APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES DE LA COHOMOLOGIE ℓ-ADIQUE DES VARIÉTÉS MODULAIRES DE HILBERT

par

Mladen Dimitrov

Résumé. — Ce texte est un résumé des résultats concernant la cohomologie ℓ-adique des variétés modulaires de Hilbert obtenus dans [**D1**, **D2**] ainsi que de leurs applications arithmétiques, telles que la modularité de certaines représentations de dimension deux du groupe de Galois absolu d'un corps de nombres totalement réel et la conjecture de Bloch-Kato pour le motif adjoint d'une forme modulaire nouvelle de Hilbert. Nous saisissons l'occasion pour détailler certains arguments qui n'étaient mentionnés que brièvement dans les articles originaux.

Abstract **(Arithmetic applications of the cohomology of Hilbert modular varieties)**

This is a survey of the author's results on the ℓ-adic cohomology of Hilbert modular varieties obtained in [**D1**, **D2**] as well as of their arithmetic applications, such as the modularity of certain two-dimensional representations of the absolute Galois group of a totally real number field, and the Bloch-Kato conjecture for the adjoint motive associated to a Hilbert modular newform. We take advantage of this opportunity to expand some of the arguments which were mentioned only briefly in the original articles.

Soit F un corps de nombres totalement réel de degré d d'anneau des entiers $\mathfrak{o}$, de groupe de Galois absolu $\mathrm{G}_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ et soit ℓ un nombre premier. Nous commencerons par introduire deux problématiques.

Je voudrais remercier Philippe Blanc pour l'invitation qu'il m'a adressée pour participer à son colloque, Christian Maire pour sa proposition d'éditer les actes du colloque et bien sûr le CIRM pour son accueil toujours très chaleureux.

[(1)]Notes enrichies de l'exposé donné au colloque "Cohomologie ℓ-adique et corps de nombres" ayant eu lieu au CIRM du 10 au 14 décembre 2007.

1. Conjecture de modularité pour GL_2/F.

La modularité pour GL_1/F concernant les représentations continues de dimension un de G_F est l'objet principal de la théorie de corps de classes global. Dans la formulation donnée par Weil, $\mathrm{G}_F^{\mathrm{ab}}$ est décrit comme le quotient du groupe de classes d'idèles $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ par la composante connexe $\overline{(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+^\times}$ de l'identité. Ainsi, les caractères continus $\mathrm{G}_F \to \mathbb{C}^\times$ correspondent-ils à des caractères de Hecke d'ordre fini. Finalement, si l'on suppose la conjecture de Leopoldt vraie pour F en ℓ, tout caractère ℓ-adique $\mathrm{G}_F \to \mathbb{Q}_\ell^\times$ s'écrit comme produit d'un caractère d'ordre fini par une puissance ℓ-adique du caractère cyclotomique $\chi_\ell : \mathrm{G}_F \to \mathbb{Z}_\ell^\times$.

Etant donné une représentation automorphe cuspidale π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ engendrée par une forme modulaire de Hilbert holomorphe nouvelle de poids arithmétique et un plongement $\iota_\ell : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, l'on sait par Taylor [**T**] *et al.* leur associer une représentation ℓ-adique

$$\rho_{\pi,\ell} : \mathrm{G}_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Z}}_\ell) \tag{1}$$

qui est irréductible, totalement impaire, non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places et potentiellement semi-stable en toutes les places divisant ℓ (excepté quelques cas très rares, en ce qui concerne cette dernière propriété ; voir [**K**]).

Réciproquement, Fontaine-Mazur [**FM**] et Langlands ont conjecturé que toute représentation ℓ-adique de dimension deux ayant ces propriétés provient d'une représentation automorphe π comme ci-dessus. La conjecture prédit plus précisément que l'image de l'inertie en toute place v de F divisant ℓ est d'ordre infini (resp. fini) si, et seulement si, la forme est de poids cohomologique (resp. de poids parallèle 1, ce qui est par ailleurs un cas particulier de la conjecture d'Artin).

2. Conjectures sur le motif adjoint d'une représentation automorphe de GL_2/F.

A toute représentation automorphe cuspidale π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ telle que π_∞ appartient à la série discrète holomorphe, Blasius et Rogawski [**BR**] associent un motif A_π sur F de rang 3 à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, pur de poids 0 et autodual $A_\pi^* = A_\pi$. Pour tout $\iota_\ell : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sa réalisation ℓ-adique $\mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,\ell})$ est donnée par l'action adjointe de G_F via $\rho_{\pi,\ell}$ sur les matrices 2×2 de trace nulle. Notons $\mathrm{L}(A_\pi, s)$ et $\Gamma(A_\pi, s)$ la fonction L et le facteur d'Euler correspondants. Les valeurs critiques au sens de Deligne [**De**] sont $s = 0$ et $s = 1$ et l'équation fonctionnelle échange s et $1-s$. La conjecture de Beilinson et Deligne en $s=1$ s'énonce :

Conjecture 2.1. —
$\mathrm{ord}_{s=1}\,\mathrm{L}(A_\pi,s)=h^1_{\mathrm{f}}(F,\mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,\ell})\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell)-h^0_{\mathrm{f}}(F,\mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,\ell})\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell)$.

Par une formule de Shimura, $\mathrm{L}(A_\pi,1)$ est proportionnel à la norme, pour le produit scalaire de Peterson, de la forme automorphe nouvelle associée à π et est donc non-nul. Puisque $\rho_{\pi,\ell}$ est irréductible, le lemme de Schur implique que $h^0_{\mathrm{f}}(F,\mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,\ell})\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell)=0$. La conjecture de Beilinson et Deligne équivaut donc à $h^1_{\mathrm{f}}(F,\mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,\ell})\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell)=0$.
Concernant la valeur de $\mathrm{L}(A_\pi,1)$ nous disposons de la conjecture de Deligne [**De**] qui la prédit à un nombre algébrique non-nul près, et de la conjecture de Bloch et Kato [**BK**] sur les nombres de Tamagawa qui la prédit à une unité ℓ-adique près, pour tout ℓ, en fonction de certains invariants arithmétiques liés au motif A_π, dont le plus intéressant et mystérieux en même temps est le groupe de Tate-Shafarevich $\mathrm{H}^1_{\mathrm{f}}(F,\mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,\ell})\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ (voir aussi [**DFG**, §2.4]).

3. Normalisations de la correspondance de Langlands.

Dans cette partie nous allons préciser nos conventions concernant la normalisations de la correspondance de Langlands pour $\mathrm{GL}_2(F)$.
Pour toute place finie v de F l'on choisit une uniformisante ϖ_v de F_v.
Nous normalisons d'abord l'isomorphisme de corps de classes local, de façon que ϖ_v soit envoyée sur un Frobenius géométrique. Ainsi la valeur absolue correspond-elle au caractère cyclotomique ℓ-adique. Dans la suite, nous identifions les caractères de $F_v^\times$ avec ceux du groupe de Weil de F_v.
Ensuite nous normalisons la correspondance de Langlands pour $\mathrm{GL}_2(F_v)$ de manière à ce que π_v corresponde à ρ_v, si, et seulement si, pour tout caractère φ_v l'on a
(2)
$$\mathrm{L}(\pi_v\otimes\varphi_v\circ\det,s)=\mathrm{L}(\rho_v\otimes\varphi_v,s+\frac{1}{2})\text{ et }\epsilon(\pi_v\otimes\varphi_v\circ\det,s)=\epsilon(\rho_v\otimes\varphi_v,s+\frac{1}{2}).$$
Ainsi normalisée, la correspondance de Langlands locale envoie une représentation sphérique π_v de paramètres de Satake α_v et β_v sur l'unique représentation non-ramifiée ρ_v telle que le Frobenius (géométrique) admet comme polynôme caractéristique $X^2-\mathrm{N}(v)^{\frac{1}{2}}(\alpha_v+\beta_v)X+\mathrm{N}(v)\alpha_v\beta_v$, qui n'est autre que le polynôme $X^2-T_vX+\mathrm{N}(v)S_v$ évalué sur un vecteur non-nul de la

droite $\pi_v^{\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v)}$. Nous rappelons que $T_v = \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_v\end{smallmatrix}\right)\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v)$ et $S_v = \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v)\left(\begin{smallmatrix}\varpi_v & 0\\ 0 & \varpi_v\end{smallmatrix}\right)\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v)$ désignent les opérateurs de Hecke standards et l'action est à gauche par translation à droite ($KxK = \coprod_i x_iK$ envoie $f \in \pi^K$ sur $\sum_i f(\cdot x_i) \in \pi^K$).

De manière équivalente, l'on peut dire qu'étant donné deux caractères χ_1 et χ_2 de $F_v^\times$ l'induite unitaire :

$$\mathrm{Ind}_{B(F_v)}^{GL_2(F_v)}\left(\begin{pmatrix}a & *\\ 0 & d\end{pmatrix} \mapsto \chi_1(a)\chi_2(d)\right) \tag{3}$$

correspond à la représentation galoisienne $\chi_1 \oplus \chi_2$.

Définition 3.1. — Un poids $(k, w_0) \in \mathbb{Z}[J_F] \times \mathbb{Z}$ est dit arithmétique (resp. cohomologique), si pour tout $\tau \in J_F$, on a $k_\tau \equiv w_0 \pmod 2$ et $k_\tau \geq 1$ (resp. $k_\tau \geq 2$).

Nous fixons un tel poids (k, w_0) et posons $\pi_\infty = \otimes_\tau \pi_\tau$, où π_τ est l'induite (non-unitaire) suivante :

$$\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{R})}^{GL_2(\mathbb{R})}\left(\begin{pmatrix}a & *\\ 0 & d\end{pmatrix} \mapsto \mathrm{sgn}(a)^{-w_0} a^{\frac{1}{2}(k_\tau - w_0)} d^{-\frac{1}{2}(k_\tau + w_0)}\right) \tag{4}$$

Un tel π_τ est dans la série discrète si $k_\tau \geq 2$ et uniquement dans sa limite sinon.

Nous considérerons uniquement des représentations automorphes cuspidales π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ dont la composante à l'infini π_∞ est comme ci-dessus. La partie finie $\pi^{(\infty)}$ d'une telle représentation automorphe π est définie sur un corps de nombres et pour chaque plongement $\iota_\ell : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ l'on sait lui associer une représentation ℓ-adique $\rho_{\pi,\ell} : \mathrm{G}_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Le caractère central de π correspond par la Théorie de corps de classes globale à $\det(\rho_{\pi,\ell})(1)$ (twist par le caractère cyclotomique). D'après les travaux de Langlands, Deligne et Carayol, la correspondance $\pi \mapsto \rho_{\pi,\ell}$ est compatible avec les correspondances de Langlands locales aux places v ne divisant pas ℓ. Aux places v divisant ℓ, lorsque l'on sait démontrer que $\rho_{\pi,\ell}$ est potentiellement semi-stable, l'on connaît aussi ses poids de Hodge-Tate qui sont les $\left(\frac{1}{2}(w_0 - k_\tau) + 1, \frac{1}{2}(w_0 + k_\tau)\right)_{\tau \in J_F}$.

Changer notre première convention (replacer les Frobenius géométriques par des Frobenius arithmétiques) revient à replacer $\rho_{\pi,\ell}$ par sa contragrédiente $\rho_{\pi,\ell}^\vee$. La convention arithmétique est parfois appelée homologique, car pour une forme modulaire elliptique elle donne l'action galoisienne sur son module de Tate. Nous préférons cependant la normalisation géométrique (ou cohomologique) car nos constructions sont cohomologiques et il est aussi plus agréable d'avoir des poids de Hodge-Tate positifs.

Changer la deuxième convention revient à replacer π par sa contragrédiente $\pi^\vee$. Ceci a pour effet de changer le type à l'infini en $(k, -w_0)$, ainsi que de faire agir les opérateurs de Hecke à droite, en translatant à droite par l'inverse ($KxK = \coprod_i Kx_i$ envoie $f \in \pi^K$ sur $\sum_i f(\cdot x_i^{-1}) \in \pi^K$). Le problème alors est que le caractère central de $\pi^\vee$ ne correspond plus (par la théorie de corps de classes normalisée arithmétiquement) au déterminant de $\rho^\vee_{\pi,\ell}(-1)$, mais à son inverse.
Résumons les différents choix naturels pour la normalisation que nous avons rencontrés, en citant des références où ils sont utilisés :

- $\pi^\vee \mapsto \rho^\vee_{\pi,\ell}$ (action de Hecke à droite et Frobenius arithmétique) est celui choisi classiquement (voir, par exemple [**T**]) ;
- $\pi \mapsto \rho^\vee_{\pi,\ell}$ (action de Hecke à gauche et Frobenius arithmétique) est celui de Carayol [**C**] ;
- $\pi^\vee \mapsto \rho_{\pi,\ell}$ (action de Hecke à droite et Frobenius géométrique) est le choix retenu dans [**D1**] ;
- $\pi \mapsto \rho_{\pi,\ell}$ (action de Hecke à gauche et Frobenius géométrique) est le choix fait dans [**F**] et [**D2**]. C'est également notre choix pour les présentes notes.

Il existe d'autres normalisations obtenues en tordant l'une des quatre normalisations ci-dessus par une puissance demi-entière de la norme. La normalisation unitaire en fait partie, mais a le désavantage d'ajouter au corps de nombres de coefficients les racines carrées des $\mathrm{N}(v)$ pour presque tout premier v de F, ce qui donne une extension *infinie* de $\mathbb{Q}$.

4. Résultats sur la cohomologie des variétés modulaires de Hilbert.

Soit K un sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{GL}_2(F \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$. Les points complexes de la variété modulaire de Hilbert analytique Y_K sont donnés par le double quotient :

$$\mathrm{GL}_2(F) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K \cdot \mathrm{SO}_2(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times.$$

C'est une variété quasi-projective de dimension d, lisse si K est suffisamment petit. On peut compactifier Y_K en y ajoutant un nombre fini de points fermés, les pointes. Cependant cette compactification n'est jamais lisse si $d > 1$, à cause des unités de F. Y_K admet des compactifications toroïdales lisses à l'infini, c'est-à-dire lisses lorsque Y_K est lisse, dépendant de certaines décompositions de $(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times_+$ en cônes polyédraux rationnels.

Lemme 4.1. — *Supposons que Y_K est lisse. Alors pour tout sous-groupe distingué K' de K d'indice fini, le morphisme naturel $Y_{K'} \to Y_K$ est fini étale de groupe $K/K'(K \cap F^\times)$.*

Démonstration. — Par le théorème d'approximation forte pour SL_2, Y_K est une union finie de composantes connexes de la forme

$$\Gamma_x \backslash \mathrm{GL}_2(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})/\mathrm{O}_2(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times.$$

où $\Gamma_x = \mathrm{GL}_2(F) \cap xKx^{-1}\mathrm{SO}_2(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times$ et où $\det x$ décrit un ensemble de représentants du groupe de classes de rayon strict $\mathrm{Cl}^+_{\det K} := \mathbb{A}_F^\times/F^\times \det(K)(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times_+$. Notons que $\mathrm{GL}_2(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})/\mathrm{O}_2(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times$ n'est autre que le produit de d copies du demi-plan de Poincaré $\mathfrak{H}$. D'après notre hypothèse sur K, le groupe $\overline{\Gamma_x} := \Gamma_x/(\Gamma_x \cap F^\times)$, qui est le groupe fondamental de $\Gamma_x \backslash \mathfrak{H}^d$, n'a pas de torsion. Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathrm{GL}_2(F \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$ le morphisme $\Gamma'_x \backslash \mathfrak{H}^d \to \Gamma_x \backslash \mathfrak{H}^d$ est étale de groupe $\overline{\Gamma_x}/\overline{\Gamma'_x}$. Le lemme est une conséquence de la suite exacte de groupes suivante

$$1 \to \overline{\Gamma'_x}/\overline{\Gamma_x} \xrightarrow{x^{-1} \cdot x} K/K'(K \cap F^\times) \xrightarrow{\det} \mathrm{Cl}^+_{\det K'} \longrightarrow \mathrm{Cl}^+_{\det K} \to 1. \tag{5}$$

Pour voir que la suite est exacte en $K/K'(K \cap F^\times)$ il s'agit de montrer que

$$\{y \in K | \det y \in F^\times \det(K')(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times_+\} = K' \cdot (K \cap \mathrm{GL}_2(F)\mathrm{SO}_2(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times),$$

ce qui découle encore du théorème d'approximation forte pour SL_2. □

Il est important d'observer qu'alors que le groupe K/K' agit naturellement sur $Y_{K'}$, seul $K/K'(K \cap F^\times)$ agit fidèlement. C'est l'un des endroit où apparaît clairement la différence entre action locale et action globale (si F n'est pas $\mathbb{Q}$). Nous allons voir plus tard la contrepartie galoisienne de ce phénomène.
Dans la suite nous supposons que :

Hypothèse 0. — *K se décompose en produit $\prod_v K_v$ sur les places finies de v, $K_\ell = \prod_{v|\ell} K_v$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_\ell)$ et Y_K est lisse.*

Dans la suite $\mathcal{O}$ désigne l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$ contenant la clôture galoisienne de F, et ϖ désigne une uniformisante de $\mathcal{O}$.
Fixons un poids cohomologique (k, w_0). Soit $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ le système local sur Y_K correspondant à la représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})^{J_F}$ suivante

$$\bigotimes_{\tau \in J_F} \left(\mathrm{sym}^{k_\tau - 2} \otimes \det^{\frac{1}{2}(w_0 - k_\tau)+1}\right)(\mathcal{O}^2).$$

Il est sous-entendu que K agit par sa ℓ-composante K_ℓ que l'on identifie d'abord avec un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O})$ en utilisant l'hypothèse 0, puis avec un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})^{J_F}$ via $\iota_\ell : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

L'objet principal de notre étude sont les groupes de cohomologie singulière $\mathrm{H}^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{O}))$. Nos résultats concernent cependant uniquement certaines composantes découpées à l'aide de l'algèbre de Hecke que nous allons définir maintenant.

En toute place v telle que $K_v \cong \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v)$ l'on considère le morphisme $S_v : Y_K \to Y_K$ venant de l'action de $\left(\begin{smallmatrix}\varpi_v & 0\\ 0 & \varpi_v\end{smallmatrix}\right)$, ainsi que la correspondance T_v sur Y_K provenant des morphismes $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : Y_{K\cap K_0(v)} \to Y_K$ définis respectivement à l'aide des deux inclusions

$$K_0(v) \subset \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v) \text{ et } K_0(v) \subset \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_v\end{smallmatrix}\right) \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v) \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_v\end{smallmatrix}\right)^{-1}.$$

Les correspondances T_v et S_v agissent naturellement sur $\mathrm{H}^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{O}))$ ainsi que sur la cohomologie à support compact $\mathrm{H}^\bullet_c(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{O}))$.

Soit une représentation continue $\rho : \mathrm{G}_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$. On choisit $\mathcal{O}$ assez grand pour que ρ soit à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/\varpi)$.

Considérons l'idéal maximal

$$\mathfrak{m}_\rho = (\varpi, T_v - \mathrm{tr}(\rho(\mathrm{Frob}_v)), S_v - \det(\rho(\mathrm{Frob}_v))\,\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(v)^{-1}),$$

de l'algèbre de Hecke abstraite $\mathbb{T}^S = \mathcal{O}[T_v, S_v |\ v \notin S]$, où S est un ensemble fini assez grand de premiers contenant en particulier tous les premiers de ramification de ρ, ainsi que ceux divisant ℓ et ceux où K n'est pas maximal.

Considérons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1. — *Le premier ℓ est non-ramifié dans F et il existe une représentation automorphe π de conducteur premier à ℓ et de poids (k, w_0), avec $\ell > \sum_\tau \frac{k_\tau + w_0}{2}$, telle que la réduction modulo ℓ de $\rho_{\pi,\ell}$ soit isomorphe à ρ.*

Hypothèse 2. — *L'image de $\mathrm{G}_{\widetilde{F}}$ par l'induite tensorielle $\otimes\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\rho$ est irréductible d'ordre multiple de ℓ.*

Théorème 4.2. — [**D1**, **D2**] *Sous les hypothèses 0, 1 et 2 énoncées précédemment :*

(i) $\mathrm{H}^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}_\rho} = \mathrm{H}^d(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}_\rho} = \mathrm{H}^d_c(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}_\rho}$ *est libre de rang fini sur $\mathcal{O}$;*

(ii) *si le morphisme $Y_{K'} \to Y_K$ est étale de groupe un ℓ-groupe abélien Δ, alors $\mathrm{H}^d(Y_{K'}, \mathcal{L}(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}_\rho}$ est libre sur $\mathcal{O}[\Delta]$ et le $\mathbb{T}^S$-module de ses coinvariants $\mathrm{H}^d(Y_{K'}, \mathcal{L}(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}_\rho} \otimes_{\mathcal{O}[\Delta]} \mathcal{O}$ est isomorphe à $\mathrm{H}^d(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}_\rho}$;*

(iii) *si* $K_v \cong \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v)$, *alors le morphisme*

$$\mathrm{pr}_1^* + \mathrm{pr}_2^* : \mathrm{H}^d(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}_\rho}^{\oplus 2} \to \mathrm{H}^d(Y_{K\cap K_0(v)}, \mathcal{L}(\mathcal{O}))_{\mathfrak{m}_\rho}$$

est injectif de conoyau libre sur $\mathcal{O}$, *où* $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : Y_{K\cap K_0(v)} \to Y_K$ *sont les projections définissant la correspondance* T_v.

Démonstration. — Le (ii) est démontré dans [**D2**, Proposition 2.4]. Le (iii) généralise un théorème classique de Ribet portant le nom de lemme d'Ihara (voir [**D2**, Théorème 3.1]).

Le (i) est démontré dans [**D1**] en niveau K_1 et dans [**D2**, Théorème 2.3] pour des K plus généraux, satisfaisant néanmoins l'hypothèse 0. Voici les grandes lignes de la démonstration qui suit la méthode développée par Mokrane, Polo et Tilouine. On traduit d'abord l'énoncé en cohomologie étale ℓ-adique. Le modèle canonique de Y_K est défini sur une extension finie abélienne totalement réelle H de $\mathbb{Q}$ non-ramifiée en ℓ. Explicitement, H correspond par la théorie globale de corps de classes au groupe d'idèles

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times / \mathbb{Q}^\times (\det(K) \cap \widehat{\mathbb{Z}}^\times)\, \mathbb{R}^\times . \tag{6}$$

Par le lemme de Nakayama, l'on se ramène à l'étude de la cohomologie à coefficients de torsion. D'après un résultat de Wedhorn [**We**] généralisant les relations classiques d'Eichler-Shimura, le $(\mathcal{O}/\varpi)[\mathrm{G}_H]$-module de cohomologie étale $\mathrm{H}^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{O}/\varpi))_{\mathfrak{m}_\rho}$ est annulé par le polynôme caractéristique de $\otimes \mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \rho$. Le lemme clé [**D1**, Lemme 6.5] dit alors que, sous l'hypothèse 2, les facteurs de Jordan-Hölder de ce module sont tous isomorphes à la restriction de $\otimes \mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \rho$ à G_H. La partie finale de l'argument consiste à étudier l'action du sous-groupe d'inertie en ℓ. Sous l'hypothèse 1, la théorie de Fontaine-Laffaille donne les poids de $\otimes \mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}} \rho$ pour l'inertie modérée. A ce stade nous avons besoin d'un modèle de Y_K sur une extension non-ramifiée de $\mathbb{Z}_\ell$ (rappelons que H est non-ramifié en ℓ), ainsi que de compactifications toroïdales lisses. Le théorème de comparaison de Faltings entre cohomologie étale et cristalline donne alors les poids de la cohomologie étale $\mathrm{H}^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{O}/\varpi))_{\mathfrak{m}_\rho}$ en termes des sauts de la filtration de Hodge sur la cohomologie de De Rham logarithmique de $Y_K/\mathbb{Z}_\ell^{n.r.}$. Ces derniers sont calculés grâce à une version $\mathcal{O}$-entière du complexe de Bernstein-Gelfand-Gelfand pour des algèbres de distributions. Nous référons à [**D1**] pour plus de détails concernant la démonstration. □

Ce théorème nous permet d'effectuer des constructions arithmétiques sophistiquées à l'aide de variétés modulaires de Hilbert, dont nous allons voir quelques exemples.

5. Variétés modulaires de Hilbert associés à ρ et opérateurs de Hecke.

La différence entre le local est le global évoquée du côté automorphe, subsiste du côté galoisien. En effet, étant donné des caractères d'ordre fini φ_v de $\mathfrak{o}_v^\times$, v décrivant un ensemble fini de premiers de F, il n'existe pas forcèment un caractère de Hecke φ de F recollant les φ_v. Par conséquent, ρ ne possède pas forcèment une tordue de conducteur minimal, alors que c'est bien sûr le cas localement. Ceci explique la nécessité des constructions sophistiquées décrites dans la suite.

Fixons un caractère $\phi : \mathrm{G}_F \to \mathcal{O}^\times$ de conducteur premier à ℓ et d'ordre une puissance de ℓ. Soit $\psi : \mathrm{G}_F \to \mathcal{O}^\times$ l'unique caractère tel que $\psi\phi^{-2}$ soit le relèvement de Teichmüller de $(\det\rho)(k_0 - 1)$.

Pour toute place finie v de F ne divisant pas ℓ l'on choisit un caractère ν_v : $\mathrm{G}_{F_v} \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ tel que la valuation c_v du conducteur de $\nu_v^{-1} \otimes \rho_{|\,\mathrm{G}_{F_v}}$ soit aussi petite que possible. On note alors $d_v \in \{0,1,2\}$ la dimension du sous-espace de $\nu_v^{-1} \otimes \rho_{|\,\mathrm{G}_{F_v}}$ invariant par l'inertie. Si v divise ℓ, posons $c_v = d_v = 0$. Soit $\widetilde{\nu}_v$ le relèvement de Teichmüller de ν_v. On pose

$$K_v' = \ker(K_1(v^{c_v}) \xrightarrow{\det} \mathfrak{o}_v^\times \xrightarrow{\widetilde{\nu}_v\phi} \mathcal{O}^\times) \text{ , et}$$
$$(7) \qquad K_v'' = \ker(K_1(v^{c_v}) \cap K_0(v^{c_v+d_v}) \xrightarrow{\det} \mathfrak{o}_v^\times \xrightarrow{\widetilde{\nu}_v\phi} \mathcal{O}^\times).$$

Soit Σ un ensemble fini de premiers de F ne divisant pas ℓ (contenant un certain ensemble P_ρ de premiers de ramification de ρ ; voir [**D2**, Définition 4.2]). Posons

$$(8) \qquad K_\Sigma = K_0(\mathfrak{u}) \prod_{v\in\Sigma} K_v'' \prod_{v\notin\Sigma\cup\{\mathfrak{u}\}} K_v',$$

où $\mathfrak{u}$ est un premier auxiliaire choisi comme dans [**D2**, §4.3] afin que K_Σ satisfasse l'hypothèse 0. Fixons une valeur propre $\alpha_\mathfrak{u}$ de $\rho(\mathrm{Frob}_\mathfrak{u})$.

Le $\mathbb{T}^S$-module $\mathrm{H}^d(Y_\Sigma, \mathcal{L}(\mathcal{O}))$ admet aussi une action des opérateurs de Hecke $U_v = \left[K_\Sigma \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \varpi_v\end{smallmatrix}\right) K_\Sigma\right]$, pour $v \in \Sigma \cup \{\mathfrak{u}\}$, et des $\left[K_\Sigma \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \delta\end{smallmatrix}\right) K_\Sigma\right]$, pour $\delta \in (\mathfrak{o} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^\times$.

Soit $\mathbb{T}_\Sigma$ l'image de $\mathbb{T}^S$ dans l'algèbre d'endomorphismes $\mathcal{O}$-linéaires du module :

$$(9) \qquad \mathcal{M}_\Sigma := \mathrm{H}^d(Y_\Sigma, \mathcal{L}(\mathcal{O}))[\psi, \widetilde{\nu}\phi]_{(\mathfrak{m}_\rho, U_\mathfrak{u} - \alpha_\mathfrak{u}, U_v; v\in\Sigma)},$$

où $[\psi]$ désigne la partie ψ-isotypique pour l'action des opérateurs de Hecke S_v, $v \notin S$, et $[\widetilde{\nu}\phi]$ désigne la partie $\widetilde{\nu}\phi$-isotypique pour l'action du groupe $(\mathfrak{o} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^\times$.

Finalement, notons $\mathcal{R}_\Sigma$ la $\mathcal{O}$-algèbre universelle de déformations de ρ qui sont minimalement ramifiées en dehors de Σ, cristallines de bas poids en toutes les places divisant ℓ et de déterminant $\psi(1-k_0)$ (voir [M]). A l'aide de la correspondance locale de Langlands pour GL_2 (voir [C]), l'on peut démontrer que si π est une représentation automorphe qui contribue à $\mathcal{M}_\Sigma$, alors $\rho_{\pi,\ell}$ définit un homomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres locales $\mathcal{R}_\Sigma \to \mathcal{O}$.
La méthode de Wiles [W] et Taylor-Wiles [TW], améliorée par Diamond et Fujiwara [F], donne :

Théorème 5.1. — [D2, Théorème 6.6] *Sous les hypothèses 1 et 2 énoncées précédemment, il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{R}_\Sigma \to \mathcal{T}_\Sigma$ de $\mathcal{O}$-algèbres qui sont des intersections complètes sur $\mathcal{O}$. De plus $\mathcal{M}_\Sigma$ est libre de rang 2^d sur $\mathcal{T}_\Sigma$ et pour toute représentation automorphe π comme dans l'hypothèse 2, le groupe $\mathrm{H}^1_\Sigma(F, \mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,\ell}) \otimes \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell)$ est fini.*

On obtient immédiatement un résultat de relèvement modulaire, lié à la problématique introduite dans §1, ainsi qu'une application à la conjecture 2.1.

Corollaire 5.2. — *Soit une représentation continue $\rho : \mathrm{G}_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ vérifiant les hypothèses 1 et 2. Alors tout relèvement cristallin de ρ de poids appartenant à un intervalle de longueur $\leq \ell-2$, qui est non-ramifié en dehors d'un ensemble fini de premiers, provient d'une représentation automorphe.*

Corollaire 5.3. — *Sous les hypothèses 1 et 2 la conjecture de Beilinson et Deligne est vraie pour $A_\pi(1)$: $H^1_{\mathrm{f}}(F, \mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,\ell})) = 0$.*

6. Σ-périodes et fonction L-adjointe.

Nous allons conclure ses notes en donnant une application à la conjecture de Bloch et Kato.
Soit Σ un ensemble fini de premiers de F ne divisant pas ℓ contenant les premiers de mauvaise réduction de A_π.
Pour tout $J \subset J_F$ l'on note ϵ_J le caractère correspondant du groupe de Weyl

$$\mathrm{O}_2(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) \cong \{\pm 1\}^{J_F}.$$

Les éléments du groupe de Weyl agissent naturellement sur $\mathrm{H}^d(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{O}))$ et le décomposent lorsque ℓ est impair en somme directe de composantes ϵ_J-isotypique.

L'isomorphisme de Matsushima-Shimura-Harder identifie $(\mathcal{M}_\Sigma \otimes_\mathcal{O} \mathbb{C})[\pi^{(\infty)}, \epsilon_J]$ avec l'espace de formes automorphes suivant :

$$\pi_{\mathfrak{u}}{}^{K_0(\mathfrak{u})}_{[U_\mathfrak{u}\equiv\alpha_\mathfrak{u}]} \bigotimes_{v\notin\Sigma\cup\{\mathfrak{u}\}} \left(\pi_v \otimes (\widetilde{\nu}_v\phi_v)^{-1}\right)^{K'_v} \bigotimes_{v\in\Sigma} \left(\pi_v \otimes (\widetilde{\nu}_v\phi_v)^{-1}\right)^{K''_v}_{[U_v=0]} \tag{10}$$

qui se trouve être une droite ! Cette droite est toute aussi intéressante que la droite nouvelle. Soit f_Σ une base de cette droite, normalisée à l'aide de son développement de Fourier. Rappelons que sous les hypothèses 1 et 2, le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{M}_\Sigma$ est libre.

Définition 6.1. — On définit la période $\Omega^J_{\pi,\Sigma} \in \mathbb{C}^\times/\mathcal{O}^\times$ comme la coordonnée de f_Σ dans une $\mathcal{O}$-base de $\mathcal{M}_\Sigma[\pi_\mathrm{f}, \epsilon_J]$ via $\iota_\ell : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Notre résultat principal, généralisant en partie le résultat de Diamond, Flach et Guo [**DFG**] pour $F = \mathbb{Q}$, s'énonce :

Théorème 6.2. — [**D1**, Théorème B] *Sous les hypothèses 1 et 2, pour tout $J \subset J_F$ et pour tout plongement $\iota_\ell : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ l'on a*

$$\iota_\ell\left(\frac{\Gamma(A_\pi,1)\,\mathrm{L}(A_\pi,1)}{\Omega^J_{\pi,\Sigma}\Omega^{J_F\setminus J}_{\pi,\Sigma}}\right)\mathcal{O} = \mathrm{Tam}(\mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,\ell}))\,\mathrm{Fitt}_\mathcal{O}\left(\mathrm{H}^1_\mathrm{f}(F, \mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,\ell}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)\right),$$

où $\mathrm{Tam}(\mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,\ell})) \subset \mathcal{O}$ désigne l'idéal de Tamagawa au sens de Fontaine et Perrin-Riou [**FP-R**].

Un corollaire immédiat est l'invariance de la valuation ℓ-adique de la période $\Omega^J_{\pi,\Sigma}\Omega^{J_F\setminus J}_{\pi,\Sigma}$ lorsque l'on change J ou Σ, ou lorsque l'on tord π par un caractère de Hecke d'ordre fini et de conducteur premier à ℓ.

Références

[BK] S. Bloch and K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, in The Grothendieck Festschrift, Vol. I, vol. 86 of Progr. Math., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 333–400.

[BR] D. Blasius and J. Rogawski, *Motives for Hilbert Modular Forms*, Invent. Math., 114 (1993), pp. 55–87.

[C] H. Carayol, *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Scient. éc. Norm. Sup., 19 (1986).

[DFG] F. Diamond, M. Flach, and L.Guo, *The Tamagawa number conjecture of adjoint motives of modular forms*, Ann. Scient. éc. Norm. Sup., 37 (2004), pp. 663–727.

[De] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, in Automorphic forms, representations and L-functions, Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 313–346.

[D1] M. Dimitrov, *Galois representations modulo p and cohomology of Hilbert modular varieties*, Ann. Sci. école Norm. Sup., 38, Issue 4 (2005), pp. 505–551.

[D2] ———, *On Ihara's lemma for Hilbert Modular Varieties*, to appear.

[FM] J.-M. Fontaine and B. Mazur, *Geometric Galois representations*, in Elliptic Curves, Modular Forms & Fermat's Last Theorem (Hong Kong, 1993), J. Coates and S.-T. Yau, eds., Internat. Press, 1997, pp. 190–227.

[FP-R] J.-M. Fontaine and B. Perrin-Riou, *Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L*, in Motives (Seattle, WA, 1991), vol. 55 of Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 599–706.

[F] K. Fujiwara, *Deformation rings and Hecke algebras in the totally real case*, arXiv:math.NT/0602606.

[K] M. Kisin, *The Fontaine-Mazur conjecture for* GL_2, preprint.

[M] B. Mazur, *An introduction to the deformation theory of Galois representations*, in Modular Forms and Fermat's Last Theorem, G. Cornell, J. Silverman, and G. Stevens, eds., Springer-Verlag, 1997, pp. 243–311.

[T] R. Taylor, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Invent. Math., 98 (1989), pp. 265–280.

[TW] R. Taylor and A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math., 141 (1995), pp. 553–572.

[We] T. Wedhorn, *Congruence relations on some Shimura varieties*, J. Reine Angew. Math., 524 (2000), pp. 43–71.

[W] A. Wiles, *Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. of Math., 141 (1995), pp. 443–551.

14 décembre 2008

Mladen Dimitrov, UFR de Mathématiques, Case 7012, Université Paris Diderot, 2 place Jussieu, 75251 PARIS cedex 05 • *E-mail :* `dimitrov@math.jussieu.fr`
Url : `http://www.math.jussieu.fr/~dimitrov/`