gamma))) + 1 = m(F)$$

κ étant le caractère cyclotomique. Si $v_p(e) \geq h' - n + k$, alors les sous-groupes $(t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma)/p^k$ et $(t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma)/p^k$ de $M_\Gamma/p^k = M(e)_\Gamma/p^k$ sont égaux.

Si l'on suppose de plus que l'un des deux Λ-modules H, $H(e)$ est fixé par Γ, alors on a l'équivalence

$$(t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma)/p^k = (t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma)/p^k \Leftrightarrow v_p(e) \geq h' - n + k$$

Preuve de 2.4, sens direct : Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.5. — *Soit Z un $\mathbb{Z}_p$-module noethérien, h' et k deux entiers naturels, alors l'image de l'application naturelle $Z/p^{h'+k}[p^{h'}] \to f_{\mathbb{Z}_p} Z/p^k$ est triviale.*

Preuve : C'est trivial si l'on décompose $Z = t_{\mathbb{Z}_p} Z \oplus f_{\mathbb{Z}_p} Z$.

□

Supposons $n + v_p(e) \geq h' + k$, on peut alors faire les identifications suivantes : $M_\Gamma/p^{h'+k} = M(e)_\Gamma/p^{h'+k}$ et $M_\Gamma/p^k = M(e)_\Gamma/p^k$. Il s'agit de montrer que $t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k$ et $t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma/p^k(-e)$, vus comme sous-modules de M_Γ/p^k, sont égaux. D'abord ils ont même ordre puisque

$$\#(f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k) = \#(f_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma/p^k) = p^{k\, rg_\Lambda M}$$

Ensuite le lemme 2.5 appliqué à $Z = M_\Gamma$ et $Z = M(e)_\Gamma$ montre que tous deux contiennent l'image de l'application naturelle $M_\Gamma/p^{h'+k}[p^{h'}] \to M_\Gamma/p^k$. On peut supposer sans perte de généralité que $h' = v_p(exp(H^\Gamma))$. Dans ce cas $v_p(exp(t_{\mathbb{Z}_p}(M_\Gamma))) = h'$ et $M_\Gamma/p^{h'+k}[p^{h'}]$ contient $t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^{h'+k}$ et l'on en déduit que $t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma(-e)$ contient $t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k$, ce qui termine la preuve puisqu'ils ont même ordre.

□

Preuve de 2.4, suite : Passons à l'équivalence dans le cas où l'un des deux Λ-modules H, $H(e)$ est fixé par Γ. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.6. — *On conserve les hypothèses et notations du lemme 2.4. Soit Z un Λ-module fini. Si Z et $Z(e)$ sont fixés par Γ, c'est que $v_p(exp(Z)) \leq v_p(e) + n$.*

Preuve : C'est immédiat si l'on décompose Z en Λ-modules cycliques (comme groupes).

□

Il s'agit de montrer que si $t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k = t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma/p^k$, alors $v_p(e) + n \geq h' + k$.

Comme dans [**G**], §6., on définit les Λ-modules Y, Y_e, Z et Z_e par l'exactitude des suites suivantes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & Y & \longrightarrow & M & \longrightarrow & f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k & \to & 0 \\
0 & \to & Y_e & \longrightarrow & M(e) & \longrightarrow & f_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma & \to & 0 \\
0 & \to & Y & \longrightarrow & Hom_\Lambda(Hom_\Lambda(M, \Lambda), \Lambda) & \longrightarrow & Z & \to & 0 \\
0 & \to & Y_e & \longrightarrow & Hom_\Lambda(Hom_\Lambda(M, \Lambda), \Lambda)(e) & \longrightarrow & Z_e & \to & 0
\end{array}$$

Par hypothèse, on a $t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k = t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma/p^k$, et donc $Y_e = Y(e)$ et $Z_e = Z(e)$.

Considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & Y & \to & Y & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M & \to & Hom_\Lambda(Hom_\Lambda(M, \Lambda), \Lambda) & \to & H & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k & \to & Z & \to & H & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

En prenant la Γ-cohomologie, on observe que le cobord

$$H^\Gamma \to f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k$$

est nul. Cela résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H^\Gamma & \longrightarrow & M_\Gamma \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
H^\Gamma & \longrightarrow & f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k
\end{array}$$

Ainsi, la suite

$$0 \to f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k \longrightarrow Z^\Gamma \longrightarrow H^\Gamma \to 0$$

est exacte. De la même façon, on a une suite exacte

$$0 \to f_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma/p^k \longrightarrow Z(e)^\Gamma \longrightarrow H(e)^\Gamma \to 0$$

Notons alors Z' l'image réciproque, dans Z, de $H' = H^\Gamma \cap H(e)^\Gamma$. Les deux suites exactes ci-dessus montrent que Z' et $Z'(e)$ sont fixés par Γ. Reste, pour appliquer le lemme 2.6, à déterminer l'exposant de Z'. On peut supposer, sans perte de généralité, que Z est fixé par Γ. La surjection $\Lambda^{rg_\Lambda M} = Hom_\Lambda(Hom_\Lambda(M, \Lambda), \Lambda) \twoheadrightarrow Z$ montre alors que $rg_{\mathbb{Z}/p} Z/p \leq rg_\Lambda M$. On en déduit que $rg_{\mathbb{Z}/p} Z'/p \leq rg_\Lambda M$. La suite exacte tautologique

$$0 \to f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k \longrightarrow Z' \longrightarrow H' \to 0$$

montre alors que $v_p(exp(Z')) = k + v_p(exp(H')) = k + h'$ puisque $f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k = (\mathbb{Z}/p^k)^{rg_\Lambda M}$. Grâce au lemme 2.6, on en conclut que $v_p(e) + n \geq k + h'$, et cela termine la preuve.

□

Remarque 2.7. — *Si aucun des deux Λ-modules H, $H(e)$, n'est fixé par Γ l'équivalence dans 2.4 n'est plus vraie (et donc a priori dans 2.2 non plus) : cela tient au fait qu'on ne contrôle plus le p-rang de Z'. L'exemple suivant illustre bien la situation : soit M l'idéal $((1+p)^{-1}(1+T)-1, p^2)$ de $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$, et choisissons $n = e = k = 1$. On a alors $H = \mathbb{Z}/p^2(1)$, si bien que ni H, ni $H(1)$ n'est fixé par Γ et que $h' = 1$. On vérifie facilement que les sous-groupes $t_{\mathbb{Z}_p}M_\Gamma/p$ et $t_{\mathbb{Z}_p}M(1)_\Gamma/p$ de M_Γ/p sont égaux, bien que l'inégalité $h'+k \leq n+v_p(e)$ ne soit pas satisfaite. En fait $Z = \mathbb{Z}_p[[T]]/(T^2, pT, p^2)$ et $Z' = Z^\Gamma = pZ + TZ = \mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p$, le raisonnement de la preuve ci-dessus donne donc seulement $n + v_p(e) \geq v_p(exp(Z')) = 1$.*

Remarque 2.8. — *Le théorème 2.2 est de nature asymptotique. Cela tient au choix, suivant* **[G]**, *de l'objet $X'(F_\infty)^0$ pour mesurer la différence entre les noyaux de Tate. Dans* **[V3]**, *nous remplacerons $X'(F_\infty)^0$ par un objet au niveau fini, ce qui donnera lieu à des résultats au niveau fini.*

3. Comparaison F-rationnelle

Soit E/F une extension galoisienne, et i et j deux entiers E-bons, comparables. Si le noyau de capitulation est trivial, alors d'après le théorème 2.2, on a $k(E,i,j) = m(E) + v_p(i-j)$, en d'autres termes, les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ noyaux de Tate sont égaux avec la meilleure précision que l'on puisse espérer. Dans la pratique, il arrive souvent qu'on ait à faire varier le corps E, si bien que dans l'état actuel de nos connaissances, l'hypothèse selon laquelle i et j sont E-bons n'est raisonnable que si i et j sont tous deux ≥ 2 (thm. de Soulé). L'objet de ce paragraphe est de montrer que lorsque i est seulement F-bon, on peut encore affirmer que le $j^{\text{ième}}$ noyau de $mod\, p^k$ contient la partie F-rationnelle (voir ci-dessous) du $i^{\text{ème}}$ noyau de Tate $mod\, p^k$.

Définition 3.1. — *Si E/F est une extension galoisienne finie, on définit le sous-groupe F-rationnel $V_i(E/F, p^k)$ de $V_i(E, p^k)$ par*

$$V_i(E/F, p^k) = Im\,(H^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i))^{G(E/F)} \to H^1_S(E, \mathbb{Z}/p^k(i)))$$

Notons que si $i \neq 0$, $V_i(E/F, p^k)$ est simplement $res^E_F V_i(F, p^k)$, mais si $i = 0$, ce n'est plus nécessairement le cas. En fait $V_0(E/F, p^k)$ décrit les premiers étages des $\mathbb{Z}_p$-extensions de E qui proviennent de F par composition avec E.

Théorème 3.2. — *Soit E/F une sous-extension finie de $\tilde{F}/F$. On suppose i F-bon, et $j \equiv i\, mod\, [F(\mu_p) : F]$. Si $X^{(i)}(E_\infty)^0 = 0$, alors $V_i(E/F, p^k) \subset V_j(E, p^k)$ pour tout $k \leq m(F) + v_p(i-j)$.*

Preuve : Comme $j \equiv i\, mod\, [F(\mu_p) : F]$, on peut identifier les groupes $H^1_S(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ et $H^1_S(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))$. Alors, d'après le lemme 2.3, on a

$$V_i(E/F, p^k) \subset V_j(E, p^k) \Leftrightarrow res^{E_\infty}_F V_i(E/F, p^k) \subset (H^1_S(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma)^{div}$$

Considérons l'accouplement suivant :

$$H^1_S(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma \quad \otimes \quad \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)_\Gamma \quad \longrightarrow \quad \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \tag{2}$$

Comme il s'agit d'un accouplement parfait, on montre que l'orthogonal de $res^{E_\infty}_F V_i(E/F, p^k)$ contient celui de $(H^1_S(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma)^{div}$. Comme $H^1(\Gamma, f_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)) = (f_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty))^\Gamma = 0$, on peut considérer $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty))_\Gamma$ comme un sous-espace de $\mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)_\Gamma$. Nous montrerons les deux faits suivants :

Fait 1 : L'orthogonal de $res^{E_\infty}_F V_i(E/F, p^k)$ contient $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty))_\Gamma$.

Fait 2 : L'orthogonal de $(H^1_S(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma)^{div}$ est contenu dans $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty))_\Gamma$.

Commençons par le fait 1. Il s'agit de montrer que $res^{E_\infty}_F V_i(E/F, p^k)$ et $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)$ sont orthogonaux pour l'accouplement

$$H^1_S(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j)) \quad \otimes \quad \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \tag{3}$$

Notons d'abord l'inclusion suivante

$$res_E^{E_\infty} V_i(E/F, p^k) \subset res_F^{E_\infty}(H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{div}) \tag{4}$$

(l'inclusion a lieu dans $H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$). En effet, $res_E^{E_\infty} V_i(E/F, p^k)$ est l'image de l'application composée

$$H_S^1(E, \mathbb{Z}_p(i))^{G(E/F)} \to H_S^1(E, \mathbb{Z}/p^k(i)) \overset{res_E^{E_\infty}}{\to} H_S^1(E_\infty, \mathbb{Z}/p^k(i)) \overset{\frac{1}{p^k}}{\to} H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

que l'on peut ré-écrire

$$H_S^1(E, \mathbb{Z}_p(i))^{G(E/F)} \to H_S^1(E, \mathbb{Z}/p^k(i)) \overset{\frac{1}{p^k}}{\to} H_S^1(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \overset{res_E^{E_\infty}}{\to} H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

ou encore

$$H_S^1(E, \mathbb{Z}_p(i))^{G(E/F)} \overset{\frac{1}{p^k}}{\to} H_S^1(E, \mathbb{Q}_p(i))^{G(E/F)} \to H_S^1(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \overset{res_E^{E_\infty}}{\to} H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)).$$

Avec l'égalité $H_S^1(E, \mathbb{Q}_p(i))^{G(E/F)} = res_F^E H_S^1(F, \mathbb{Q}_p(i))$, on obtient l'inclusion du sous-groupe $res_E^{E_\infty} V_i(E/F, p^k)$ de $H_S^1(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ dans l'image de l'application composée suivante

$$H_S^1(F, \mathbb{Q}_p(i)) \overset{res_F^E}{\to} H_S^1(E, \mathbb{Q}_p(i)) \to H_S^1(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \overset{res_E^{E_\infty}}{\to} H_S^1(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

que nous ré-écrivons

$$H_S^1(F, \mathbb{Q}_p(i)) \to H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \overset{res_F^{E_\infty}}{\to} H_S^1(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

D'où l'inclusion (4), puisque $H_S^1(F, \mathbb{Q}_p(i))$ est divisible.

Maintenant, l'accouplement (3) est compatible avec le suivant :

$$H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \quad \otimes \quad \mathcal{X}^{(-i)}(F) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \tag{5}$$

(noter que l'on peut remplacer j par i dans (3)) Ainsi pour montrer que $res_F^{E_\infty} V_i(E/F, p^k)$ et $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)$ (comme groupe c'est $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E_\infty)$) sont orthogonaux, il suffit de montrer que l'image de $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E_\infty) \to \mathcal{X}^{(-i)}(F)$ est orthogonale à $H_S^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{div}$ pour l'accouplement (5). Remarquons pour cela que l'application $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E_\infty) \to \mathcal{X}^{(-i)}(F)$ se factorise en

$$t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E_\infty) \to t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty) \to (t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty))_\Gamma \to \mathcal{X}^{(-i)}(F)$$

Comme i est F-bon, $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty))_\Gamma$ est fini (cf **[V3]**, Cor. 1.2.41), l'image l'est donc aussi de $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E_\infty)$ dans $\mathcal{X}^{(-i)}(F)$ l'est donc aussi, et cela entraîne l'orthogonalité souhaitée.

Passons au fait 2. L'orthogonal de $(H_S^1(E_\infty, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(j))^\Gamma)^{div}$ est exactement $t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)_\Gamma)$. Comme $X^{(j)}(E_\infty)^0 = 0$, c'est que $f_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)$ est libre (cf **[V3]**, rem. 3.2.27), et donc que $t_{\mathbb{Z}_p}(\mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty)_\Gamma) \subset (t_\Lambda \mathcal{X}^{(-j)}(E_\infty))_\Gamma$.

□

Références

[AM] J. Assim, A. Movahhedi, *Bounds for Étale Capitulation Kernels*, K-Theory, **33** (2004), 199-213.

[H] K. Hutchinson, *Tate kernels, étale K-theory and the Gross Kernel*, Preprint (2005).

[KM] M. Kolster, A. Movahhedi, *Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **50** (2000), 35-65.

[G] R. Greenberg, *A note on K_2 and the theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, Amer. J. of Math. **100**, No.6. (1978), 1235-1245.

[J] U. Jannsen, *Iwasawa Modules up to Isomorphism*, Advanced Studies in Pure Mathematics **17** (1989), 171-207.

[S] C. Soulé, *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale*, Invent. Math. **55** (1979), 251-295.

[KC] K. Kramer et A. Candiotti, *On K_2 and $\mathbb{Z}_l$-extensions of number fields*, Amer. Journal of Math. **100** (1978), 177-196).

[T] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257-274.

[V1] D. Vauclair, *Cup produit, noyaux de capitulations étales et conjecture de Greenberg généralisée*, K-theory, **36** (2005), 223-244.

[V2] D. Vauclair, *Noyaux de Tate et capitulation*, en préparation (2006).

[V3] D. Vauclair, *Conjecture de Greenberg généralisée et capitulation dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions d'un corps de nombres*, thèse (2005).

8 novembre 2006

David Vauclair, Université de Franche-Comté, Laboratoire de Mathématiques, CNRS UMR 6623, 16, route de Gray, 25030 BESANCON CEDEX, France • *E-mail :* `vauclair@math.univ-fcomte.fr`