

---

# SUITES DE CESARO ET NOMBRES DE BERNOULLI

par

Farid Bencherif & Tarek Garici

---

**Résumé.** — Selon Edouard Lucas, on désigne par suite de Cesàro toute suite de nombres complexes dont la série génératrice exponentielle  $S(z)$  vérifie la relation  $S(z) = e^z S(-z)$ . Nous prouvons dans cet article deux identités vérifiées par ces suites. Nous généralisons de manière simple des identités vérifiées par les nombres de Bernoulli et découvrons de nouvelles identités vérifiées par les nombres de Genocchi, de Fibonacci et de Lucas.

**Abstract.** — According to Edouard Lucas, a Cesàro sequence is any sequence of complex numbers whose exponential generating series  $S(z)$  satisfies the relation  $S(z) = e^z S(-z)$ . In this paper, we prove two identities which are satisfied by such sequences. Then we generalize, in a simple way, identities satisfied by Bernoulli numbers, and we find new identities satisfied by Genocchi numbers, Fibonacci numbers and Lucas numbers.

## 1. Introduction

Selon Edouard Lucas (cf.[10]), on appelle suite de Cesàro toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de nombres complexes vérifiant

$$(1) \quad u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k u_k \text{ pour tout } n \geq 0.$$

En désignant par  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} z^n$  la série génératrice exponentielle associée à la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ , la condition (1) est équivalente à

$$(2) \quad S(z) = e^z S(-z).$$

Il est aisé de vérifier que les suites  $((-1)^n B_n)_{n \geq 0}$  et  $\left(\frac{(-1)^n}{n+1} G_{n+1}\right)_{n \geq 0}$ , où  $(B_n)_{n \geq 0}$  et  $(G_n)_{n \geq 0}$  sont les suites des nombres de Bernoulli et de Genocchi de séries génératrices exponentielles associées :  $\frac{z}{e^z-1}$  et  $\frac{2z}{e^z+1}$ , sont des suites de Cesàro.

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — 11B68, 11B39, 05A40.

**Mots clefs.** — Suite de Cesàro, Nombres de Bernoulli, Nombres de Genocchi.

Le but de cet article est d'établir un théorème général fournissant des identités pour toute suite de Césàro. Ce théorème que nous énonçons et prouvons au paragraphe suivant va nous permettre non seulement de généraliser plusieurs identités connues comportant les nombres de Bernoulli mais aussi de découvrir des identités similaires pour les nombres de Genocchi, de Fibonacci et de Lucas. Nous consacrons le troisième paragraphe à l'énoncé de ces identités.

## 2. Enoncé du théorème principal

Nous adoptons les notations suivantes préconisées dans [8], pour tous entiers naturels  $n$  et  $m$ , on pose

$$m^{\underline{q}} = \prod_{j=0}^{q-1} (m-j) \quad \text{et} \quad m^{-n} = \prod_{j=1}^n (m+j)^{-1},$$

avec la convention qu'un produit vide vaut un et qu'une somme vide vaut zéro. Notre principal résultat s'énonce ainsi :

**Théorème 2.1.** — Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de Césàro. Alors, pour tous entiers naturels  $n$ ,  $m$  et  $q$ , on a :

1.

$$\sum_{k=0}^{m+q} \binom{m+q}{k} (n+k+q)^{\underline{q}} (-1)^k u_{n+k} + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} (m+k+q)^{\underline{q}} (-1)^k u_{m+k} = 0.$$

2.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k \frac{u_{n+k+q}}{(n+k+q)^{\underline{q}}} + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{u_{m+k+q}}{(m+k+q)^{\underline{q}}} \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} \frac{n!(m+q-k-1)!}{k!(q-1-k)!(m+n+q-k)!} (-1)^k u_k. \end{aligned}$$

**Démonstration du théorème 2.1.** — Pour toute suite  $u = (u_n)_{n \geq 0}$  de nombres complexes, désignons par  $L_u$  la forme linéaire définie sur  $\mathbb{C}[x]$  par  $L_u(x^n) = u_n$ , pour tout entier  $n \geq 0$ . Convenons de noter  $P(u)$  l'image par  $L_u$  d'un polynôme  $P(x)$  de  $\mathbb{C}[x]$ . Ainsi si  $P(x) = \sum a_k x^k$ , alors  $P(u) = \sum a_k u_k$ . Posons  $e_n(x) = x^n - (1-x)^n$ , pour tout  $n \geq 0$ . D'après (1), dire qu'une suite  $u$  est de Césàro équivaut à dire que  $(e_n(u))_{n \geq 0}$  est la suite nulle. Posons

$$E := \{A(x) - A(1-x); A \in \mathbb{C}[x]\}.$$

Alors,  $E$  est le sous espace vectoriel de  $\mathbb{C}[x]$  engendré par la famille de polynômes  $(e_n(x))_{n \geq 0}$ . Il en résulte que pour toute suite  $u$  de Césàro et pour tout polynôme  $P \in E$ , on a  $P(u) = 0$ . Soient  $n$ ,  $m$  et  $q$  des entiers naturels et  $u$  une suite de Césàro. Posons

$$P^*(x) = \sum_{k=0}^{m+q} \binom{m+q}{k} (-1)^k (n+k+q)^{\underline{q}} x^{n+k} + \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} (-1)^{k+q+1} (m+k+q)^{\underline{q}} x^{m+k}$$

et

$$Q^*(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k \frac{x^{n+k+q}}{(n+k+q)^{\underline{q}}} + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^{m+k+q}}{(m+k+q)^{\underline{q}}} - \sum_{k=0}^{q-1} \frac{n!(m+q-k-1)!}{k!(q-1-k)!(m+n+q-k)!} (-1)^k x^k.$$

Les relations 1 et 2 du théorème 2.1 se traduisent par les relations

$$(3) \quad P^*(u) = 0 \text{ et } Q^*(u) = 0,$$

pour toute suite  $u$  de Césàro. Grâce au lemme suivant dans lequel  $\mathfrak{D}$  désigne l'opérateur de dérivation et  $\mathfrak{I}$  l'opérateur d'intégration définis sur  $\mathbb{C}[x]$  respectivement par  $\mathfrak{D}(P(x)) = P'(x)$  et  $\mathfrak{I}(P(x)) = \int_0^x P(t)dt$ , nous allons prouver (3) en montrant que les polynômes  $P^*$  et  $Q^*$  appartiennent à  $E$ .

**Lemme 2.2.** — Pour tous polynômes  $A(x)$  et  $B(x)$  de  $\mathbb{C}[x]$ , on a

1. pour  $q \geq 0$  :

$$P_A(x) := \mathfrak{D}^q (A(x) + (-1)^{q+1}A(1-x)) \in E,$$

2. pour  $q \geq 1$  :

$$Q_B(x) := \mathfrak{I}^q (B(x) + (-1)^{q+1}B(1-x)) - \frac{1}{(q-1)!} \int_0^1 B(1-t)(t-x)^{q-1} dt \in E.$$

*Démonstration.* — On prouve que  $P_A(x)$  et  $Q_B(x)$  sont dans  $E$  en constatant que  $P_A(x) = (\mathfrak{D}^q A)(x) - (\mathfrak{D}^q A)(1-x)$  et également que  $Q_B(x) = (\mathfrak{I}^q B)(x) - (\mathfrak{I}^q B)(1-x)$ . On établit cette dernière relation en exploitant le fait que pour tout polynôme  $P(x)$  de  $\mathbb{C}[x]$ , on a :

$$(\mathfrak{I}^q P)(x) = \frac{1}{(q-1)!} \int_0^x P(t)(x-t)^{q-1} dt.$$

□

Dans ce qui suit,  $A(x) = x^{n+q}(1-x)^{m+q}$  et  $B(x) = x^n(1-x)^m$ . Nous allons prouver qu'avec ce choix de  $A$  et  $B$ , on a  $P_A = P^*$  et  $Q_B = Q^*$ , il en résultera alors d'après le lemme que  $P^*$  et  $Q^*$  sont bien dans  $E$  et le théorème 2.1 sera prouvé.

On a

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \mathfrak{D}^q (x^{n+q}(1-x)^{m+q} + (-1)^{q+1} (1-x)^{n+q} x^{m+q}) \\ &= \mathfrak{D}^q \left( \sum_{k=0}^{m+q} \binom{m+q}{k} (-1)^k x^{n+k+q} + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} (-1)^k x^{m+k+q} \right) = P^*(x). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} & \mathfrak{J}^q(B(x) + (-1)^{q-1}B(1-x)) \\ &= \mathfrak{J}^q\left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k x^{n+k} + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{m+k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k \frac{x^{n+k+q}}{(n+k+q)^{\underline{q}}} + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^{m+k+q}}{(m+k+q)^{\underline{q}}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 B(1-t)(t-x)^{q-1} dt &= \int_0^1 (1-t)^n t^m (t-x)^{q-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} \left(\int_0^1 (1-t)^n t^{m+q-1-k} dt\right) (-1)^k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} \frac{n!(m+q-k-1)!}{(n+m+q-k)!} (-1)^k x^k. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$Q_B(x) = \mathfrak{J}^q(B(x) + (-1)^{q+1}B(1-x)) - \frac{1}{(q-1)!} \int_0^1 B(1-t)(t-x)^{q-1} dt = Q^*(x).$$

La preuve du théorème est complète.

### 3. Applications et exemples

Le théorème 2.1 permet de retrouver simplement des identités connues comportant les nombres de Bernoulli et les nombres de Genocchi, découvertes par différents auteurs et prouvées par diverses méthodes.

**3.1. Identités vérifiées par les nombres de Bernoulli.** — L'application du théorème 2.1 à la suite de Cesàro  $((-1)^n B_n)_{n \geq 0}$  fournit les deux identités suivantes

$$(4) \quad (-1)^n \sum_{k=0}^{m+q} \binom{m+q}{k} (n+k+q)^{\underline{q}} B_{n+k} + (-1)^{m+q+1} \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} (m+k+q)^{\underline{q}} B_{m+k} = 0,$$

et

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+q} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{B_{n+k+q}}{(n+k+q)^{\underline{q}}} + (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{B_{m+k+q}}{(m+k+q)^{\underline{q}}} \\ (5) \quad &= \sum_{k=0}^{q-1} \frac{n!(m+q-1-k)!}{k!(q-1-k)!(m+n+q-k)!} B_k \end{aligned}$$

Dans tout ce qui suit, on suppose  $n \geq 0$  et  $m \geq 0$ . La relation (4) généralise plusieurs identités connues.

1. Pour  $m = n$  et  $q = 1$ , elle permet d'obtenir :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) B_{n+k} = 0.$$

C'est la relation d'Ettingshausen [15] (1827), redécouverte par Seidel [13] (1877) puis de nouveau par Kaneko [9] (1995). Cette relation apparait dans le livre de Nielsen [12], (1923). Une relation plus générale, écrite symboliquement, figure aussi en page 240 dans le livre d'Edouard Lucas [10] (1891). D'autres auteurs se sont intéressés à ce résultat. Ainsi Gessel [7] (2003) en donne une démonstration utilisant le calcul ombrel. Chen [5] (2005) la démontre en exploitant des propriétés d'une matrice de Seidel. Chen et Sun [2] (2009) la prouvent en utilisant une extension de l'algorithme de Zeilberger alors que Cigler [3] (2009) reprend, en la modernisant, la démonstration originelle de Seidel.

2. Pour  $q = 0$ , on reconnaît la relation de Carlitz [1](1968), établie aussi par Gessel [7] (2003), prouvée également par Wu, Sun et Pan[14] (2004), par Chen[5] (2005) ainsi que par Chen et Sun[2] (2009) :

$$(-1)^n \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} B_{n+k} - (-1)^m \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{m+k} = 0.$$

3. Pour  $q = 1$ , on obtient la relation prouvée par Momiyama, [11] (2001), à l'aide de l'intégrale de Volkenborn et généralisée aux polynômes de Bernoulli par Wu, Sun et Pan [14] (2004). Cette relation a aussi été démontrée par Chen et Sun[2] (2009) :

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} (n+k+1) B_{n+k} + (-1)^m \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (m+k+1) B_{m+k} = 0.$$

4. Pour  $m = n$  et  $q = 3$ , on retrouve la relation de Chen et Sun [2] (2009) :

$$\sum_{k=0}^{n+3} \binom{n+3}{k} (n+k+3)(n+k+2)(n+k+1) B_{n+k} = 0.$$

5. La relation (5) pour  $q = 1$ , est la formule de Gelfand [6], (1968), démontrée aussi par Chen et Sun [2] (2009) :

$$(-1)^{n-1} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{B_{n+k+1}}{(n+k+1)} + (-1)^{m-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{B_{m+k+1}}{(m+k+1)} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

Cette formule a de plus été généralisée aux polynômes de Bernoulli par Chang et Ha [4] (2006).

**3.2. Identités vérifiées par les nombres de Genocchi.** — L'application du théorème 2.1 à la suite de Cesàro  $\left(\frac{(-1)^n}{n+1} G_{n+1}\right)_{n \geq 0}$  fournit les deux identités suivantes

(6)

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{m+q} \binom{m+q}{k} (n+k+q)^{q-1} G_{n+k+1} + (-1)^{m+q+1} \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} (m+k+q)^{q-1} G_{m+k+1} = 0.$$

et

$$\begin{aligned} (-1)^{n+q} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{G_{n+k+q+1}}{(n+k+q+1)^{q+1}} + (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{G_{m+k+q+1}}{(m+k+q+1)^{q+1}} \\ = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{n!(m+q-1-k)!}{(k+1)!(q-1-k)!(m+n+q-k)!} G_{k+1}. \end{aligned}$$

1. En changeant  $n$  en  $n-1$  et  $m$  en  $m-1$ , la relation (6) permet d'obtenir pour  $q=1$

$$(7) \quad (-1)^n \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} G_{n+k} + (-1)^m \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} G_{m+k} = 0.$$

Cette dernière relation établie pour  $n \geq 1$  et  $m \geq 1$  est en fait vérifiée pour  $n \geq 0$  et  $m \geq 0$ . Elle permet d'obtenir pour  $m=n$  l'identité

$$(8) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} G_{2n-k} = 0,$$

Il est facile de constater que  $G_m = 0$ , pour tout entier  $m$  impair supérieur ou égal à 3. Il suffit pour cela de remarquer que la série formelle  $\frac{2z}{e^z+1} - z = -z \tanh\left(\frac{z}{2}\right)$  est paire. La relation (8) devient pour  $n \geq 2$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} G_{2n-2k} = 0$$

On obtient ainsi la relation de Seidel ([7])

2. La relation (8.1) de ([2])

$$(9) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} G_{m+k} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{n+k} (-1)^j \binom{n+k}{j} G_j$$

peut s'obtenir trivialement en constatant que le polynôme

$$T(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{m+k} - \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{n+k} (-1)^j \binom{n+k}{j} x^j$$

est le polynôme nul. On a en effet

$$T(x) = x^m (1-x)^n - (1-x)^n (1-(1-x))^m = 0.$$

On a donc  $T(u) = 0$  pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ . Autrement dit

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} u_{m+k} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{n+k} (-1)^j \binom{n+k}{j} u_j.$$

Le cas particulier  $u_n = G_n$  donne la relation (8.1) de ([2]).

### 3.3. Identités vérifiées par les nombres de Fibonacci et les nombres de Lucas. —

Les suites des nombres de Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 0}$  et de Lucas  $(L_n)_{n \geq 0}$  vérifient la même relation de récurrence  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ , avec les conditions initiales  $F_0 = 0, F_1 = 1, L_0 = 2, L_1 = 1$ . Avec  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , on a  $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ,  $L_n = \alpha^n + \beta^n$  et on constate facilement que les séries génératrices exponentielles associées aux suites  $\left(\frac{F_{n+1}}{n+1}\right)_{n \geq 0}$  et  $(L_n)_{n \geq 0}$  sont respectivement  $\frac{e^{\alpha z} - e^{\beta z}}{(\alpha - \beta)z}$  et  $e^{\alpha z} + e^{\beta z}$ . On vérifie, à l'aide de la propriété (2), que les suites  $\left(\frac{F_{n+1}}{n+1}\right)_{n \geq 0}$  et  $(L_n)_{n \geq 0}$  sont des suites de Césaro. L'application du théorème 2.1 fournit alors les identités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{m+q} \binom{m+q}{k} (n+k+q)^{\underline{q-1}} (-1)^k F_{n+k+1} + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} (m+k+q)^{\underline{q-1}} (-1)^k F_{m+k+1} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k \frac{F_{n+k+q+1}}{(n+k+q+1)^{\underline{q+1}}} + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{F_{m+k+q+1}}{(m+k+q+1)^{\underline{q+1}}} \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} \frac{n!(m+q-1-k)!}{(k+1)!(q-1-k)!(m+n+q-k)!} (-1)^k F_{k+1}, \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{m+q} \binom{m+q}{k} (n+k+q)^{\underline{q}} (-1)^k L_{n+k} + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} (m+k+q)^{\underline{q}} (-1)^k L_{m+k} = 0,$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k \frac{L_{n+k+q}}{(n+k+q)^{\underline{q}}} + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{L_{m+k+q}}{(m+k+q)^{\underline{q}}} \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} \frac{n!(m+q-1-k)!}{k!(q-1-k)!(m+n+q-k)!} (-1)^k L_k. \end{aligned}$$

### Références

- [1] L. Carlitz, Bernoulli Numbers, *Fibonacci Quart.* **6** (1958) 71-85.
- [2] W. Y. C. Chen, L.H. Sun, Extended Zeilberger's Algorithm for Identities on Bernoulli and Euler Polynomials, *J. Number Theory* **129**, (2009) 2111-2132.  
arXiv :0810.0438 ; Final version. References updated and a typo in (8.1) corrected.
- [3] J. Cigler, q-Fibonacci polynomials and q-Genocchi numbers arXiv :0908.1219v3 [math.CO] (2009).
- [4] C. H. Chang and C.W. Ha, On identities involving Bernoulli and Euler polynomials, *Fibonacci Quart.* **44** (2006), n°1, 39-45.
- [5] K. W. Chen, A summation on Bernoulli numbers, *J. Number Theory* **111** (2005), n°2, 372-391.
- [6] M. B. Gelfand, A note on a certain relation among Bernoulli numbers, (Russian), Bashkir. Gos. Univ. Uchen. Zap. Vyp. 31 (3) (1968) 215-216.

- [7] I. M. Gessel, Applications of the classical umbral calculus, *Algebra Universalis* **49** (2003) 397-434, dedicated to the memory of Gian-Carlo Rota.
- [8] R. L. Graham, D.E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2nd Edition, Addison Wesley, 1994.
- [9] M. Kaneko, A recurrence formula for the Bernoulli numbers, *Proc. Japan Acad. Ser.A Math. Sci.* **71** (8) (1995) 192-193.
- [10] E. Lucas, *Théorie des nombres*, nouveau tirage, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1958, [reprod. de l'éd. Paris, Gauthier-Villars, 1891].
- [11] H. Momiyama, A new recurrence formula for Bernoulli numbers, *Fibonacci Quart.* **39** (3) (2001) 285-288.
- [12] N. Nielsen, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*, Gauthier-villars et Cie, 1923.
- [13] L. Seidel, *Über eine einfache Entstehungsweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen*, *Sitzungsber. Münch. Akad. Math. Phys. Classe* (1877) 157-187.
- [14] K.-J. Wu, Z.-W. Sun and H. Pan, Some identities for Bernoulli and Euler polynomials, *Fibonacci Quart.* **42** (2004) 295-299.
- [15] von Ettingshausen, A. *Vorlesungen über die höhere Mathematik*, Bd. 1, Vienna : Carl Gerold, (1827).

---

*11 juillet 2011*

FARID BENCHERIF, Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B., BP 32 El Alia 16111 Bab Ezzouar Alger.

*E-mail* : fbencherif@usthb.dz ; fbencherif@yahoo.fr

TAREK GARICI, Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B., BP 32 El Alia 16111 Bab Ezzouar Alger.

*E-mail* : tgarici@usthb.dz ; tarekgarici@gmail.com