CODESCENTE POUR LE NOYAU SAUVAGE ÉTALE

par

Hassan Asensouyis & Jilali Assim

Résumé. — Soit p un nombre premier impair et soit M/F une p-extension galoisienne de corps de nombres, de groupe de Galois G. Nous étudions, pour tout entier $i \geq 2$, le noyau et le conoyau de l'homomorphisme naturel sur le noyau sauvage étale $N : (WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G \longrightarrow WK_{2i-2}^{\text{ét}}F$, induit par la corestriction en cohomologie étale.

Abstract. — Let p be an odd prime and let M/F a Galois p-extension of number fields with Galois group G. We study, for $i \geq 2$, the kernel and cokernel of the natural map on the étale wild kernel $N : (WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G \longrightarrow WK_{2i-2}^{\text{ét}}F$ induced by the corestriction in étale cohomology.

Introduction

Soit M/F une extension galoisienne finie de corps de nombres, de groupe de Galois G. On se propose d'étudier, pour un nombre premier impair p, le noyau et le conoyau de l'homomorphisme

$$N : (WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G \longrightarrow WK_{2i-2}^{\text{ét}}F$$

induit par la corestriction

$$\text{cor} : H^2(M, \mathbb{Z}_p(i)) \longrightarrow H^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

où, pour un corps K quelconque, $j \geq 1$, $H^j(K, \mathbb{Z}_p(i))$ est le j-ième groupe de cohomologie continue à coefficients dans le i-ème tordu de Tate $\mathbb{Z}_p(i)$. Rappelons que le noyau sauvage étale $WK_{2i-2}^{\text{ét}}F$ ([**Ng 1**], [**Ko 1**]) est défini, pour tout entier $i \geq 2$, par passage à la limite projective dans la suite exacte de Poitou-Tate, comme étant le noyau de l'homomorphisme de localisation

$$H^2(F, \mathbb{Z}_p(i)) \longrightarrow \bigoplus_v H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i))$$

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11R23, 11R70.
Mots clefs. — Noyau sauvage étale, codescente, λ-invariant.

Nous remercions le rapporteur pour de nombreuses remarques qui nous ont permis d'améliorer la rédaction. Le second auteur tient à remercier tous les organismes et personnes qui ont aidé à la réussite des premières Journées Arithmétiques de Meknès.

où v parcourt l'ensemble des places de F et F_v est le complété de F en la place v.
L'homomorphisme N, qu'on peut voir comme l'analogue de l'application norme dans le cas du groupe de classes, a été étudié dans le cas d'une extension cyclique de degré p par Kolster-Movahhedi ([**Ko-Mo**]) et par Griffiths ([**Gri**]) dans sa thèse pour une extension cyclique de degré une puissance du nombre premier p. Dans cet article, nous étudions le cas d'une p-extension galoisienne quelconque. Nous déterminons explicitement le conoyau de N. En particulier le morphisme N est surjectif sauf dans un cas exceptionnel pour lequel nous donnons une description arithmétique du conoyau. Pour calculer le noyau de N, on se heurte à des difficultés dûes notamment à la présence de certains groupes de cohomologie qui semblent être des obstructions à un principe de Hasse local-global "tordu". Ces difficultés, déjà observées dans le cas classique du groupe de classes (voir *e.g* [**Ng 3**]), ainsi que le défaut de surjectivité de N, disparaissent dans le cas où le degré d de l'extension cyclotomique $F(\mu_p)/F$ ne divise pas l'entier $i-1$. Si $i \equiv 1 \pmod d$, nous faisons l'hypothèse

$(\mathcal{H})$: *Il existe une p-place v_0 de F qui ne se décompose pas ou une place v_0 totalement et modérément ramifiée dans l'extension M/F.*

Si $F(\mu_p)$ contient le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité, nous obtenons une formule des genres à la Chevalley pour une extension galoisienne de corps de nombres d'exposant p^n, généralisant celles de [**Ko-Mo**] et [**Gri**].
Enfin nous exploitons le cas simple des corps de nombres totalement réels et i pair pour donner une démonstration de la formule de Riemann-Hurwitz p-adique (voir *e.g.* [**I 2**]). Le résultat obtenu donne une description explicite de la structure de $\mathbb{Z}_p[G]$-modules des "parties moins" du groupe de Galois de la pro-p-extension non-ramifiée abélienne maximale de $M(\mu_{p^\infty})$, décomposant totalement toutes les places au-dessus de p.

1. Préliminaires

Pour tout corps de nombres F d'anneau des entiers O_F et tout nombre premier impair p, soit S un ensemble de places de F contenant l'ensemble S_p des places au-dessus de p et des places infinies. Notons $G_S = G_S(F)$ le groupe de Galois de l'extension algébrique S-ramifiée maximale de F.
Par passage à la limite projective dans la suite exacte de Poitou-Tate, nous avons la suite exacte

$$H^2(G_S, \mathbb{Z}_p(i)) \to \bigoplus_{v \in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^0\left(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)\right)^* \to 0,$$

où, pour un groupe A, A^* est le dual de Pontryagin de A. Pour $i \neq 1$, le noyau de l'homomorphisme de localisation $H^2(G_S(F), \mathbb{Z}_p(i)) \to \bigoplus_{v \in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i))$ est indépendant de S contenant S_p ([**Sc**]). Pour $i = 2$, les résultats de Tate ([**T**]) montrent que ce noyau est isomorphe à la partie p-primaire du noyau sauvage classique ([**M**]). Pour $i \geq 2$, il a été baptisé noyau sauvage étale par Kolster ([**Ko 1**]) et Nguyen Quang Do ([**Ng 1**]) et est noté $WK_{2i-2}^{\text{ét}}F$, à cause notamment des liens entre les groupes de K-théorie algébrique et la cohomologie étale ([**So**], [**D-F**]). Les résultats de Soulé et Dwyer-Friedlander, et ceux de Borel sur la finitude des groupes de K-théorie algébrique $K_{2i-2}O_F$, $i \geq 2$, entraînent en particulier que le noyau sauvage étale $WK_{2i-2}^{\text{ét}}F$ est fini pour tout entier $i \geq 2$. Notons en passant que la finitude du noyau de l'homomorphisme de localisation ci-dessus est conjecturale pour $i \leq 0$ et que le cas $i = 0$ correspond à la conjecture de Leopoldt ([**Sc**]). Si $i = 1$, ce noyau n'est autre que la partie p-primaire du groupe des S-classes de F, *i.e.* le groupe de classes modulo les classes des diviseurs contenus dans S. Le noyau sauvage étale peut donc être considéré comme un analogue tordu du groupe de classes (tensorisé par $\mathbb{Z}_p$) et son étude recèle, comme celle du groupe de classes, des problèmes arithmétiques difficiles et intéressants (voir *e.g* [**As**], [**Ko-Mo**], [**Ng 2**], *etc*).

Soit maintenant M/F une extension galoisienne S-ramifiée de corps de nombres, de groupe de Galois G. Nous avons alors deux applications de corestriction et restriction

$$\mathrm{cor} : H^2(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i)) \to H^2(G_S(F), \mathbb{Z}_p(i))$$

et

$$\mathrm{res} : H^2(G_S(F), \mathbb{Z}_p(i)) \to H^2(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i))^G$$

pour tout entier $i \geq 2$. Si $i = 2$, ces applications correspondent respectivement aux homomorphismes *transfert* et *extension* pour le K_2 ([**M**]). Il est bien connu que le noyau et le conoyau de l'homomorphisme res sont décrits à l'aide de la G-cohomologie de $H^1(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i))$:

$$\ker(\mathrm{res}) \cong H^1(G, H^1(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i))) \text{ et } \mathrm{coker}(\mathrm{res}) \cong H^2(G, H^1(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i)))$$

([**Ka**], [**CKPS**], [**Ko-Mo**], *etc*), et que le morphisme de corestriction induit un isomorphisme, noté encore cor,

$$H^2(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i))_G \xrightarrow{\sim} H^2(G_S(F), \mathbb{Z}_p(i))$$

(voir *e.g.* [**Ko 2**]). Des résultats analogues sont valables dans le cas d'une extension de corps locaux.

Notons $\widetilde{\bigoplus_{v \in S}} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i))$ le noyau de l'homomorphisme

$$\bigoplus_{v \in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i)) \to H^0(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))^*.$$

Nous avons ainsi, pour tout entier $i \geq 2$, une suite exacte

$$(1) \qquad 0 \to WK^{\text{ét}}_{2i-2}F \to H^2(G_S, \mathbb{Z}_p(i)) \to \widetilde{\bigoplus_{v \in S}} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i)) \to 0.$$

Soit μ_p le groupe des racines p-ièmes de l'unité et soit $d := [F(\mu_p) : F]$. Il est clair que l'on a l'isomorphisme

$$\widetilde{\bigoplus_{v \in S}} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i)) \cong \bigoplus_{v \in S} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i))$$

exactement lorsque d ne divise pas l'entier $i - 1$. Notons

$$N : (WK^{\text{ét}}_{2i-2}M)_G \longrightarrow WK^{\text{ét}}_{2i-2}F$$

l'homomorphisme induit par la corestriction. Nous avons alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \left(WK^{\text{ét}}_{2i-2}M\right)_G \arrow[r] \arrow[d, "N"] & H^2(G_S(M),\mathbb{Z}_p(i))_G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{cor}"] & \left(\widetilde{\bigoplus_{v\in S, w|v}} H^2(M_w,\mathbb{Z}_p(i))\right)_G \arrow[d, "N'"] \\
0 \arrow[r] & WK^{\text{ét}}_{2i-2}(F) \arrow[r] & H^2(G_S(F),\mathbb{Z}_p(i)) \arrow[r, two heads] & \widetilde{\bigoplus_{v\in S}} H^2(F_v,\mathbb{Z}_p(i))
\end{tikzcd}$$

Ainsi $\mathrm{coker} N \simeq \ker N'$ et

$$\ker N \simeq \mathrm{coker}(H_1(G,H^2(G_S(M),\mathbb{Z}_p(i))) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} H_1(G, \widetilde{\bigoplus_{w|v, v\in S}} H^2(M_w,\mathbb{Z}_p(i)))).$$

2. Détermination du conoyau

Pour déterminer le conoyau de l'homomorphisme $N : (WK^{\text{ét}}_{2i-2}M)_G \to WK^{\text{ét}}_{2i-2}F$, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\left(\widetilde{\bigoplus_{w|v,v\in S}} H^2(M_w,\mathbb{Z}_p(i))\right)_G \arrow[r] \arrow[d, "N'"] & \left(\bigoplus_{w|v,v\in S} H^2(M_w,\mathbb{Z}_p(i))\right)_G \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \left(H^0(M,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))^*\right)_G \arrow[d] \\
\widetilde{\bigoplus_{v\in S}} H^2(F_v,\mathbb{Z}_p(i)) \arrow[r, hook] & \bigoplus_{v\in S} H^2(F_v,\mathbb{Z}_p(i)) \arrow[r, two heads] & H^0(F,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))^*
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux flèches verticales de droite sont des isomorphismes. Si $i \not\equiv 1 \pmod d$, on sait que les deux modules $\widetilde{\bigoplus_{w|v,v\in S}} H^2(M_w,\mathbb{Z}_p(i))$ et $\bigoplus_{w|v,v\in S} H^2(M_w,\mathbb{Z}_p(i))$ coïncident et N' est donc un isomorphisme. En particulier N est surjectif.
On n'a donc à traiter que le cas $i \equiv 1 \pmod d$.

Nous avons besoin de quelques notations supplémentaires :
F_∞ : la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F ;
$\Gamma := \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$;
L'_∞ : la pro-p-extension abélienne non-ramifiée maximale de F_∞, décomposant totalement toutes les places de F_∞ au-dessus de p.

Proposition 2.1. — *Soit M/F une p-extension galoisienne de corps de nombres et supposons $i \equiv 1 \pmod d$. Alors*

$$\mathrm{coker} N \cong \mathrm{Gal}\left(L'_\infty \cap M_\infty/F_\infty\right)(i-1)_\Gamma.$$

Démonstration. — Le diagramme commutatif ci-dessus montre que

$$\ker N' \cong \operatorname{coker}(H_1(G, \bigoplus_{w|v, v\in S} H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i))) \to H_1(G, H^0(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))^*)).$$

On sait que pour tout $v \in S$, $H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i)) \cong H^0(M_w, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))^*$ (théorème de dualité locale). Utilisant le théorème de dualité pour la cohomologie des groupes finis, puis le lemme de Shapiro, il vient

$$H_1(G, \bigoplus_{w|v, v\in S} H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i))) \cong \bigoplus_{v\in S} H^1(G_w, H^0(M_w, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)))^*.$$

où, pour toute place finie v de S, on a choisi une place w au-dessus de v et G_w est le groupe de décomposition de w. Soit H le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty)$ et pour une place finie v quelconque, soient $H_v = \mathrm{Gal}(M_{w,\infty}/F_{v,\infty})$, $\Gamma_w = \mathrm{Gal}(M_{w,\infty}/M_w)$ et $\Gamma_v = \mathrm{Gal}(F_{v,\infty}/F_v)$. Par inflation-restriction, on a les suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(G_w, H^0(\Gamma_w, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))) \arrow[r] & H^1\left(M_{w,\infty}/F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)\right) \arrow[d] \\
& & H^1(\Gamma_w, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))^{G_w} = 0
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
H^1(\Gamma_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1\left(M_{w,\infty}/F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)\right) \arrow[r] & H^1(H_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))^{\Gamma_v} \arrow[d] \\
0 & & H^2(\Gamma_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)) = 0
\end{tikzcd}$$

où la nullité des groupes $H^j(\Gamma_w, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))$ et $H^j(\Gamma_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))$, $j = 1, 2$, découle du lemme de Tate (voir *e.g.*[**Sc**]). On en déduit que

$$H^1(G_w, H^0(M_w, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))) \cong H^1(H_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))^{\Gamma_v}.$$

Puisque $i \equiv 1 \pmod d$, H_v opère trivialement sur $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)$, et donc

$$H^1(G_w, H^0(M_w, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))) \cong \mathrm{Hom}(H_v^{ab}(i-1)_{\Gamma_v}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p),$$

ou encore

$$H_1(G_w, H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i))) \cong H_v^{ab}(i-1)_{\Gamma_v}.$$

De même :

$$H_1(G, H^0(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))) \cong H^{ab}(i-1)_\Gamma.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\operatorname{coker} N &\cong \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{v\in S} H_v^{ab}(i-1)_{\Gamma_v} \longrightarrow H^{ab}(i-1)_\Gamma\right) \\
&= \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{v\in S} H_v^{ab} \longrightarrow H^{ab}\right)(i-1)_\Gamma = \mathrm{Gal}\left(L'_\infty \cap M_\infty/F_\infty\right)(i-1)_\Gamma.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2. — *Soit M/F une p-extension galoisienne de corps de nombres et soit L'_∞ la pro-p-extension abélienne non-ramifiée maximale de F_∞, décomposant totalement toutes les places au-dessus de p. Alors l'homomorphisme N est surjectif exactement dans les cas suivants :*

1. $i \not\equiv 1 \pmod d$
2. $i \equiv 1 \pmod d$ *et* $L'_\infty \cap M_\infty = F_\infty$.

3. Détermination du noyau

3.1. Cas $i \equiv 1 \pmod d$. — Rappelons que

$$\ker N \cong \operatorname{coker}(H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i))) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} H_1(G, \widetilde{\bigoplus_{w|v, v\in S}} H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i)))).$$

Malheureusement, le groupe $H_1(G, \widetilde{\bigoplus_{w|v, v\in S}} H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i)))$ semble difficile à calculer. On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & H_2(G, \bigoplus_{w|v,v\in S} H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i))) \arrow[d] \\
 & H_2(G, H^0(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))^*) \arrow[d] \\
H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i))) \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\cong"'] & H_1(G, \widetilde{\bigoplus_{w|v,v\in S}} H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i))) \arrow[d] \\
H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i))) \arrow[r, "\alpha"] & H_1(G, \bigoplus_{w|v,v\in S} H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i))) \arrow[d] \\
 & H_1(G, H^0(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))^*)
\end{tikzcd}$$

Supposons que l'hypothèse $(\mathcal{H})$ est vérifiée, c'est-à-dire qu'il existe une place v_0 de S pour laquelle $G_{w_0} \cong G$ et

$$H^0(M_{w_0}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)) \cong H^0(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)),$$

où w_0 est la place de M au-dessus de v_0, et donc

$$H_j(G, H^0(M_{w_0}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))) \cong H_j(G, H^0(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)))$$

pour $j = 1, 2$. Le diagramme ci-dessus et le théorème de dualité locale montrent alors que

$$H_j(G, \widetilde{\bigoplus_{w|v, v\in S}} H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i))) = \bigoplus_{v\in S-\{v_0\}} H_j(G_w, H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i))).$$

En résumé, sous l'hypothèse $(\mathcal{H})$, on a

$$\mathrm{Ker} N \cong \mathrm{coker}(H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i))) \longrightarrow \bigoplus_{v\in S-\{v_0\}} H_1(G_w, H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i)))),$$

où pour toute place $v \in S - \{v_0\}$, on a choisi une place w de M au-dessus de v (lemme de Shapiro). On sait que ([**CKPS**], [**Ko 2**])

$$H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i))) \cong \widehat{H}^0(G, H^1(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i)))$$

et pour tout $w \mid v, v \in S$

$$H_1(G_w, H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i))) \cong \widehat{H}^0(G_w, H^1(M_w, \mathbb{Z}_p(i))).$$

Par suite

$$\ker N \cong \mathrm{coker}(\widehat{H}^0(G, H^1(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i))) \longrightarrow \bigoplus_{v\in S-\{v_0\}} \widehat{H}^0(G_w, H^1(M_w, \mathbb{Z}_p(i)))).$$

Puisque les groupes $H^1(F, \mathbb{Z}_p(i))$ vérifient la descente galoisienne (voir *e.g.* [**CKPS**], [**Ko 2**]),

$$\mathrm{Ker} N \cong \mathrm{coker}(\frac{H^1(F, \mathbb{Z}_p(i))}{N_G(H^1(M, \mathbb{Z}_p(i)))} \longrightarrow \bigoplus_{v\in S-\{v_0\}} \frac{H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))}{N_{G_w}(H^1(M_w, \mathbb{Z}_p(i)))}).$$

Soit m l'exposant de G, on a alors

$$\mathrm{Ker} N \cong \mathrm{Coker}\left(\frac{H^1(F, \mathbb{Z}_p(i))/m}{N_G(H^1(M, \mathbb{Z}_p(i))/m)} \longrightarrow \bigoplus_{v\in S-\{v_0\}} \frac{H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))/m}{N_{G_w}(H^1(M_w, \mathbb{Z}_p(i))/m)}\right).$$

Pour simplifier, faisons $m = p^n$. Pour tout entier i, la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}_p(i) \xrightarrow{p^n} \mathbb{Z}_p(i) \to \mathbb{Z}/p^n(i) \to 0$$

donne par cohomologie la suite exacte

$$0 \to H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))/p^n \to H^1(F_v, \mathbb{Z}/p^n(i)) \to {}_{p^n}H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i)) \to 0.$$

On suppose dans toute la suite de cette section que le corps $F(\mu_p)$ contient le groupe μ_{p^n} des racines p^n-ièmes de l'unité .

Proposition 3.1. — *Soit $i \geq 2$. Pour tout $v \in S$, la surjection canonique*

$$\frac{H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))/p^n}{N_{G_w}(H^1(M_w, \mathbb{Z}_p(i))/p^n)} \to \frac{H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))/p^n}{H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))/p^n \bigcap N_{G_w}(H^1(M_w, \mathbb{Z}/p^n(i)))}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(M_w, \mathbb{Z}_p(i))/p^n \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1"] & H^1(M_w, \mathbb{Z}/p^n(i)) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_2"] & {}_{p^n}H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i)) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))/p^n \arrow[r] & H^1(F_v, \mathbb{Z}/p^n(i)) \arrow[r] & {}_{p^n}H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i)) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont induites par la norme.
Pour prouver l'injection $\operatorname{coker}(\phi_1) \hookrightarrow \operatorname{coker}(\phi_2)$, il suffit de montrer que

$$\mid \operatorname{coker}(\phi_2) \mid = \mid \operatorname{coker}(\phi_1) \mid \cdot \mid \operatorname{coker}(\phi_3) \mid .$$

Puisque $\mu_{p^n} \subset F(\mu_p)$ et $i \equiv 1 \pmod d$,

$$H^1(M_w, \mathbb{Z}/p^n(i)) \cong H^1(M_w, \mu_{p^n})(i-1) \cong M_w^\bullet / M_w^{\bullet p^n}(i-1)$$

et

$$H^1(F_v, \mathbb{Z}/p^n(i)) \cong F_v^\bullet / F_v^{\bullet p^n}(i-1).$$

Soit M_w^{ab} l'extension abélienne maximale de F_v contenue dans M_w. La théorie du corps de classes local montre alors que

$$\operatorname{coker}(\phi_2) \simeq G_w^{ab} \simeq \operatorname{Gal}(M_w^{ab}/F_v).$$

Le calcul de l'ordre de $\operatorname{coker}(\phi_1)$ découle de la preuve de la proposition 2.1 : puisque $H_v = \operatorname{Gal}(M_{w,\infty}/F_{v,\infty}) \simeq \operatorname{Gal}(M_w/F_{v,\infty} \cap M_w)$ est tué par p^n et $i \equiv 1 \pmod d$, l'hypothèse $\mu_{p^n} \subseteq F(\mu_p)$ entraîne que $H_v^{ab}(i-1)_{G_w/H_v} \cong (H_v^{ab})_{G_w/H_v}(i-1)$. D'où

$$\operatorname{coker}(\phi_1) \simeq \operatorname{Gal}(M_w^{ab}/F_{v,\infty} \cap M_w).$$

Pour calculer l'ordre de $\operatorname{coker}(\phi_3)$, il suffit de remarquer que G_w/H_v agit trivialement sur ${}_{p^n}H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i)) \cong \mathbb{Z}/p^n(i-1)$.
Le morphisme ϕ_3 est donc l'élévation à la puissance $[F_{v,\infty} \cap M_w : F_v]$ et

$$\mid \operatorname{coker}(\phi_3) \mid = \mid \operatorname{Gal}(F_{v,\infty} \cap M_w/F_v) \mid .$$

□

Si $\mu_{p^n} \subseteq E := F(\mu_p)$, on sait qu'il existe un sous-groupe $D_F^{(i,n)}$ de $E^\bullet$ tel que $H^1(F, \mathbb{Z}_p(i))/p^n \cong D_F^{(i,n)}/E^{\bullet p^n}(i-1)$ (voir *e.g.* [**Gr**], [**As-Mo 1**], [**As-Mo 2**], [**V**]). De plus, sous l'hypothèse $(\mathcal{H})$, le principe de Hasse est automatiquement vérifié. Nous obtenons ainsi une formule des genres dans le style de Chevalley généralisant celles de [**Ko-Mo**] (extensions cycliques de degré p) et [**Gri**] (extensions cycliques de degré une puissance de p) :

Théorème 3.2. — *Soit M/F une extension galoisienne S-ramifiée de corps de nombres d'exposant p^n, de groupe de Galois G. Supposons $i \equiv 1 \pmod{d}$. Alors, sous l'hypothèse $(\mathcal{H})$, l'homomorphisme*

$$N : (WK_{2i-2}^{ét}M)_G \longrightarrow WK_{2i-2}^{ét}F$$

induit par la corestriction est surjectif. Si de plus $\mu_{p^n} \subseteq F(\mu_p)$,

$$\frac{|\ (WK_{2i-2}^{ét}M)_G\ |}{|\ WK_{2i-2}^{ét}F\ |} = \frac{\prod_{v \in S}[M_{w,\infty}^{ab} : F_{v,\infty}]}{[M_\infty^{ab} : F_\infty][D_F^{(i,n)} : D_F^{(i,n)} \cap N_{M/F}M^\bullet]}$$

où M_∞^{ab} (resp. $M_{w,\infty}^{ab}$) est l'extension abélienne maximale de F (resp. F_v) contenue dans M_∞ (resp. $M_{w,\infty}$).

Remarque 3.3. — Le groupe $D_F^{(i,n)}$, appelé noyau de Tate généralisé, est l'analogue du groupe des p-unités de F (tensorisé par $\mathbb{Z}_p$). Comme dans le cas des p-unités, l'indice normique $[D_F^{(i,n)} : D_F^{(i,n)} \cap N_{M/F}M^\bullet]$ est difficile à calculer en général. Cependant, dans certains cas favorables, il est possible d'avoir plus de renseignements que dans le cas des p-unités. Considérons par exemple le cas où M/F est une extension cyclique de degré p et F admet une seule place au-dessus de p. Soit S l'ensemble des places au-dessus de p et des places ramifiées dans l'extension M/F et soit U un ensemble primitif maximal contenu dans S au sens de [**Mo-Ng**]. Alors ([**As-Mo 1**])

$$[D_F^{(i,n)} : D_F^{(i,n)} \cap N_{M/F}M^\bullet] = p^u$$

où $u =|\ U \setminus S_p\ |$. Si $s =|\ S \setminus S_p\ |$ on a alors

$$\frac{|\ (WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G\ |}{|\ WK_{2i-2}^{\text{ét}}F\ |} = p^{s-u-1}.$$

Le théorème de densité de Čebotarev assure l'existence d' une infinité d'ensembles primitifs. Dans [**As-Mo 2**], on donne d'autres exemples de calcul de l'indice normique ci-dessus en dehors du cas cyclique et de l'hypothèse $\mu_{p^n} \subseteq F$.

3.2. Cas $i \not\equiv 1 \pmod{d}$. — On conserve les notations des sections précédentes. Si $i \not\equiv 1 \pmod{d}$, on sait que l'homomorphisme N est surjectif (corollaire 2.2) et que

$$\begin{aligned}
\ker N &\cong \operatorname{coker}(H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i))) \to \bigoplus_{v \in S} H_1(G_w, H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i))) \\
&\cong \operatorname{coker}(\widehat{H}^0(G, H^1(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i))) \to \bigoplus_{v \in S} \widehat{H}^0(G_w, H^1(M_w, \mathbb{Z}_p(i))) \\
&\cong \operatorname{coker}(\frac{H^1(G_S(F), \mathbb{Z}_p(i))}{N_G H^1(G_S(M), \mathbb{Z}_p(i))} \to \bigoplus_{v \in S} \frac{H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))}{N_{G_w} H^1(M_w, \mathbb{Z}_p(i))}).
\end{aligned}.$$

Concernant les groupes $H_1(G_w, H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i))) \cong H^1(G_w, H^0(M_w, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i)))^*$, on voit que si $d_v := [F_v(\mu_p) : F_v]$ ne divise pas $i-1$, $H^0(M_w, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-i))$ est trivial et si d_v divise $i-1$, les mêmes calculs que dans le cas $i \equiv 1 \pmod{d}$ montrent que $H_1(G_w, H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i))) \cong H_v^{ab}(i-1)_{\Gamma_v}$, où $\Gamma_v = \mathrm{Gal}(F_{v,\infty}/F_v)$ et $H_v =: \mathrm{Gal}(M_{w,\infty}/F_{v,\infty})$.

Soit
$$S^{(i)} = \{v \in S;\, d_v \mid (i-1)\}.$$
Si $\mu_{p^n} \subset F(\mu_p)$ alors pour tout $v \in S^{(i)}$,
$$\mid H_1(G_w, H^2(M_w, \mathbb{Z}_p(i))) \mid = [M^{ab}_{w,\infty} : F_{v,\infty}],$$
où, comme dans le théorème précédent, $M^{ab}_{w,\infty}$ est l'extension abélienne maximale de F_v contenue dans $M_{w,\infty}$ De plus, d'après la la proposition 3.1,
$$\frac{H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))/p^n}{N_{G_w}(H^1(M_w, \mathbb{Z}_p(i))/p^n)} \xrightarrow{\sim} \frac{H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))/p^n}{H^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))/p^n \bigcap N_{G_w}(H^1(M_w, \mathbb{Z}/p^n(i)))}$$
pour tout $v \in S^{(i)}$.
En résumé

Théorème 3.4. — *Soit M/F une extension galoisienne S-ramifiée de corps de nombres d'exposant p^n, de groupe de Galois G. On suppose que $i \not\equiv 1 \pmod d$. Alors l'homomorphisme*
$$N : (WK^{\acute{e}t}_{2i-2}M)_G \longrightarrow WK^{\acute{e}t}_{2i-2}F$$
induit par la corestriction est surjectif. Si de plus $\mu_{p^n} \subseteq F(\mu_p)$,
$$\mid \ker N \mid = \frac{\prod_{v \in S^{(i)}} [M^{ab}_{w,\infty} : F_{v,\infty}]}{[D_F^{(i,n)} : D_F^{(i,n)} \bigcap \bigcap_{v \in S^{(i)}} N_{M_w/F_v} M_w^{\bullet}]}$$
où, pour toute place $v \in S^{(i)}$, $M^{ab}_{w,\infty}$ est l'extension abélienne maximale de F_v contenue dans $M_{w,\infty}$.

4. Application

Dans cette section, on applique la formule de co-descente obtenue dans le cas i pair à une extension M/F de corps de nombres totalement réels. Nous avons besoin de quelques notations supplémentaires.
Pour tout $\mathbb{Z}_p$-module X sur lequel Δ opère et tout entier j,
$$X^{[j]} = \{x \in X;\, \forall \sigma \in \Delta,\, \sigma(x) = \omega^j.x\},$$
où Δ est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F(\mu_p)/F) \simeq \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F_\infty)$ et ω est le caractère de Teichmüller.

Notons X'_M le groupe de Galois de la pro-p-extension non-ramifiée abélienne maximale de $M(\mu_{p^\infty})$, décomposant totalement toutes les places au-dessus de p. On sait que ([**Sc**])
$$\varprojlim(WK^{\text{ét}}_{2i-2}M_n) \cong X'^{[1-i]}_M(i-1) \text{ et que } \varinjlim(WK^{\text{ét}}_{2i-2}M_n) \cong \beta(X'^{[1-i]}_M(i-1))$$
où $\beta(.)$ désigne comme d'habitude le co-adjoint en théorie d'Iwasawa ([**I 1**], [**W**] chap. 15).

Notons aussi que puisque M est totalement réel et que i est pair,
$$H^2(G_S(M_n), \mathbb{Z}_p(i)) \cong H^1(G_S(M_n), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

pour tous les étages M_n de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique M_∞ de M ([**T**], [**Sc**]). Par passage à la limite inductive dans la suite exacte (1), nous obtenons alors une suite exacte

$$(2) \qquad 0 \to \beta(X_M^{'[1-i]}(i-1)) \to H^1(G_S(M_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \to \bigoplus_{w \in S_\infty^{(i)}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i-1) \to 0$$

où $S_\infty^{(i)}$ est l'ensemble des extensions à M_∞ des places $v \in S$ telles que $[F_{v,\infty}(\mu_p) : F_{v,\infty}]$ divise l'entier $i-1$. Remarquons que puisque i est pair, $[F_{v,\infty}(\mu_p) : F_{v,\infty}]$ divise $i-1$ exactement lorsque v est totalement décomposée dans l'extension $F(\mu_p)/F$.
Supposons maintenant que M/F est une extension cyclique de corps de nombres totalement réels, de degré p, de groupe de Galois G. Pour simplifier, on suppose que M/F est linéairement disjointe de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique F_∞/F ; en particulier, $G \simeq \mathrm{Gal}(M_n/F_n)$ ($\simeq \mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty)$) pour tous les étages M_n, F_n. Notons

$$f_\infty : X_F^{'[1-i]} \to (X_M^{'[1-i]})^G$$

et

$$N_\infty : (X_M^{'[1-i]})_G \to X_F^{'[1-i]}$$

les applications obtenues par passage à la limite projective sur les morphismes naturels $f_n : WK_{2i-2}^{\text{ét}}F_n \to (WK_{2i-2}^{\text{ét}}M_n)^G$ et $N_n : (WK_{2i-2}^{\text{ét}}M_n)_G \to WK_{2i-2}^{\text{ét}}F_n$ induits respectivement par la restriction et la corestriction. Puisque i est pair et M est totalement réel, le groupe $H^1(M, \mathbb{Z}_p(i)) \cong H^0(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ est de torsion (voir *e.g* [**Sc**]). De la description cohomologique des noyaux et conoyaux des morphismes f_n, nous déduisons par passage à la limite projective que f_∞ est injectif et que $\mathrm{coker} f_\infty$ est fini. Supposons maintenant que l'invariant mu d'Iwasawa de $X_M^{'[1-i]}$ est nul. Il est bien connu que le module $X_M^{'[1-i]}$ est $\mathbb{Z}_p$-libre ([**I 1**], [**W**]). Il existe donc des entiers positifs a_1, a_{p-1}, a_p tels que

$$X_M^{'[1-i]} \cong \mathbb{Z}_p[G]^{a_p} \oplus I_G^{a_{p-1}} \oplus \mathbb{Z}_p^{a_1},$$

où I_G est l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}_p[G]$ (théorème de Reiner). On se propose dans la suite de déterminer les quantités a_1, a_{p-1}, a_p.
Si $\lambda_i(F)$ désigne le $\mathbb{Z}_p$-rang du module $X_F^{'[1-i]}$, on voit que $a_p + a_1 = \lambda_i(F)$ et que le quotient de Herbrand (en notation additive) $\chi(G, X_M^{'[1-i]}) = a_1 - a_{p-1}$.

Soit T l'ensemble des places $w \in S_\infty^{(i)}$ *non-décomposées* dans l'extension M_∞/F_∞ et soit t le cardinal de T. La suite exacte (2) montre que

$$\chi(G, \beta(X_M^{'[1-i]})) = t + \chi(G, H^1(G_S(M_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))).$$

Puisque $\alpha(X_M^{'[1-i]}) := \beta(X_M^{'[1-i]})^*$ (l'adjoint en théorie d'Iwasawa) est pseudo-isomorphe à $X_M^{'[1-i]}$, il vient $\chi(G, X_M^{'[1-i]}) = -\chi(G, \beta(X_M^{'[1-i]}))$. Par conséquent

$$\chi(G, X_M^{'[1-i]}) = -t - \chi(G, H^1(G_S(M_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))).$$

Les groupes $H^q(G_S(M_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$ sont nuls pour $q \geq 2$, la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$H^p(G, H^q(G_S(M_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))) \Rightarrow H^{p+q}(G_S(F_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$$

montre que $H^1(G, H^1(G_S(M_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si $i \equiv 0 \pmod d$, 0 sinon et que

$H^2(G, H^1(G_S(M_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))) = 0$. En particulier, $\chi(G, H^1(G_S(M_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))) = -1$ si $i \equiv 0 \pmod d$ et 0 sinon. D'où

$$\chi(G, X_M^{'[1-i]}) = -t+1 \ \text{ si } i \equiv 0 \pmod d \ \text{ et } \ -t \ \text{ sinon.}$$

Maintenant, on sait expliciter dans ce cas particulier (F totalement réel, i pair) le noyau de l'homomorphisme N_∞. On pourra ainsi déterminer la représentation galoisienne associée au module $X_M^{'[1-i]}$.

Pour n assez grand, les places $v \in T$ ne se décomposent pas dans la tour cyclotomique F_∞/F_n. Si $T = \emptyset$, il est clair que N_∞ est injectif. Si $T \neq \emptyset$, $\ker N_\infty \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{t-1}$ si $d \mid i$ et $\ker N_\infty \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t$ sinon. D'un autre côté, il est clair que $\ker N_\infty \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{a_{p-1}}$. Il en résulte que $a_{p-1} = t-1$ si $d \mid i$ et $T \neq \emptyset$ et $a_{p-1} = t$ sinon. Nous en déduisons que $a_1 = 1$ et $a_p = \lambda_i(F) - 1$ si $T = \emptyset$ et $d \mid i$. Sinon, $a_1 = 0$ et $a_p = \lambda_i(F)$. En résumé

Théorème 4.1. — *Soit p un nombre premier impair et soit M/F une extension cyclique de degré p, de groupe de Galois G, linéairement disjointe de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique F_∞/F. Supposons que l'invariant mu d'Iwasawa du module $X_F^{'[1-i]}$ est nul et notons $\lambda_i(F)$ son invariant lambda. Soit T l'ensemble des places de F_∞ non-décomposées dans M_∞/F_∞ et totalement décomposées dans $F(\mu_{p^\infty})/F_\infty$ et soit t son cardinal.*

1. *Si $T = \emptyset$ et $d \mid i$, nous avons un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p[G]$-modules*
$$X_M^{'[1-i]} \cong \mathbb{Z}_p[G]^{\lambda_i(F)-1} \oplus \mathbb{Z}_p.$$
2. *Si $T = \emptyset$ et d ne divise pas i*
$$X_M^{'[1-i]} \cong \mathbb{Z}_p[G]^{\lambda_i(F)}.$$
3. *Si T est non vide,*
$$X_M^{'[1-i]} \cong \mathbb{Z}_p[G]^{\lambda_i(F)} \oplus I_G^{t-\delta_i}$$
où $\delta_i = 1$ si $d \mid i$ et 0 sinon.

Références

[As] J. Assim, *Analogues étales de la p-tour des corps de classes.* J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), no. 3, 651-663.

[As-Mo 1] J. Assim and A. Movahhedi, *Bounds for étale capitulation kernels.* K-theory **33** (2004), 199-313.

[As-Mo 2] Assim, J. et A. Movahhedi, *Norm index formulae and applications.* À paraître dans J. of K-theory.

[CKPS] T. Chinburg, M. Kolster, G. Pappas, V. Snaith, *Galois structure of K-groups of rings of integers.* K-Theory **14** (1998), no. 4, 319-369.

[D-F] W. Dwyer, E. Friedlander, *Algebraic and étale K-theory.* Trans. Amer. Math. Soc. **247** (1985), 247-280.

[Gr] R. Greenberg, *A note on K_2 and the theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions.* Amer. J. Math. **100** (1978), no. 6, 1235-1245.

[Gri] Ross A.W. Griffiths, *A genus formula for étale Hilbert kernels in a cyclic p-power extension.* PHD Thesis, McMaster University, 2005.

[I 1] K. Iwasawa, *On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields.* Ann. of Math. (2) **98** (1973) , 246-326.

[I 2] K. Iwasawa, *Riemann-Hurwitz formula and p-adic Galois representations for number fields.* Tôhoku Math. J. (2) **33** (1981), no. 2, 263-288.

[Ka] B. Kahn, *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres.* K-Theory **7** (1993), No.1, 55-100.

[Ko 1] M. Kolster, *Remarks on étale K-theory and Leopoldt's conjecture.* Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1991–92, 37–62, Progr. Math., 116, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

[Ko 2] M. Kolster, *K-theory and arithmetic. Contemporary developments in algebraic K-theory.* 191-258 (electronic), ICTP Lect. Notes, XV, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004.

[Ko-Mo] M. Kolster and A. Movahhedi, *Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation.* Ann. Inst. Fourier **50** (2000), No.1, 35-65.

[M] M. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory,*. Annals of Math. Studies 72, Princeton University Press, Princeton, 1971.

[Mo-Ng] A. Movahhedi et T. Nguyen Quang Do, *Sur l'arithmétique des corps de nombres p-rationnels.* Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987-88, 155-200, Progr. Math., 81, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Ng 1] T. Nguyen Quang Do, *Analogues supérieurs du noyau sauvage* Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2) 4 (1992), no. 2, 263-271.

[Ng 2] T. Nguyen Quang Do, *Théorie d'Iwasawa des noyaux sauvages étales d'un corps de nombres.* Théorie des nombres, Années 1998/2001, 9 pp., Publ. Math. Besançon, 2002.

[Ng 3] T. Nguyen Quang Do, *Quelques suites exactes en théorie des genres.* Algèbre et théorie des nombres. Années 2003-2006, 103-115, Publ. Math. Besançon, 2006.

[Sc] P. Schneider, *Über gewisse Galoiskohomologiegruppen.* Math. Z. **168** (1979), 181-205.

[So] C. Soulé, *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale.* Inv. math **55** (1979), 251-295.

[T] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology.* Invent. Math. **36** (1976), 257-274.

[V] D. Vauclair, *Noyaux de Tate et capitulation.* J. Number Theory **128** (2008), No. 3, 619-638.

[W] L. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, Springer, 1997.

---

12 décembre 2011

Hassan Asensouyis, Département de Mathématiques et Informatique, Université Moulay Ismail, B.P 11201 Zitoune, Meknès, Maroc • *E-mail :* `rev.hassan@hotmail.com`

Jilali Assim, Département de Mathématiques et Informatique, Université Moulay Ismail, B.P 11201 Zitoune, Meknès, Maroc • *E-mail :* `assim@fs-umi.ac.ma`