SYSTÈMES D'EULER POUR LES TOURS DE COURBES DE SHIMURA

par

Olivier Fouquet

Résumé. — Soit F un corps de nombres totalement réel. Nous construisons dans ce qui suit une famille analytique $\mathcal{T}$ de représentations p-adiques ordinaires du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ à partir de la cohomologie étale de tours de courbes de Shimura quaternioniques. Nous construisons ensuite un système de classes de cohomologie équivariantes sous l'action de l'algèbre de Hecke et des groupes de Galois d'extensions diédrales de F bien choisies. Ce système induit un système d'Euler pour $\mathcal{T}$ et toutes ses spécialisations, donc en particulier pour les représentations p-adiques associées aux formes automorphes quaternioniques de poids supérieurs à 2.

Abstract. — Let F be a totally real field. From the étale cohomology of towers of Shimura curves, we manufacture an analytic family $\mathcal{T}$ of ordinary p-adic representation of the Galois group $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. We then construct a system of cohomology classes equivariant under the action of the Hecke algebra and of the Galois groups of well-chosen diedral extensions of F. This system induces an Euler system for $\mathcal{T}$ and all its specializations, and in particular for the Galois representations attached to quaternionic automorphic forms of weight greater than 2.

1. Introduction

1.1. Motivation. — Soit X un schéma projectif lisse sur un corps de nombres K. À X et un entier n est conjecturalement associé un motif $M = h^i(X)(n)$ qui interviendra ici par ses réalisations cohomologiques étale, de Betti et de de Rham ainsi que par les structures supplémentaires et isomorphismes de comparaisons afférents. Soit p un nombre premier. La réalisation étale M_p de M est une représentation du groupe de Galois absolu G_K de

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11R23,14G35,11F80,11F33.
Mots clefs. — Systémes d'Euler. Courbes de Shimura. Théorie de Hida.

K. Fixons un plongement de K dans $\mathbb{C}$ et un ensemble S fini de places finies contenant toutes les places de K au-dessus de p et toutes les places de mauvaise réduction de M. La fonction L complexe partielle de M_p est alors définie par le produit infini :

$$L(M_p, K, S, s) = \prod_{l \notin S} \det_{K_p}(1 - \mathrm{Fr}(l)X|M_p^{I_l})$$

En $l \notin S$, le schéma X a bonne réduction donc le facteur $\det_{K_p}(1-\mathrm{Fr}(l)X|M_p^{I_p})$ appartient à $K[X]$. Soit $L^*(M_p, K, S)$ le terme principal du développement de Taylor de $L(M_p, K, S)$ en 0.

La reformulation de [**Kat93a**] et [**FPR94**] des conjectures de Bloch-Kato sur les valeurs spéciales des fonctions L prédit l'existence d'une droite fondamentale $\Delta(M)$ définie à partir de la cohomologie motivique de M et de son espace tangent. Par construction, la droite fondamentale $\Delta(M) \otimes_K \mathbb{C}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{C}$. En particulier, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\Delta(M) \otimes_K \mathbb{C}$ contient $L^*(M_p, K, S)$. C'est une conjecture profonde de [**Del79**] et [**Beĭ84**] que la pré-image des valeurs spéciales dans $\Delta(M) \otimes_K \mathbb{C}$ provient en fait d'un élément $\zeta_M(K, S)$ de $\Delta(M)$. Les conjectures de Bloch-Kato prédisent alors que l'image de $\zeta_M(K, S)$ dans $\Delta(M) \otimes_K K_p$ engendre une structure entière dans un certain complexe de cohomologie à support compact.

Supposons maintenant que M soit muni d'une action supplémentaire d'une $\mathbb{Q}$-algèbre semi-simple commutative A, ou encore que M est à coefficients dans A. La philosophie des conjectures équivariantes sur les nombres de Tamagawa prédit que la construction précédente de $\zeta_M(K, S)$ est équivariante, ce qui signifie en particulier que les $\zeta_M(K, S)$ vérifient des relations de systèmes d'Euler. Supposons par ailleurs que la représentation résiduelle de M_p est absolument irréductible. La théorie de la déformation de [**Maz89**] implique alors que M_p est une spécialisation d'une représentation galoisienne universelle M^{univ} à coefficients dans un anneau universel de déformation R^{univ}. Si l'on se restreint aux déformation vérifiant certaines conditions, il est souvent possible d'identifier l'anneau R^{univ} avec un anneau T dont A est une spécialisation. Dans ce cas, le système des $\{\zeta_{M_n}(K, S)\}$ pour M_n dans un sous-ensemble bien choisi de déformations de M donne naissance à un système équivariant pour la déformation universelle M^{univ}.

Conjecturalement, il est donc possible sous certaines hypothèses d'associer à une représentation galoisienne géométrique M des systèmes d'éléments spéciaux équivariants reliés aux valeurs spéciales des fonctions L et qui s'étendent en un système spécial équivariant pour certaines déformations universelles de M.

1.2. Exemples fondamentaux. — Les conjectures évoquées ci-dessus acquièrent un sens très concret dans les exemples classiques suivants.

1.2.1. Théorie d'Iwasawa classique. — Soit M le motif $\mathbb{Q}(1)$ et p un nombre premier impair. Pour L un extension abélienne de $\mathbb{Q}$, soit $X_L = \mathbb{Q}(1) \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Q}} \operatorname{Spec} L$ et M_L le motif associé. Le motif M_L est muni d'une action de $\mathbb{Q}[\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})]$. La réalisation étale de M_L en p est la représentation

$$\varprojlim_n \mu_{p^n}(\bar{L}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

qui est de dimension 1, donc absolument irréductible, et admet la structure entière

$$T_L = \varprojlim_n \mu_{p^n}(\bar{L})$$

Supposons L totalement réelle et non-ramifiée en dehors de S. Il est montré dans [**Kat93a, Kat93b**] 5.14 et 3.3.5 respectivement (voir aussi [**BG03**] 5.1 et [**Fla04**] théorème 5.9) que l'image de $\zeta(L,S)$ dans $H^1_{et}(\operatorname{Spec}[\mathbb{Z},1/S],T_L)$ s'identifie avec l'image d'unités cyclotomiques bien choisies. Dans ce cas, la propriété d'équivariance des $\zeta(L,S)$ se traduit par le fait que les unités cyclotomiques forment un système d'Euler au sens de [**Rub00, Kat04**].
Soit $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$ et Λ l'anneau $\mathbb{Z}_p[[\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})]]$. La déformation universelle de T est le Λ-module $T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$. Il est connu que le système d'Euler des unités cyclotomiques s'étend en un système d'Euler pour $T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$.

1.2.2. Tours de courbes modulaires. — Soit M le motif d'une forme modulaire $f \in S_2(\Gamma_1(Np^{s_0}),\chi)$ propre, nouvelle et ordinaire en p. La réalisation étale de M_p peut s'écrire sous la forme

$$H^1_{et}(X_1(Np^{s_0}) \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}_p)_{\mathfrak{m}}$$

pour $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de l'algèbre de Hecke $\mathfrak{h}^{ord}(Np^{s_0})$. Supposons que la représentation résiduelle $\bar{\rho}_f$ est une représentation absolument irréductible de $\operatorname{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Pour s plus grand que s_0, soit M_s le motif modulaire dont la réalisation étale est

$$H^1_{et}(X_1(Np^{s}) \times_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}_p)_{\mathfrak{m}}$$

Les motifs M_s sont munis d'une action de la limite inverse $\mathfrak{h}^{ord}(Np^\infty)$ en s des algèbres de Hecke ordinaires. Les éléments $\zeta_s(\mathbb{Q},S)$ associés à M_s sont construits dans [**Kat04**] et vérifient la relation d'équivariance voulue sous l'action de $\mathfrak{h}^{ord}(Np^\infty)$: la projection de $\zeta_{s'}(\mathbb{Q},S)$ dans $\Delta(M_s)$ induite par la projection de $X_1(Np^{s'})$ sur $X_1(Np^s)$ est égale à $\zeta_s(\mathbb{Q},S)$. Éventuellement sous quelques hypothèses techniques de théorie de déformation, l'anneau de déformation universelle ordinaire de M_p s'identifie à $\mathfrak{h}^{ord}(Np^\infty)$, voir par exemple [**Wil95**] et [**SW01**], si bien que le système des $\zeta_s(\mathbb{Q},S)$ définit un système d'Euler pour la déformation universelle ordinaire de M_p.

1.3. Objectifs. — L'objectif de cet article est d'étudier le cas du motif d'une courbe de Shimura. Soit X un courbe de Shimura quaternionique sur un corps de nombre totalement réel F et M_p la réalisation étale du motif associé pour p un nombre premier impair. Nous construisons une déformation ordinaire de M à partir de tours de courbes au-dessus de X. Nous montrons ensuite que certains points CM bien choisis dans cette tour de courbes fournissent des classes de cohomologie vérifiant les propriétés d'équivariance souhaitées sous l'action de l'algèbre de Hecke et sous l'action de $\mathrm{Gal}(L/K)$ où K est une extension totalement complexe de F et L une extension abélienne de K diédrale sur F. En particulier, nous construisons ainsi un système d'Euler pour la déformation universelle ordinaire de M_p. En spécialisant ce système d'Euler, nous obtenons ainsi des systèmes d'Euler pour les représentations galoisiennes associées aux formes automorphes ordinaires de poids supèrieur à 2, ce qui réalise une généralisation commune du système d'Euler construit dans [**Nek04**] et des résultats de [**How07**].

2. Tours de courbes de Shimura

2.1. Notations. — Pour K un corps de nombres ou une extension finie de $\mathbb{Q}_l$, nous notons G_K le groupe de Galois absolu de K. Soit p un nombre premier impair et $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit F un corps de nombres totalement réel de degré d. Soit τ_1 l'une de ses places infinies. Soit S_B un ensemble fini de places non-archimédiennes de F tel que :

$$|S_B| \equiv d-1 \pmod 2$$

Soit $Ram(B) = \{\tau_j | j \neq 1\} \cup S_B$ et B l'unique algèbre de quaternions sur F dont l'ensemble de ramification est exactement $Ram(B)$. Soit $\mathbf{G}$ le groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ tel que $\mathbf{G}(\mathbb{Q}) = B^\times$ et soit Z son centre. Soit $\mathbb{A}_f$ l'anneau des adèles finies de $\mathbb{Q}$. Pour U un sous-groupe compact ouvert de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, soit $X(U)$ la courbe de Shimura telle que :

$$X(U)(\mathbb{C}) = \mathbf{G}(\mathbb{Q})\backslash(\mathbb{C} - \mathbb{R} \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/U)$$

Si F est égal à $\mathbb{Q}$ et B est $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, nous notons encore $X(U)$ la compactification lisse de $X(U)$, si bien que la courbe $X(U)$ est toujours supposée compacte.
Si U' et U sont des sous-groupes compacts ouverts de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ suffisamment petits et tels que $U' \subset U$, il existe une application plate finie naturelle :

$$X(U') \longrightarrow X(U)$$

En particulier, si $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, le sous-groupe $U \cap gUg^{-1}$ est inclus dans U donc il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} X(U \cap gUg^{-1}) \arrow[r, "{[\cdot g]}"] \arrow[d] & X(g^{-1}Ug \cap U) \arrow[d] \\ X(U) \arrow[r, dashed, "T(g)"] & X(U) \end{tikzcd}$$

définissant la correspondance de Hecke $T(g)$. Un élément a de $\mathbb{A}_f$ peut être considéré comme un élément de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ via l'isomorphisme

$$\mathbb{A}_f \xrightarrow{\sim} Z(\mathbf{G}(\mathbb{A}_f))$$

et définit donc une correspondance sur $X(U)$ notée $<a>$. Cette action se factorise à travers un groupe fini $G(U)$. Si $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ vérifie

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix}$$

en v et est égale à l'identité hors de v, nous notons $T(g) = T(v)$. L'algèbre de Hecke $\mathfrak{h}$ est la $\mathcal{O}$-algèbre engendrée par les $T(v)$ et les $<a>$.

2.2. Tours de courbes de Shimura. — Considérons maintenant une tour $\{U(s)\}_{s\geq 1}$ de sous-groupes compacts ouverts de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. Supposons que $U(s)_v$ soit indépendant de s en $v \nmid (p)$ et que $U(s)_v$ tende vers l'identité en $v|(p)$. Soit $X(s)$ la courbe $X(U(s))$ et $M(s)$ son premier groupe de cohomologie étale à coefficients dans $\mathcal{O}$. Soit

$$G = \varprojlim_s G_s = \varprojlim_s G(U(s))$$

Vu comme sous-algèbre de $\mathrm{End}(M(s))$, l'algèbre $\mathfrak{h}$ est une algèbre sur $\mathcal{O}[[G]]$. Si pour simplifier nous supposons que $U(s)_v$ est maximal en dehors de (p) et que

$$U(s)_v = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v}) | g \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod \varpi_v^s\}$$

en (p), nous voyons que G/G_{tors} est isomorphe à $\mathbb{Z}_p^{1+\delta}$ où δ est le défaut de la conjecture de Leopoldt. La dualité de Poincaré induit un accouplement sur $H^1_{et}(X(s) \times_F \bar{F}, \mathcal{O})$ pour chaque niveau s.

$$<\cdot,\cdot> : H^1_{et}(X(s) \times \bar{F}, \mathcal{O}) \times H^1_{et}(X(s) \times \bar{F}, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)$$

Cet accouplement n'est pas compatible avec l'action de l'algèbre de Hecke, ce qui est déjà apparent dans le cas classique des courbes modulaires $X_1(Np^s)$. Soit M un $\mathfrak{h}[G_F]$-module M dont l'action de $\sigma \in G_F$ sur $x \in M$ est notée σx. Le $\mathfrak{h}[G_F]$-module $M{<}n{>}$ est défini égal à M en tant que $\mathfrak{h}$-module et tel que $\sigma \in G_F$ agisse sur $x \in M{<}n{>}$ par $<\chi_{cyc}(\sigma)>\sigma x$. Soit $F[s]$ le corps des constantes de $X(s)$ défini dans [**Del71**]. Le schéma $X(s)\times_F F[s]$ est muni d'un $F[s]$-morphisme W_s généralisant l'involution de Fricke.

Lemme 2.1. — *Soit $M(s)$ le groupe de cohomologie $H^1_{et}(X(s)\times_F \bar{F},\mathcal{O})$. La dualité de Poincaré et l'involution de Fricke W_s définissent un accouplement :*

$$(\cdot,\cdot):\quad \begin{array}{ll} M(s)\times M(s) & \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \\ (x,y) & \longmapsto <x, W_s y> \end{array} \tag{1}$$

Cet accouplement induit un isomorphisme de $\mathfrak{h}[G_F]$-modules :

$$\alpha : M(s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M(s),\mathcal{O})(-1)<-1>$$

Soit e^{ord} le projecteur ordinaire de Hida. Par définition, l'opérateur de Hecke $T(p)$ est inversible sur l'image de e^{ord}. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de l'algèbre semi-locale $\mathfrak{h}^{ord}$.

$$M^{ord}_{\mathfrak{m}} = \varprojlim_s e^{ord}_{\mathfrak{m}} H^1_{et}(X(s)\times_F \bar{F},\mathcal{O})$$

Une partie de la subtilité de cette construction provient du sens exact à donner à la limite $\varprojlim_s$. En effet, l'application de transition naturelle

$$\begin{tikzcd} X(s+1) \arrow[d, "\pi"'] \\ X(s) \end{tikzcd}$$

induit

$$\pi_* : H^1_{et}(X(s+1)\times_F \bar{F},\mathcal{O}) \longrightarrow p^N\left(H^1_{et}(X(s)\times_F \bar{F},\mathcal{O})\right)$$

pour une certaine puissance p^N de p. La limite inverse pour π_* est donc nulle. La limite est donc prise relativement à

$$\begin{tikzcd} X(s+1) \arrow[r, "{[\cdot g]}"] \arrow[rr, bend right, "\pi_g"'] & X(s+1) \arrow[r, "\pi"] & X(s) \end{tikzcd}$$

pour

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{pmatrix}$$

en $v|p$. La projection sur la partie ordinaire assure que cette construction a bien un sens.

L'accouplement du lemme 2.1 est compatible avec la limite inverse en s et défini donc un accouplement sur $M^{ord}_{\mathfrak{m}}$ qui fait de ce dernier un $\mathcal{O}[[G/G_{\mathrm{tors}}]]$-module réflexif. Supposons que F vérifie la conjecture de Leopoldt en p. Dans ce cas :

$$G/G_{\mathrm{tors}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p$$

Le module $M_{\mathfrak{m}}^{ord}$ est donc réflexif de rang fini sur un anneau régulier de dimension 2. Il est donc libre.

Remarque :— Cet article ne traite pour des raisons de briéveté que du cas des structures de niveau $U(s)$ de type :

$$U(s)_v = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v}) | g \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod \varpi_v^s\}$$

Le cas d'une structure de niveau générale se réduisant à l'identité en v divisant p n'est pas significativement différent. Dans ce cas plus général, la liberté de $M_{\mathfrak{m}}^{ord}$ sur $\mathcal{O}[[G/G_{\mathrm{tors}}]]$ se démontre en invoquant un théorème de contrôle exact, voir [**Fou07a**] pour une démonstration.

2.3. Représentations galoisiennes associées à $M_{\mathfrak{m}}^{ord}$. — La théorie de Hida implique que la représentation galoisienne $M_{\mathfrak{m}}^{ord}$ interpole les représentations galoisiennes attachées à certaines formes modulaires de Hilbert propres ordinaires. Soit $\mathrm{Spec}^{arith}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{ord}) \subset \mathrm{Spec}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{ord})$ le sous-ensemble dense des points arithmétiques de $\mathrm{Spec}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{ord})$. Soit $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}^{arith}(\mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{ord})$ un point arithmétique et $f_{\mathcal{P}}$ la forme automorphe qui lui est associé. La représentation

$$(M_{\mathfrak{m}}^{ord})_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}(M_{\mathfrak{m}}^{ord})_{\mathcal{P}}$$

est isomorphe à la représentation galoisienne associée à une forme modulaire de Hilbert ordinaire propre, voir par exemple [**Hid88**] corollaire 3.5. Soit

$$\lambda : \mathfrak{h}^{ord} \longrightarrow \mathfrak{h}_{\mathfrak{m}}^{ord}$$

le morphisme canonique associé à $\mathfrak{m}$ et $M_{\mathfrak{m}}^{ord}(s) = e_{\mathfrak{m}}^{ord}\ M(s)$. Soit $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}}$ la G_F-représentation résiduelle associée à l'idéal $\mathfrak{m}$.

Proposition 2.2. — *Supposons que $\bar{\rho}_f$ est absolument irréductible. Supposons de plus l'une des deux conditions suivantes.*

1. *Il existe un niveau s tel que :*

$$\dim_{\mathbb{F}} e_{\mathfrak{m}}^{ord} H^1_{et}(X(S) \times_F \bar{F}, \mathcal{O}/\varpi)[\mathfrak{m}] = 2$$

Autrement dit, l'idéal $\mathfrak{m}$ est de multiplicité résiduelle 1.

2. *L'entier p est plus grand que 7. Soit $L = F(\zeta_p)$. La représentation $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}|G_L}$ est absolument irréductible. Soit v une place finie au dessus de p. Alors l'extension définie par $\bar{\rho}_{\mathfrak{m}|I_v}$ n'est pas équivalente à :*

$$0 \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow \bar{\rho}_{\mathfrak{m}|I_v} \longrightarrow \mathbb{F}(-1) \longrightarrow 0$$

Autrement dit, le type de déformation de $\bar{\rho}_f$ est minimal.

Alors $M^{ord}_{\mathfrak{m}}$ est libre de rang 2 sur $\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}$ qui est un anneau de Gorenstein. Sous l'hypothèse 2, l'anneau $\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}$ est d'intersection complète. De plus, la représentation $M^{ord}_{\mathfrak{m}}$ est non-ramifiée en dehors de $S_B \cup \{v|p\}$. Soit v une place n'appartenant pas à $S_B \cup \{v|p\}$. Soit χ_Γ le caractère à valeurs dans $\mathcal{O}[[G/G_{\mathrm{tors}}]]$ défini par la composition :

$$\chi_\Gamma \ : \ G_F \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathcal{O}[[G/G_{\mathrm{tors}}]]^\times$$

Il existe alors un caractère ω tel que la représentation $M^{ord}_{\mathfrak{m}}$ vérifie :

$$(2) \quad \det(1 - X\,\mathrm{Fr}(v)|M^{ord}_{\mathfrak{m}}) = 1 - \lambda_{\mathfrak{m}}(T(v))X + \omega(\mathrm{Fr}(v))\chi_\Gamma(\mathrm{Fr}(v))N_{F/\mathbb{Q}}\varpi_v X^2$$

Démonstration. — Sous l'hypothèse 1, le lemme 15.1 de [**Maz77**], le théorème et la proposition 1.4.19 de [**Car94**] généralisés au contexte des courbes de Shimura montrent que $M^{ord}_{\mathfrak{m}}$ est libre de rang 2 sur $\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}$ et que $\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}$ est un anneau de Gorenstein. Sous l'hypothèse 2, la liberté de $M^{ord}_{\mathfrak{m}}$ et le fait que $\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}$ soit d'intersection complète résultent du théorème 1 de [**Fuj99**].
Pour obtenir l'assertion (2), il suffit d'établir un résultat comparable pour un sous-ensemble Zariski dense de $\mathrm{Spec}(\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}})$. Pour le choix $\mathrm{Spec}^{arith}(\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}})$, il s'agit alors du corollaire 3.5 de [**Hid88**]. □

Si le caractère ω restreint à G_{tors} est un carré, alors ω peut s'écrire $\omega = \chi^2$. Le caractère χ_Γ est un carré car p est impair. Soit $\chi_\Gamma^{-1/2}$ un choix fixé de caractère dont le carré est égal à l'inverse de χ_Γ. La représentation $\mathcal{T} = M^{ord}_{\mathfrak{m}}(1) \otimes \chi^{-1}\chi_\Gamma^{-1/2}$ vérifie :

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[[G/G_{\mathrm{tors}}]]}(\mathcal{T}, \mathcal{O}[[G/G_{\mathrm{tors}}]])(1) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}}(\mathcal{T}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}[[G/G_{\mathrm{tors}}]]}(\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}, \mathcal{O}[[G/G_{\mathrm{tors}}]]))\end{aligned}$$

L'anneau $\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}$ est de Gorenstein donc

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}}(\mathcal{T}, \mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}})(1)$$

et la représentation $\mathcal{T}$ est donc auto-duale. L'obstruction à ce que ω soit un carré provient de la 2-torsion de G_∞. Nous faisons l'hypothèse que cette construction est possible.
Soit v un place au-dessus de p. D'après [**Wil88**] théorème 2, le G_{F_v}-module $\mathcal{T}$ s'insére dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_v^+ \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_v^- \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{T}_v^+$ est un $\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}$-module libre de rang 1 non-ramifié. Autrement dit, la représentation $\mathcal{T}$ est ordinaire au sens de Greenberg.

3. Systèmes d'Euler pour $\mathcal{T}_{\mathbf{Iw}}$

3.1. Points CM dans la tour $X(s)$. — Soit K une extension quadratique totalement imaginaire de F se plongeant dans B par

$$q : K \hookrightarrow B$$

Soit

$$q : \mathbb{A}_f(K) \hookrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$$

le plongement idèlique induit.
Le demi-plan supérieur admet un unique point fixe z sous l'action du groupe multiplicatif de K. L'ensemble des points CM sur $X(s)$ relatif à K est l'ensemble

$$CM(X(s), K) = \{x = [z, b] \in X(s)(\mathbb{C}) | b \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)\}$$

D'après la loi de réciprocité de Shimura, les points CM sont algébriques sur des extensions abéliennes de K diédrales sur F. Nous considérons une famille de points $x(\mathfrak{c}, s) \in X(s)(K^{ab})$ dans la tour $\{X(s)\}$ décrite par la donnée d'un point CM initial $x = [z, b]$ et de modifications locales de x associées á un idéal $\mathfrak{c}$ de $\mathcal{O}_F$ premier à $Ram(B)$, le conducteur de $x(\mathfrak{c}, s)$, et à un entier s, le niveau de $x(\mathfrak{c}, s)$. Le point $x(\mathfrak{c}, s)$ est défini par :

$$x(\mathfrak{c}, s) = [z, bb(\mathfrak{c}, s)]$$

Localement, l'élément $b(\mathfrak{c}, s) \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ est donné par :

1. En dehors de $\mathfrak{c}(p)$, $b(\mathfrak{c}, s)_v$ est l'identité.
2. En $v|\mathfrak{c}$ et $v \nmid (p)$:
$$b(\mathfrak{c}, s)_v = \begin{pmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. En $v|(p)$, soit $t = \mathrm{ord}_v\, \mathfrak{c}$.
$$b(\mathfrak{c}, s) = \begin{pmatrix} \varpi_v^{s+t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces points généralisent dans notre contexte les points de Heegner sur $X_0(N)$. L'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)^{ab}$ sur la famille $x(\mathfrak{c}, s)$ peut être décrite explicitement. La propriété fondamentale des $x(\mathfrak{c}, s)$ est la relation de distribution suivante liant l'action galoisienne sur $x(\mathfrak{c}, s)$ à l'action de l'algèbre de Hecke.

Proposition 3.1. — *Soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des produits d'une puissance de p et de premiers distincts $\mathcal{O}_F$ inertes dans $\mathcal{O}_K$, n'appartenant pas à S_B et ne divisant pas un idéal dépendant de x et des éléments de torsion de $\mathcal{O}_K^\times$ (voir* [**Fou07b**] *proposition 1.5.7 ou* [**Nek04**] *proposition 2.10 pour les détails). Soit $\mathfrak{c}l$ un élément de $\mathscr{L}$.*

$$T(l)x(\mathfrak{c}, s) = u(\mathfrak{c}) \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c}l, s)/K(\mathfrak{c}, s))} \sigma \cdot x(\mathfrak{c}l, s) \tag{3}$$

$$T(p)x(\mathfrak{c},s)=\sum_{\sigma\in \mathrm{Gal}(K(\mathfrak{c},s+1)/K(\mathfrak{c},s))}\sigma\cdot x(\mathfrak{c},s+1) \tag{4}$$

Le terme $u(\mathfrak{c})$ est égal à 1 sauf si $\mathfrak{c}=1$ auquel cas $u(\mathfrak{c})=|\mathcal{O}_K^\times/\mathcal{O}_F^\times|$.

Après projection sur la partie ordinaire, le point $x(\mathfrak{c},s)$ peut être vu comme un éléments de $CH^1(X(s)\times_F K(c,s))_0\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}$. L'application d'Abel-Jacobi p-adique

$$\Phi : CH^1(X(s)\times_F K(c,s))_0 \longrightarrow H^1(K(\mathfrak{c},s), e^{ord}H^1_{et}(X(s)\times \bar{F},\mathcal{O})(1))$$

permet donc de construire des classes de cohomologie dans la cohomologie galoisienne de $H^1_{et}(X(s)\times \bar{F},\mathcal{O})(1)$ à partir de $x(\mathfrak{c},s)$. Plus précisément, la construction

$$\begin{array}{ccc}
e^{ord}_{\mathfrak{m}}CH^1(X(S)\times_F K(\mathfrak{c},s))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O} & \xrightarrow{\Phi} & H^1(K(\mathfrak{c},s),M^{ord}_{\mathfrak{m}}(s)(1)) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\
H^1(K_0(\mathfrak{c},s),M^{ord}_{\mathfrak{m}}(s)(1)\otimes\chi^{-1}\chi_\Gamma^{-1/2}) & \xleftarrow{\mathrm{res}^{-1}} & H^1(K(\mathfrak{c},s),M^{ord}_{\mathfrak{m}}(s)(1)\otimes\chi^{-1}\chi_\Gamma^{-1/2}) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Cor}_{\mathfrak{c}s/\mathfrak{c}}} & & \\
H^1(K_0(\mathfrak{c}),M^{ord}_{\mathfrak{m}}(s)(1)\otimes\chi^{-1}\chi_\Gamma^{-1/2}) & \xrightarrow{T(p)^{-s}} & H^1(K_0(\mathfrak{c}),M^{ord}_{\mathfrak{m}}(s)(1)\otimes\chi^{-1}\chi_\Gamma^{-1/2})
\end{array}$$

fournit des classes $z(\mathfrak{c},s)$ dans $H^1(K_0(\mathfrak{c}),M^{ord}_{\mathfrak{m}}(s)(1)\otimes\chi^{-1}\chi_\Gamma^{-1/2})$. La propriété (4) montre alors que les $\{z(\mathfrak{c},s)\}_s$, ou plus précisément une très légère modification des $z(\mathfrak{c},s)$, forment un système projectif pour le changement de niveau. Donc :

$$z(\mathfrak{c})=\varprojlim_s z(\mathfrak{c},s)\in H^1(K_0(\mathfrak{c}),\mathcal{T}) \tag{5}$$

Soit

$$K\subset K_1\subset\cdots\subset K_n\subset\cdots\subset K_\infty$$

la tour d'extensions définissant la $\mathbb{Z}_p^d$-extension de K diédrale sur F. L'algèbre de groupe $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$ est isomorphe à $\mathcal{O}[[X_1,\cdots,X_d]]$. La propriété (3) montre alors que les $\{z(\mathfrak{c}p^t,s)\}_t$ forment un système projectif pour la corestriction. Donc :

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{c})=\varprojlim_t z(\mathfrak{c}p^t,s)\in \varprojlim_t H^1(K_0(\mathfrak{c}p^t),\mathcal{T}) \tag{6}$$

D'après le lemme de Shapiro :

$$\varprojlim_t H^1(K_0(\mathfrak{c}p^t),\mathcal{T})\xrightarrow{\sim} H^1(K_0(\mathfrak{c}),\mathcal{T}\otimes_{\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}}\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}[[X_1,\cdots,X_d]])$$

Soit :

$$\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}=\mathcal{T}\otimes_{\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}}\mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}[[X_1,\cdots,X_d]]$$

La propriété suivante vient compléter la preuve que les classes $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})$ vérifient les relations caractéristiques d'un systme d'Euler.

Proposition 3.2. — *Soit* $\mathfrak{c}l \in$. *Soit* v *une place de* $K(\mathfrak{c})$ *au-dessus de* l *et* w *l'unique place de* $K(\mathfrak{c}l)$ *au-dessus de* v. *Soit* $\mathrm{Fr}(l)$ *la classe de conjugaison du morphisme de Frobenius de* l. *Alors :*

$$\mathrm{loc}_w\, \mathfrak{z}(\mathfrak{c}l) = u(1)\, \mathrm{Fr}(l)\, \mathrm{loc}_w\, \mathfrak{z}(\mathfrak{c}) \in H^1(K(\mathfrak{c}l)_w, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \tag{7}$$

3.2. Propriétés locales des classes équivariantes. — Pour L une extension finie de K, soit $H^1_f(L, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$ le groupe de Selmer de Greenberg défini par :

$$H^1_f(L, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) = \ker\left(H^1(L, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \longrightarrow \bigoplus_{v \nmid p} H^1(L_v^{nr}, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}) \oplus \bigoplus_{v \mid p} H^1(L_v, (\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})_v^-) \right)$$

Les classes de $H^1_f(L, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$ sont donc non-ramifiées en dehors de p et nulles après projection dans la cohomologie de $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}^-$ en les places divisant p.

Théorème 1. — *Les classes* $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})$ *vérifient :*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{c}) \in H^1_f(K(\mathfrak{c}), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$$

Remarque. — La démonstration qui suit est une adaptation des méthodes de B.Howard qui traite le cas $F = \mathbb{Q}$ dans l'article [**How07**].

Démonstration. — En dehors de p, l'assertion (6) montre que $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})$ est une norme universelle d'une sous $\mathbb{Z}_p$-extension de $K_0(\mathfrak{c}p^\infty)/K_0(\mathfrak{c})$. La classe $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})$ est donc non-ramifiée, par exemple par [**Rub00**] corollaire B.3.5.
En p, on commence par étudier la localisation de $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})$ en un idéal premier arithmétique $\mathcal{P}$ de poids 2. Soit $f_{\mathcal{P}}$ la forme modulaire propre ordinaire associée á $\mathcal{P}$ et $V(f_{\mathcal{P}})$ la représentation galoisienne qui lui est associée. Quitte à considérer $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})_{\mathcal{P}}$ comme classe de $H^1(L, \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} \otimes R_{\mathcal{P}})$ pour une extension L bien choisie, la classe $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})_{\mathcal{P}}$ peut-être vue comme classe de $H^1(L, V(f_{\mathcal{P}}))$. La classe $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})_{\mathcal{P}}$ est par définition dans l'image de l'application d'Abel-Jacobi p-adique donc dans le groupe de Selmer de Bloch-Kato d'après [**BK90**] exemple 3.11. D'après [**Nek06**] proposition 12.5.9.2, les groupes de Selmer et de Bloch-Kato coïncident pour la représentation attachée à une forme modulaire ordinaire. La classe $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})_{\mathcal{P}}$ appartient donc à $\mathcal{P}H^1(K_0(\mathfrak{c}), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}^-)_{\mathcal{P}}$ pour une infinité de $\mathcal{P}$. Ceci montre que $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})$ est un élément de $H^1(K_0(\mathfrak{c}), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}^-)_{\mathrm{tors}}$. Le module $H^1(K_0(\mathfrak{c}), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}^-)_{\mathrm{tors}}$ est de type fini sur R, donc noethérien. La classe $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})$ est dans l'image de la corestriction d'une $\mathbb{Z}_p$-extension, donc divisible. Elle est donc nulle.

□

En général, il est souhaitable de pouvoir travailler avec des tours de courbes admettant une structure de niveau fixe non-triviale N en dehors de p. Dans ce cas, mon résultat est plus faible.

Théorème 2. — *Il existe un élément régulier $\lambda \in R_{\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}}$ tel que pour tout $\mathfrak{c} \in \mathscr{L}$, la classe $\lambda\mathfrak{z}(\mathfrak{c})$ soit dans $H^1_f(K(\mathfrak{c}), \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}})$. Si toutes les places divisant N se décomposent dans K, alors $\lambda = 1$ convient.*

Lorsque F est égal à $\mathbb{Q}$ et que $B = \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, ce résultat a été établi par Benjamin Howard dans [**How07**].
Les théorèmes 1 et 2 ainsi que les assertions (3)et (7) montrent que les $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})$ forment un système d'Euler pour $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}$.

3.3. Conséquences. — Soit $R = \mathfrak{h}^{ord}_{\mathfrak{m}}[[X_1, \cdots, X_d]]$. Soit S l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathrm{Frac}(\mathcal{O})$. Soit $\mathbf{Sp}$ une spécialisation de R, c'est-à-dire un morphisme de $\mathcal{O}$-algèbre

$$\mathbf{Sp} : R \longrightarrow S$$

de conoyau fini. La spécialisation $\mathbf{Sp}$ induit une spécialisation $T_{\mathbf{Sp}}$ de $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}$ définie par :

$$T_{\mathbf{Sp}} = \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} \otimes_{R,\mathbf{Sp}} S,\ A_{\mathbf{Sp}} = \mathcal{T}_{\mathrm{Iw}} \otimes_{R,\mathbf{Sp}} \mathrm{Frac}(S)/S$$

L'existence d'un système d'Euler pour $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}$ implique l'existence d'un système d'Euler pour chaque $T_{\mathbf{Sp}}$. Si le système $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})$ est non-trivial, il induit un système non-trivial que nous notons également $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})$ pour presque toutes les spécialisations de $\mathbf{Sp}$. Soit v une place de F divisant p. Une spécialisation $T_{\mathbf{Sp}}$ vue comme représentation de G_{F_v} s'insère dans la suite exacte ordinaire

$$0 \longrightarrow (T_{\mathbf{Sp}})^+_v \longrightarrow T_{\mathbf{Sp}} \longrightarrow (T_{\mathbf{Sp}})^-_v \longrightarrow 0$$

Une spécialisation $T_{\mathbf{Sp}}$ est dite exceptionnelle s'il existe une extension finie L_w de F_v telle que $H^0(G_{L_w}, (T_{\mathbf{Sp}})^-_w)$ soit non-nul.
Parmi les spécialisations de $\mathcal{T}_{\mathrm{Iw}}$ se trouvent en particulier les représentations galoisiennes associées aux formes automorphes de représentation résiduelle $\bar{\rho}$ éventuellement tordue par un caractère de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Le fait que de telles représentations admettent un système d'Euler était déjà connu dans le cas où $F = \mathbb{Q}$ et $B = \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ par [**Kol90, Nek92, How07**] et pour les formes automorphes sur F totalement réel de poids parallèles $2, \cdots, 2$ et de caractère central trivial par [**Nek04**].
Comme dans [**Kol90, Nek92, How04a**], nous pouvons considérer les classes $\kappa(\mathfrak{c})$ dérivées de Kolyvagin de $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})$.

Proposition 3.3. — *Supposons la représentation $\bar{\rho}$ non-diédrale. Il existe un entier n tel que les classes dérivées $p^n\kappa(\mathfrak{c})$ forment un système de Kolyvagin* *pour $T_{\mathbf{Sp}}$. Autrement dit, il existe un système de conditions locales tel que*

$$p^n\kappa(\mathfrak{c}) \in H^1_{f(\mathfrak{c})}(K, T_{\mathbf{Sp}}/I_{\mathfrak{c}}T_{\mathbf{Sp}})$$

et tel que si $l \nmid \mathfrak{c}$:

$$\operatorname{loc}_l \kappa(\mathfrak{c}) = -\operatorname{Fr}(l) \operatorname{loc}_l \kappa(\mathfrak{c}l)$$

Remarque :— Une étude fine des propriétés des classes dérivées et de leurs images dans la cohomologie de G_{K_v} permet de démontrer la proposition précédente sans la puissance de p superflue, voir pour cela [**Fou07a**].

Corollaire 3.4. — *Supposons que l'image de $\bar{\rho}$ contienne assez d'homothéties et que la spécialisation $T_{\mathbf{Sp}}$ ne soit pas exceptionnelle. Supposons que l'image de $\mathfrak{z}(1)$ dans $H^1_f(K, T_{\mathbf{Sp}})$ ne soit pas de torsion. Alors :*

$$H^1_f(K, A_{\mathbf{Sp}}) = \operatorname{Frac}(S)/S \oplus M \oplus M$$

Et :

$$\ell(M) \leq \ell(H^1_f(K, T_{\mathbf{Sp}})/S \cdot p^n \mathfrak{z}(1))$$

Démonstration. — Ceci résulte de l'existence d'un système de Kolyvagin non-nul pour $T_{\mathbf{Sp}}$ et de la méthode des systèmes d'Euler telle que présentée dans [**Nek92**] et axiomatisée dans [**How04a, How04b**]. □

Des techniques de descente sur les groupes de Selmer, ou mieux sur les complexes de Selmer, permettent de déduire du corollaire précédent des divisibilités entre idéaux caractéristiques dans la théorie d'Iwasawa diédrale des formes automorphes quaternioniques ordinaires.

Références

[Beĭ84] A. A. Beĭlinson. Higher regulators and values of L-functions. In *Current problems in mathematics, Vol. 24*, Itogi Nauki i Tekhniki, pages 181–238. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984.

[BG03] David Burns and Cornelius Greither. On the equivariant Tamagawa number conjecture for Tate motives. *Invent. Math.*, 153(2) :303–359, 2003.

[BK90] Spencer Bloch and Kazuya Kato. L-functions and Tamagawa numbers of motives. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, volume 86 of *Progr. Math.*, pages 333–400. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Car94] Henri Carayol. Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet. In *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, volume 165 of *Contemp. Math.*, pages 213–237. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Del71] Pierre Deligne. Travaux de Shimura. In *Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/71), Exp. No. 389*, pages 123–165. Lecture Notes in Math., Vol. 244. Springer, Berlin, 1971.

[Del79] P. Deligne. Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 313–346. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979. With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus.

[Fla04] Matthias Flach. The equivariant Tamagawa number conjecture : a survey. In *Stark's conjectures : recent work and new directions*, volume 358 of *Contemp. Math.*, pages 79–125. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004. With an appendix by C. Greither.

[Fou07a] Olivier Fouquet. Euler systems for towers of Shimura curves. Prépublication disponible sur `http ://math.jussieu.fr/∼olivierfouquetx`, 2007.

[Fou07b] Olivier Fouquet. *Tour de courbes de Shimura, systèmes de Kolyvagin et théorie d'Iwasawa des formes modulaires ordinaires.* PhD thesis, Université Paris VI, 2007.

[FPR94] Jean-Marc Fontaine and Bernadette Perrin-Riou. Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L. In *Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 599–706. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Fuj99] Kazuhiro Fujiwara. Deformation rings and hecke algebras in the totally real case, 1999. Preprint, 99pp.

[Hid88] Haruzo Hida. On p-adic Hecke algebras for GL_2 over totally real fields. *Ann. of Math. (2)*, 128(2) :295–384, 1988.

[How04a] Benjamin Howard. The Heegner point Kolyvagin system. *Compos. Math.*, 140(6) :1439–1472, 2004.

[How04b] Benjamin Howard. Iwasawa theory of Heegner points on abelian varieties of GL_2 type. *Duke Math. J.*, 124(1) :1–45, 2004.

[How07] Benjamin Howard. Variation of Heegner points in Hida families. *Invent. Math.*, 167(1) :91–128, 2007.

[Kat93a] Kazuya Kato. Iwasawa theory and p-adic Hodge theory. *Kodai Math. J.*, 16(1) :1–31, 1993.

[Kat93b] Kazuya Kato. Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. I. In *Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, volume 1553 of *Lecture Notes in Math.*, pages 50–163. Springer, Berlin, 1993.

[Kat04] Kazuya Kato. p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms. *Astérisque*, (295) :ix, 117–290, 2004. Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III.

[Kol90] Viktor Kolyvagin. Euler systems. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 435–483. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Maz77] Barry Mazur. Modular curves and the Eisenstein ideal. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (47) :33–186 (1978), 1977.

[Maz89] B. Mazur. Deforming Galois representations. In *Galois groups over* $\mathbf{Q}$ *(Berkeley, CA, 1987)*, volume 16 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 385–437. Springer, New York, 1989.

[Nek92] Jan Nekovář. Kolyvagin's method for Chow groups of Kuga-Sato varieties. *Invent. Math.*, 107(1) :99–125, 1992.

[Nek04] Jan Nekovář. The Euler system method for CM points on Shimura curves. In *L-functions and Galois representations (Durham, July 2004)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[Nek06] Jan Nekovář. Selmer complexes. *Astérisque*, (310) :559, 2006.

[Rub00] Karl Rubin. *Euler systems*, volume 147 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000. Hermann Weyl Lectures. The Institute for Advanced Study.

[SW01] C. M. Skinner and Andrew J. Wiles. Nearly ordinary deformations of irreducible residual representations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 10(1) :185–215, 2001.

[Wil88] Andrew Wiles. On ordinary λ-adic representations associated to modular forms. *Invent. Math.*, 94(3) :529–573, 1988.

[Wil95] Andrew Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Ann. of Math. (2)*, 141(3) :443–551, 1995.

Olivier Fouquet, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175, rue du Chevaleret, 75013, Paris, FRANCE • *E-mail :* olivier.fouquet@polytechnique.org
Url : http://math.jussieu.fr/~olivierfouquetx/